Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Жуков, Теорема Йорио–О’Кэррола для N -частичного решетчатого гамильтониана, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 75–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:18:10

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 107, № 1
апрель, 1996

Ю. В. Жуков

ТЕОРЕМА ЙОРИО–О’КЭРРОЛА ДЛЯ N -ЧАСТИЧНОГО РЕШЕТЧАТОГО ГАМИЛЬТониАНА

Для слабовзаимодействующей системы из N квантовых частиц, движущихся по решетке, доказана унитарная эквивалентность полного и свободного гамильтонианов. Этот результат получается с помощью математической теории рассеяния: доказываются существование волновых операторов и их асимптотическая полнота. При этом строится специальное представление для экспоненты гамильтониана.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему из N квантовых частиц, движущихся по решетке $\mathbf{Z}^\nu$. Мы предположим, что взаимодействие таких частиц не только парное, но включает тройные, четверные и т.д. члены. Гамильтониан H такой системы, заданный в пространстве $l_2((\mathbf{Z}^\nu)^N)$, действует следующим образом:

$$H = H_0 + V, \quad (0.1)$$

где кинетическая энергия H_0 задается сверткой с функцией общего вида:

$$(H_0\phi)(k_1, \dots, k_N) = \sum_{q_1, \dots, q_N \in \mathbf{Z}^\nu} a(k_1 - q_1, \dots, k_N - q_N) \phi(q_1, \dots, q_N),$$

а потенциальная энергия равна

$$(V\phi)(k_1, \dots, k_N) = V(k_1, \dots, k_N) \phi(k_1, \dots, k_N), \quad \phi \in l_2((\mathbf{Z}^\nu)^N),$$

$$V(k_1, \dots, k_N) = \epsilon \sum_{\alpha \subset \{1, \dots, N\}} V_\alpha(k_\alpha),$$

где

$$\alpha = (i_1, \dots, i_s) \subset \{1, \dots, N\}, \quad 0 \leq s \leq N, \quad \epsilon \in \mathbf{R},$$

а

$$k_\alpha = (k_{i_1}, \dots, k_{i_s}).$$

Мы будем предполагать, что функции $a(k_1, \dots, k_N)$ и $V_\alpha(k_\alpha)$ удовлетворяют кластерным оценкам [1]

$$|a(k_1, \dots, k_N)| < c_0 \xi^{\sum_{i=1}^N |k_i|}, \quad 0 < \xi < 1, \quad c_0 > 0, \quad (0.2)$$

$$|V_\alpha(k_\alpha)| < c_\alpha \tilde{\xi}^{d(k_\alpha)}, \quad 0 < \tilde{\xi} < 1, \quad c_\alpha > 0, \quad (0.3)$$

где $d(k_\alpha)$ — длина минимального связного графа, натянутого на точки k_α , и, кроме того, функции $V_\alpha(k_\alpha)$ трансляционно-инвариантны:

$$V_\alpha(k_\alpha + q) = V_\alpha(k_\alpha), \quad q \in \mathbf{Z}^\nu.$$

Здесь $k_\alpha + q = (k_1 + q, \dots, k_N + q)$. Из последнего условия, в частности, вытекает, что операторы H и H_0 коммутируют с унитарной группой U_q , $q \in \mathbf{Z}^\nu$, порожденной сдвигами в $\mathbf{Z}^\nu$:

$$(U_q \phi)(k_1, \dots, k_N) = \phi(k_1 - q, \dots, k_N - q), \quad \phi \in l_2((\mathbf{Z}^\nu)^N).$$

Эта модель (записанная в импульсном представлении) была впервые рассмотрена в обзоре [2], где была сформулирована гипотеза о том, что при достаточно малых ϵ и $\nu \geq 3$ оператор H унитарно эквивалентен H_0 , т.е. в решетчатом случае верна теорема, аналогичная известной теореме Йорио–О’Кэррола для операторов Шредингера [3]. А.М.Мельников и А.И.Могильнер [4] проверили эту гипотезу для случая парного и тройного потенциалов и при условии, что функция $a(k_1, \dots, k_N)$ является суммой вида

$$a(k_1, \dots, k_N) = \sum_{i=1}^N a(k_i). \quad (0.4)$$

В работе [5] автора этот результат (для $N = 3$) был получен без предположения типа (0.4), однако с ограничениями аналитического характера на функцию $a(k_1, \dots, k_N)$.

