Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, Г. А. Кравцова, А. М. Малокостов, Однородная перенормировка КЭД в однопетлевом приближении, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 64–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:48:17

О. И. Завьялов, Г. А. Кравцова, А. М. Малокостов
**ОДНОРОДНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА КЭД
В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Обсуждается вариант однородной перенормировки в импульсном представлении (см. [1]), сохраняющий калибровочную инвариантность в КЭД. Проверены тождества Уорда в однопетлевом приближении.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] была предложена схема так называемой однородной перенормировки, генетически восходящей к дифференциальной перенормировке. Дифференциальная перенормировка была предложена впервые в работах [2, 3, 4] и привлекла внимание принципиальной простотой своих рецептов и эксплицитностью ответов.

Главная идея метода состоит в том, чтобы вместо исходных, перенормированных диаграмм Фейнмана, корректно определенных лишь тогда, когда аргументы вершин не совпадают, рассматривать их достаточно высокие “первообразные”. При этом полюсные особенности амплитуд “сглаживаются”, и первообразная естественным образом расширяется на все пространство основных функций, не обязательно обращающихся в нуль в точках совпадения аргументов. Сама же перенормированная амплитуда определяется теперь как производная таким образом расширенной обобщенной функции (любая производная обобщенной функции определена корректно).

В первоначальных рецептах дифференциальной перенормировки в качестве оператора, по отношению к которому осуществлялось “интегрирование” исходной амплитуды, фигурировал многомерный оператор Лапласа Δ . Например, простейшая “петля” в теории ϕ^4 перенормировалась следующим элегантным способом:

$$G(x) = \frac{1}{x^4} \quad \longrightarrow \quad G^{\text{ren}}(x) = \Delta \frac{1}{x^2} \ln x^2 \mu^2. \quad (1)$$

Однако в старших порядках такой выбор приводит к нежелательным осложнениям, связанным с тем, что различные вершины входят в соответствующее предписание несимметрично.

В работе [5] было предложено использовать вместо лапласиана следующий базовый оператор $\hat{S}$ в координатном представлении:

$$\hat{S} = -\frac{1}{2} \sum \frac{\partial}{\partial x_i} x_i - \frac{1}{2} \sum m_i \frac{\partial}{\partial m_i}. \quad (2)$$

Такой выбор позволил написать общие рецепты (так называемые перенормированные правила Фейнмана) [5] в любом порядке теории возмущений.

В работе [1] аналогичные правила были сформулированы в импульсном представлении. Для логарифмически расходящихся диаграмм в однопетлевом приближении эти правила сводятся к замене подынтегральной функции $G(p_i, k, m_j)$ (p_i – внешние импульсы диаграммы, k – ее петлевой импульс, а m_j – массы пропагаторов) на перенормированную $G^{\text{ren}}(p_i, k, m_j)$, причем

$$\begin{aligned} G^{\text{ren}}(p_i, k, m_j) &= SG(p_i, k, m_j)(-\ln H) = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \sum p_i \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{1}{2} \sum k \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} \sum m_j \frac{\partial}{\partial m_j} \right) G(p_i, k, m_j)(-\ln H), \end{aligned} \quad (3)$$

где H – однородная функция переменных p_i , k и m_j второго порядка.

Для однопетлевых диаграмм, имеющих больший индекс расходимости, вместо оператора S следует использовать оператор

$$S \left(S + \frac{1}{2} \right) (S + 1) \dots \left(S + \frac{\omega}{2} \right), \quad (4)$$

где ω – индекс расходимости диаграммы.

Как видно, эти правила допускают значительный произвол, связанный прежде всего с выбором однородной функции H . Разумеется, ее следует выбирать максимально простым способом. Однако существенные ограничения на такой выбор задаются требованиями калибровочной симметрии.

Цель настоящей работы – в рамках КЭД указать один из правильных способов выбора этих однородных функций, а также проверить в однопетлевом приближении выполнение тождеств Уорда. Настоящую статью мы рассматриваем как первый этап адаптации однородной перенормировки к потребностям более сложных теорий (с неабелевой калибровочной симметрией или суперсимметрией). Нижеследующие рассуждения помогут нам оценить трудности, которые встретятся на этом пути, и сформулировать идеи, позволяющие, быть может, преодолеть эти трудности.

2. ТОЖДЕСТВО УОРДА ДЛЯ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

В однопетлевом приближении тождества Уорда для вершинной функции связывают между собой две расходящиеся диаграммы: вершинную диаграмму Γ_μ (рис. 1а) и диаграмму собственной энергии электрона Σ (рис. 1б). Опишем рецепт перенормировки этих диаграмм.

Эти две диаграммы имеют разные индексы расходимости: вершинная функция Γ_μ расходится логарифмически, а собственно-энергетическая диаграмма Σ – линейно. Соответственно “наивный” рецепт перенормировки состоял бы в том, чтобы диаграмму Γ_μ перенормировать одним оператором S , а диаграмму Σ – оператором $S(S + \frac{1}{2})$. Однако при этом тождество Уорда окажется нарушенным. Для сохранения тождества Уорда предлагается действовать следующим образом.

В собственно-энергетической диаграмме выберем траектории внешнего импульса p и петлевого импульса q так, чтобы внутренняя фотонная линия обладала импульсом q . Будем симметризовать подынтегральное выражение относительно замены $q \rightarrow -q$. В результате такой симметризации линейная расходимость сократится и интеграл будет

Рис. 1

расходиться лишь логарифмически, так что для перенормировки этого выражения достаточно будет ограничиться дифференциальным оператором первого порядка. Поэтому вместо предписания (4) воспользуемся другим рецептом. Именно, будем считать, что перенормированная диаграмма получается в результате замены под знаком интеграла этой симметризованной функции $\tilde{\Sigma}(p, q)$ выражением вида

$$\tilde{\Sigma}^{\text{ren}}(p, q) = \left(S + \frac{1}{2}\right) \tilde{\Sigma}(p, q) \cdot (-\ln h(q)),$$

где $h(q) = \frac{q^2}{\mu^2}$, μ – масштабный множитель.

Поясним роль слагаемого $1/2$ в только что написанной формуле. После симметризации по петлевому импульсу подынтегральное выражение будет пропорционально внешнему импульсу p . Если этот внешний импульс, который умножается на логарифмически расходящийся интеграл, вынести из-под оператора $(S + \frac{1}{2})$, то этот оператор заменится просто оператором S , который будет действовать на логарифмически расходящийся интеграл и перенормировать его в соответствии с предписанием (3). Таким образом, для перенормировки собственно-энергетической диаграммы Σ достаточно оператора $(S + \frac{1}{2})$.

В вершинной диаграмме Γ_μ конфигурация внешних и петлевых импульсов выбирается в соответствии с их выбором в собственно-энергетической диаграмме Σ (т.е. так, что все внешние импульсы текут по фермионной линии). Производится такая же симметризация по петлевому импульсу. Для перенормировки вершинной диаграммы следует прямо использовать формулу (3):

$$\Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, q, k) = S\tilde{\Gamma}_\mu(p, q, k) \cdot (-\ln h(q)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что симметризация по петлевому импульсу избавляет любую диаграмму от нечетных расходимостей. Это позволит нам в следующем разделе вместо оператора $S(S + 1/2)(S + 1)$ для квадратично расходящегося поляризационного оператора $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, q, m)$ использовать оператор $S(S + 1)$, действующий на симметризованное выражение $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p, q, m)$:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{\text{ren}}(q, p) = S(S + 1)\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q, p) \ln h(q).$$

Докажем теперь, что перенормированные указанным способом диаграммы удовлетворяют тождеству Уорда

$$k^\mu \Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, k, p+k) = \Sigma^{\text{ren}}(p+k) - \Sigma^{\text{ren}}(p). \quad (5)$$