В настоящей работе унитарная эквивалентность операторов H и H_0 доказана уже для случая произвольного числа N частиц, при этом также несколько ослаблены условия, наложенные в [5] на функцию $a(k_1, \dots, k_N)$. Как и в прежних работах, унитарная эквивалентность H и H_0 доказывается с помощью построения прямого и обратного волновых операторов для пары H и H_0 . Существование прямого волнового оператора $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itH) \exp(-itH_0)$ мы доказываем, как обычно, методом Кука. Однако при доказательстве существования предела $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itH_0) \exp(-itH)$ для обратного волнового оператора мы отступаем от принятой обычно схемы с исследованием резольвенты оператора H (см. [5, 6, 7]) и используем некоторое специальное представление для группы $\exp(-itH)$.

1. ФОРМУЛИРОВКА УСЛОВИЙ И ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для формулировки основных предположений, используемых в работе, перейдем к преобразованию Фурье $l_2((\mathbf{Z}^\nu)^N) \rightarrow L_2((\mathbf{T}^\nu)^N)$, при котором функции на решетке $(\mathbf{Z}^\nu)^N$ переходят в функции на торе $(\mathbf{T}^\nu)^N$:

$$\phi(k_1, \dots, k_N) \rightarrow f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu N/2}} \sum_{k_1, \dots, k_N} \phi(k_1, \dots, k_N) \exp \left\{ i \sum_{l=1}^N (k_l, \lambda_l) \right\}.$$

При этом оператор H перейдет в оператор $\tilde{H}$, принадлежащий классу интегральных операторов в $L_2((\mathbf{T}^\nu)^N)$, обобщенное ядро которых имеет следующий вид (так называемый кластерный оператор, см. [8]):

$$\begin{aligned} h(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \tilde{a}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod_{i=1}^N \delta(\lambda_i - \mu_i) + \\ &+ \epsilon \sum_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha}(\lambda_i - \mu_i) \delta \left(\sum_{i \in \alpha} \lambda_i - \sum_{i \in \alpha} \mu_i \right) \prod_{i \in \alpha'} \delta(\lambda_i - \mu_i). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha' = \{1, \dots, N\} \setminus \alpha$, $\lambda_{\alpha} - \mu_{\alpha} = (\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_N - \mu_N)$, а функции $\tilde{a}$ и $\tilde{V}_{\alpha}$ — преобразования Фурье функций a и V_{α} , соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu N/2}} \sum_{k_1, \dots, k_N} a(k_1, \dots, k_N) \exp \left\{ i \sum_{l=1}^N (k_l, \lambda_l) \right\}, \\ \tilde{V}_{\alpha}(\lambda_{\alpha}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\nu |\alpha|/2}} \sum_{k_{\alpha}} V_{\alpha}(k_{\alpha}) \exp \left\{ i \sum_{l \in \alpha} (k_l, \lambda_l) \right\}, \\ |\alpha| &= s \quad \text{для } \alpha = (i_1, \dots, i_s), \end{aligned}$$

причем каждое ядро $\tilde{V}_{\alpha}(\lambda_i - \mu_i)$ определено на соответствующем многообразии

$$\begin{aligned} S_{\alpha} &= \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_1, \dots, \mu_N) \in (\mathbf{T}^\nu)^N \times (\mathbf{T}^\nu)^N : \right. \\ &\quad \left. \sum_{i \in \alpha} \lambda_i = \sum_{i \in \alpha} \mu_i, \quad \lambda_i = \mu_i, \quad i \in \alpha' \right\}. \end{aligned}$$

Группа трансляций U_q перейдет после преобразования Фурье в группу $\tilde{U}_q$, действующую по формуле

$$(\tilde{U}_q f)(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = e^{i(q, \lambda_1 + \dots + \lambda_N)} f(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad f \in L_2((\mathbf{T}^\nu)^N).$$

Поскольку оператор $\tilde{H}$ коммутирует с группой $\tilde{U}_q$ (см. [9]), пространство $\mathcal{H} = L_2((\mathbf{T}^\nu)^N)$ разлагается в прямой интеграл

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbf{T}^\nu} \mathcal{H}(\Lambda) d\Lambda$$

пространств $\mathcal{H}(\Lambda)$, являющихся инвариантными относительно группы $\tilde{U}_q$. Здесь $\mathcal{H}(\Lambda) = L_2(\Gamma_\Lambda, d\omega_\Lambda)$, где Γ_Λ — многообразие в $(\mathbf{T}^\nu)^N$, определяемое так:

$$\Gamma_\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (\mathbf{T}^\nu)^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = \Lambda \right\}, \quad \Lambda \in \mathbf{T}^\nu,$$

а $d\omega_\Lambda$ — мера на Γ_Λ (мера Гельфанда–Лере) такая, что $d\omega_\Lambda d\Lambda = d\lambda_1 \dots d\lambda_N$ (см. [10]).