Выпишем в явном виде перенормированные диаграммы собственной энергии электрона и вершинной функции. Собственная энергия электрона имеет вид

$$\Sigma(p)^{\text{ren}} = \int d^4q \left(S + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-p)^2 - m^2]} + (q \leftrightarrow -q) \right\} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right), \quad (6)$$

где

$$S = -\frac{1}{2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial m}.$$

Перенормированная треугольная диаграмма $\Gamma_\mu(p, k)$ запишется следующим образом:

$$\Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, k) = \int d^4q S \left\{ \frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} + m) \gamma_\mu (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-k-p)^2 - m^2] [(q-p)^2 - m^2]} + (q \leftrightarrow -q) \right\} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right), \quad (7)$$

где

$$S = -\frac{1}{2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{1}{2} k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} - \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial m}.$$

Принимая во внимание, что $k_\mu S = (S + \frac{1}{2}) k_\mu$, получаем

$$k^\mu \Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, k) = \int d^4q \left(S + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} + m) \hat{k} (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-k-p)^2 - m^2] [(q-p)^2 - m^2]} + (q \leftrightarrow -q) \right\} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right).$$

Как всегда, представим $\hat{k}$ в виде

$$\hat{k} = - \left(\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} - m - (\hat{q} - \hat{p} - m) \right)$$

и воспользуемся равенствами типа $(\hat{k} - m) \cdot \frac{\hat{k} + m}{(k^2 - m^2)} = 1$. Получим

$$\begin{aligned} k^\mu \Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, k) &= \int d^4q \left(S + \frac{1}{2} \right) \left\{ -\frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} + m) (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} - m) (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-k-p)^2 - m^2] [(q-p)^2 - m^2]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} + m) (\hat{q} - \hat{p} - m) (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-k-p)^2 - m^2] [(q-p)^2 - m^2]} + (q \Longleftrightarrow -q) \right\} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) = \\ &= \int d^4q \left(S + \frac{1}{2} \right) \left\{ -\frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-p)^2 - m^2]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^\lambda (\hat{q} - \hat{k} - \hat{p} + m) \gamma_\lambda}{q^2 [(q-k-p)^2 - m^2]} + (q \Longleftrightarrow -q) \right\} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) = \\ &= \Sigma^{\text{ren}}(p+k) - \Sigma^{\text{ren}}(p). \end{aligned}$$

Рис. 2

Таким образом, тождество Уорда

$$k^\mu \Gamma_\mu^{\text{ren}}(p, k) = \Sigma^{\text{ren}}(p + k) - \Sigma^{\text{ren}}(p) \quad (8)$$

выполняется.

Покажем теперь, как нужно действовать в старших порядках, используя в качестве примера двухпетлевые диаграммы собственной энергии электрона и вершинной функции без перекрывающихся расходимостей.

Неперенормированная диаграмма собственной энергии электрона дается формулой

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & \int d^4Q d^4q \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \times \\ & \times \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2}. \end{aligned}$$

Эта диаграмма связана тождеством Уорда с вершинными диаграммами, приведенными на рис. 2. Им отвечают следующие (неперенормированные) выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^a(p, k) = & \int d^4Q d^4q \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \times \\ & \times \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(q + Q - p - k)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\bar{6}}(p, k) &= \int d^4 Q d^4 q \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \times \\ &\times \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\text{B}}(p, k) &= \int d^4 Q d^4 q \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \times \\ &\times \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(q + Q - p - k)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Gamma^{\bar{6}}$ и Γ^{B} содержат однопетлевую поддиаграмму собственной энергии электрона.

Перенормированные выражения выглядят так:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\text{a ren}}(p, k) &= \int d^4 Q d^4 q S_{\text{ext}} \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \times \\ &\times S_{\text{int}} \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(q + Q - p - k)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \times \\ &\times \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\bar{6} \text{ ren}}(p, k) &= \int d^4 Q d^4 q S_{\text{ext}} \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \times \\ &\times \left(S_{\text{int}} + \frac{1}{2} \right) \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \times \\ &\times \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\text{B ren}}(p, k, p + k) &= \int d^4 Q d^4 q S_{\text{ext}} \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \times \\ &\times \left(S_{\text{int}} + \frac{1}{2} \right) \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(q + Q - p - k)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \frac{\hat{Q} - \hat{p} - \hat{k} + m}{(Q - p - k)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{\text{ren}}(p) &= \int d^4 Q d^4 q \left(S_{\text{ext}} + \frac{1}{2} \right) \gamma^\lambda \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \left(S_{\text{int}} + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\times \left[\gamma^\nu \frac{\hat{q} + \hat{Q} - \hat{p} + m}{(q + Q - p)^2 - m^2} \gamma_\nu \right] \frac{\hat{Q} - \hat{p} + m}{(Q - p)^2 - m^2} \gamma^\lambda \frac{1}{q^2 Q^2} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \end{aligned}$$

здесь

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{2}p\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2}Q\frac{\partial}{\partial Q} - \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial m},$$

$$S_{\text{ext}} = -\frac{1}{2}p\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial m}.$$

Элементарные вычисления показывают, что выполняется тождество Уорда

$$k_\mu \Gamma_\mu(p, k) \equiv k_\mu \left(\Gamma_\mu^{\text{a ren}}(p, k) + \Gamma_\mu^{\text{b ren}}(p, k) + \Gamma_\mu^{\text{c ren}}(p, k) \right) = \Sigma(p + k)^{\text{ren}} - \Sigma^{\text{ren}}(p).$$

Отметим тот факт, что в старших петлях логарифм однородной функции входит в более высокой степени чем первая.

В рассмотренных случаях для выполнения тождеств Уорда были важны два обстоятельства. Во-первых, выбор траекторий импульсов в диаграммах, связанных тождествами Уорда, должен быть согласованным, как и выбор однородных функций h . Кроме того, внешний для данного подграфа импульс не должен “заходить” на фотонную линию. Во-вторых, однородная функция h должна зависеть только от фотонного импульса (это является отражением общего свойства КЭД, состоящего в том, что мы можем произвольным образом деформировать фотонный пропагатор без нарушения тождеств Уорда). Первое обстоятельство является существенным: нетрудно видеть, что при любом другом выборе траекторий импульсов явная калибровочная инвариантность теряется. Это происходит из-за того, что для доказательства тождеств Уорда в подынтегральных выражениях необходимо делать сдвиг переменных интегрирования, причем для каждого из двух слагаемых (в симметризованных диаграммах) – свой. Такая операция некорректна, т.к. каждое из этих двух слагаемых в диаграмме расходится, и только их сумма будет сходиться. Таким образом, ради понижения степени дифференциального оператора приходится жертвовать произволом в выборе траекторий импульсов. Конечно, в диаграммах КЭД в одной петле всегда можно расставить импульсы желательным образом, а именно так, чтобы внутренняя фотонная линия содержала лишь внутренний импульс q . Тем не менее мы хотим предложить схему, которая допускает произвольную расстановку импульсов.

Для выполнения тождеств Уорда можно не уменьшать степень дифференциального оператора в выражении для Σ^{ren} , а увеличивать ее в Γ_μ^{ren} . Если перенормировать Σ оператором $(-2)S(S + \frac{1}{2})\Sigma \cdot (-\ln h)$ без симметризации по петлевому импульсу, то правильная перенормировка для Γ_μ будет следующей:

$$\Gamma_\mu^{\text{ren}} = -2 \left(S - \frac{1}{2} \right) S \tilde{\Gamma}_\mu \cdot (-\ln h), \quad (9)$$

где h зависит только от фотонного импульса. Здесь множитель (-2) нужен для того, чтобы обеспечить правильную структуру вычитаний; можно показать, что применение оператора $(-2)(S - \frac{1}{2}) = (1 - 2S)$ к диаграмме Γ_μ , перенормированной одним оператором S , приведет лишь к добавлению конечного контрчлена – константы. Именно, имеет место следующая цепочка равенств (для простоты мы взяли случай $m = 0$):

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^{\text{ren}'}(p, k) &= (-2) \int dq \left(S - \frac{1}{2} \right) S \cdot \Gamma_\mu(q, p, k) \frac{1}{q^2} \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) = \\ &= \left(S - \frac{1}{2} \right) \cdot \int dq \left\{ \tilde{\Gamma}_\mu(q, p, k) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(q \tilde{\Gamma}_\mu(q, p, k) \left(-\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right) \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(S - \frac{1}{2}\right) \cdot \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|q| < M} |q|^3 d|q| d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu(q, p, k) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{|q|=M} d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu\left(\frac{q}{M}, \frac{p}{M}, \frac{k}{M}\right) \ln \frac{M}{\mu} \right\} = \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|q| < M} |q|^3 d|q| d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu(q, p, k) - \int_{|q|=M} d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu\left(\frac{q}{M}, \frac{p}{M}, \frac{k}{M}\right) \ln \frac{M}{\mu} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{|q|=M} d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu\left(\frac{q}{M}, \frac{p}{M}, \frac{k}{M}\right) \right\} = \\
&= \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|q| < M} |q|^3 d|q| d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu(q, p, k) - \int_{|q|=M} d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu\left(\frac{q}{M}, 0, 0\right) \ln \frac{M}{\mu} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{|q|=M} d\Omega(q) \tilde{\Gamma}_\mu\left(\frac{q}{M}, 0, 0\right) + O\left(\frac{1}{M}\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь в последних двух строчках первое слагаемое в фигурных скобках – неперенормированное выражение, второе – бесконечный контрчлен, сокращающий логарифмическую расходимость, а третье – конечный контрчлен, произведенный “лишним оператором” $(1 - 2S)$.

Ясно, что хотя степень дифференциального оператора увеличилась (что, конечно, усложняет вычисления), в многопетлевых диаграммах эта формула может оказаться полезной, т.к. здесь выбор траекторий импульсов может быть произволен.

3. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Перейдем к рассмотрению поляризационного оператора. В однопетлевом приближении он описывается одной диаграммой, и его неперенормированное выражение имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \int d^4q \frac{\gamma_\mu(\hat{p} + \hat{q} + m)\gamma_\nu(\hat{q} + m)}{[(p+q)^2 - m^2][q^2 - m^2]}.$$

Эта диаграмма отличается от всех прочих тем, что не имеет внутренних фотонных линий. Забегая вперед, скажем, что именно этот факт не позволит нам перенормировать ее стандартным способом так, чтобы получить поперечное выражение. С другой стороны, поскольку эта диаграмма является в этом смысле выделенной, для нее можно сформулировать свои собственные правила перенормировки, не затрагивая других диаграмм.

Прежде чем переходить к детальному рассмотрению диаграммы, отметим следующую связь дифференциальной перенормировки и аналитической регуляризации (в известном смысле наличие этой связи также помешает существованию простого рецепта инвариантной перенормировки поляризационного оператора). Именно, логарифм однородной функции можно получить из аналитически регуляризованного подынтегрального выражения путем дифференцирования по параметру регуляризации λ :

$$-\ln q^2 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{(q^2)^\lambda} \Big|_{\lambda=0}.$$

Это позволяет вначале вычислить аналитически-регуляризованное выражение (например, в α -представлении), а потом, подействовав на него операторами S и $\frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$, получить перенормированное выражение.

Рассмотрим регуляризованный поляризационный оператор (далее нам будет удобно сделать поворот Вика, поэтому мы с самого начала будем рассматривать евклидову теорию; евклидово выражение для поляризационного оператора отличается от псевдо-евклидова лишь заменой знака перед квадратом массы в знаменателе; γ -матрицы будем считать антиэрмитовыми, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$). Выберем следующий вариант аналитической регуляризации:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(p) = \int dq S_{\mu\nu}(q, p, m) \cdot \frac{1}{[(q^2 + m^2)((q+p)^2 + m^2)]^{1+\lambda}},$$

где

$$S_{\mu\nu}(q, p, m) = -4m^2\delta_{\mu\nu} + 4(q_\mu(q+p)_\nu + q_\nu(q+p)_\mu - \delta_{\mu\nu}q \cdot (q+p))$$

(здесь и везде ниже мы включили обезразмеривающий параметр μ в определение импульсов и масс, так что все импульсы и массы будем считать безразмерными и под знаком логарифма вместо $\frac{q^2}{\mu^2}$ будем писать просто q^2). В α -представлении это выражение примет следующую форму:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(p) &= \int dq S_{\mu\nu}(q, p, m) \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{(\alpha_1\alpha_2)^\lambda}{(\Gamma(1+\lambda))^2} \cdot e^{-\alpha_1(q^2+m^2)-\alpha_2((q+p)^2+m^2)} = \\ &= 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \frac{(\alpha_1\alpha_2)^\lambda}{(\Gamma(1+\lambda))^2} \cdot e^{-m^2(\alpha_1+\alpha_2) - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2} \times \\ &\quad \times \left\{ -\frac{\delta_{\mu\nu}}{\alpha_1 + \alpha_2} + \delta_{\mu\nu}p^2 \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - 2p_\mu p_\nu \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} - m^2\delta_{\mu\nu} \right\}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(1+\lambda)$ – гамма-функция Эйлера.

Отметим, что слагаемые в фигурных скобках делятся на две группы, имеющие разную степень однородности по параметрам α : первое слагаемое, $-\frac{\delta_{\mu\nu}}{\alpha_1+\alpha_2}$, дает квадратичную расходимость, а остальные – логарифмическую. Обработав стандартным образом этот интеграл, получим для регуляризованного поляризационного оператора следующий ответ:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(p) &= \frac{4\pi^2}{(\Gamma(1+\lambda))^2} \left\{ (-\delta_{\mu\nu})\Gamma(2\lambda-1) \times \right. \\ &\quad \times \int_0^1 d\alpha [m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)] \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{[m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)]^2} \right]^\lambda + \\ &\quad \left. + \Gamma(2\lambda) \int_0^1 d\alpha [-m^2\delta_{\mu\nu} + \alpha(1-\alpha)(\delta_{\mu\nu}p^2 - 2p_\mu p_\nu)] \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{[m^2 + p^2\alpha(1-\alpha)]^2} \right]^\lambda \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Мы видим структуру расходимостей: первое слагаемое, пропорциональное $\Gamma(2\lambda-1)$, имеет два полюса при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1/2$ и отвечает квадратичной расходимости, а второе, имеющее один полюс при $\lambda = 0$, – логарифмической.

Сделаем перенормировку (очевидно, достаточно оператора $S(S+1)$):

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{ren}}(p) = \frac{\partial}{\partial \lambda} S(S+1) \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(p) \Big|_{\lambda=0},$$

получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{\text{ren}}(p) = 4\pi^2 \left\{ 2 \int_0^1 d\alpha [-m^2 \delta_{\mu\nu} + \alpha(1-\alpha)(\delta_{\mu\nu} p^2 - 2p_\mu p_\nu)] - \right. \\ \left. - 2 \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha)(\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \cdot \ln \frac{\alpha(1-\alpha)}{[m^2 + p^2 \alpha(1-\alpha)]^2} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Очевидно, это выражение непоперечно:

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}^{\text{ren}}(p) = 8\pi^2 \left(-m^2 p_\nu - \frac{1}{6} p^2 p_\nu \right).$$

Отметим, что поскольку данная диаграмма является в некотором роде исключительной (она не содержит внутренних фотонных линий), то мы можем сформулировать для нее свои правила перенормировки, так чтобы поляризационный оператор был поперечным. Например, одним из возможных способов такой инвариантной перенормировки является следующий: квадратично расходящийся “кусок” (с полюсами в точках $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$) перенормировать оператором $S(S+1)$, а логарифмически расходящийся (с полюсом в точке $\lambda = 0$) — только одним оператором S .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, предпринятую выше попытку “примирить” однородную перенормировку и абелеву калибровочную симметрию нужно считать в целом обнадеживающей. С другой стороны, очевидно, что при обобщении этих построений, скажем, на неабелевы теории, придется преодолеть ряд принципиальных трудностей и в первую очередь следующую.

В абелевой теории мы хорошо понимаем, какие именно диаграммы компенсируют друг друга в тождествах Уорда. В отличие от абелевой теории в неабелевом случае механизм компенсации диаграмм в тождествах Уорда пока не изучен. Детальному изучению этого механизма будет посвящена наша следующая статья. Тем не менее понятно, что результаты настоящей работы могут быть прямо перенесены на диаграммы, описывающие взаимодействие полей Янга–Миллса с полями материи.

Из рассмотрения приведенных выше двухпетлевых диаграмм понятно, как надо перенормировать диаграммы с вложенными подрасходимостями (для простоты будем говорить лишь о логарифмически расходящихся диаграммах): каждый расходящийся подграф надо “обрабатывать” своим оператором S , зависящим от всех импульсов, являющихся для данного подграфа внешними, после чего подынтегральное выражение нужно умножить на функцию $\frac{(-\ln(q^2/\mu^2))^k}{k}$, где k — число петель в диаграмме, а q — импульс, текущий по внутренней фотонной линии, принадлежащей “самому внутреннему” расходящемуся подграфу. Всю же диаграмму в целом надо “обработать” оператором S , зависящим только от внешних для данной диаграммы импульсов.

Достоинством нашего метода перенормировки является то, что перенормированная диаграмма представляется интегралом, сходимость которого очевидна. К сожалению, нам пока не удалось так обобщить данный метод, чтобы он позволял писать аналогичные интегралы для диаграмм с перекрывающимися расходимостями и чтобы сходимость интегралов была бы столь же очевидной. У тех же интегралов, которые можно

написать для этих диаграмм исходя лишь из комбинаторики R -операции Боголюбова–Парасюка, такие очевидные признаки сходимости отсутствуют. Поэтому мы пока воздержимся от рассмотрения диаграмм с перекрывающимися расходимостями, надеясь вернуться к ним в дальнейшем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-147.

Список литературы

- [1] *Завьялов О.И.* // ТМФ. 1994. Т. 98. №3. С. 536.
- [2] *Freedman D.Z., Johnson K., Latorre J.I.* // Nucl. Phys. 1992. V. B371. P. 353..
- [3] *Lattore J.I., Manuel C., Vilasís Cardona X.* Systematic differential renormalization to all orders. Preprint UB-ECM-PF 93/4. Barcelona, 1993.
- [4] *Haagensen P.E., Latorre J.I.* // Phys. Lett. 1992. V. 283B. P. 293.
- [5] *Завьялов О.И., Смирнов В.А.* // ТМФ. 1993. Т. 96. №2. С. 288.

Математический институт
им. В.А.Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
11.VII.1995 г.

O. I. Zavialov, G. A. Kravtsova, A. M. Malokostov

HOMOGENEOUS RENORMALIZATION OF QED IN ONE-LOOP APPROXIMATION

We discuss the version of the homogeneous renormalization in momentum representation [1], which keeps the gauge invariance in QED. Ward identities are checked in one-loop approximation.