Соответственно и кластерный оператор $\tilde{H}$ разлагается в прямой интеграл

$$\tilde{H} = \int_{\mathbf{T}^\nu} \tilde{H}(\Lambda) d\Lambda$$

операторов $\tilde{H}(\Lambda)$, действующих каждый в $\mathcal{H}(\Lambda)$ по формуле

$$\begin{aligned} (\tilde{H}(\Lambda)f)(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \tilde{a}_\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_N)f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) + \\ &+ \sum_{\alpha} \epsilon \int_{\Gamma_{\Lambda, \lambda_\alpha}} \tilde{V}_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_\alpha - \mu_\alpha) f(\mu_1, \dots, \mu_N) d\omega_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}(\mu_1, \dots, \mu_N), \quad f \in \mathcal{H}(\Lambda). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_N) &= \tilde{a}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)|_{\Gamma_\Lambda}, \\ \Gamma_{\Lambda, \lambda_\alpha} &= \{(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \Gamma_\Lambda : \lambda_i = \mu_i, i \in \alpha\}, \end{aligned}$$

ядра удовлетворяют соотношению

$$\tilde{V}_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_\alpha - \mu_\alpha) = \tilde{V}_\alpha(\lambda_\alpha - \mu_\alpha) \Big|_{\substack{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Gamma_\Lambda \\ (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \Gamma_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}}}$$

и $d\omega_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}(\mu_1, \dots, \mu_N)$ — мера на $\Gamma_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}$ такая, что

$$d\omega_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}(\mu_1, \dots, \mu_N) \prod_{i \in \alpha'} d\mu_i = d\omega_\Lambda(\mu_1, \dots, \mu_N).$$

Оператор $\tilde{H}_0(\Lambda) = \tilde{H}(\epsilon = 0, \Lambda)$ имеет вид

$$(\tilde{H}_0(\Lambda)f)(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \tilde{a}_\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_N)f(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

Именно такие операторы мы и будем рассматривать в дальнейшем (для простоты опускаем тильду).

Мы будем предполагать, что функция $a_\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ аналитическая (точные формулировки см. ниже) и вещественная, а ядра $V_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)$ аналитические и симметричные в следующем смысле:

$$V_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_{i_1} - \mu_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s} - \mu_{i_s}) = \overline{V}_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_{\sigma(i_1)} - \mu_{\sigma(i_1)}, \dots, \lambda_{\sigma(i_s)} - \mu_{\sigma(i_s)})$$

для любой перестановки σ множества индексов $\alpha = (i_1, \dots, i_s)$.

В такой ситуации операторы $H(\Lambda)$ и $H_0(\Lambda)$ ограничены и самосопряжены.

Аналитичность функций a_Λ и $V_{\Lambda, \lambda_\alpha}$ вытекает из предположений (0.2) и (0.3) и точно означает следующее. Рассмотрим комплексное многообразие $\mathbf{D}^\nu = \mathbf{C}^\nu / \mathbf{Z}^\nu$ (которое является группой по сложению), где $\mathbf{Z}^\nu$ – группа сдвигов $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi q$, $q \in \mathbf{Z}^\nu$, $\lambda \in \mathbf{C}^\nu$.

Тогда

$$\tilde{\Gamma}_\Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (\mathbf{D}^\nu)^N, \lambda_1 + \dots + \lambda_N = \Lambda\}, \quad \Lambda \in \mathbf{D}^\nu.$$

Аналогично

$$\tilde{\Gamma}_{\Lambda, \lambda_\alpha} = \{(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \tilde{\Gamma}_\Lambda, \mu_i = \lambda_i, i \in \alpha\}, \quad \Lambda \in \mathbf{D}^\nu, \lambda_\alpha \in (\mathbf{D}^\nu)^{|\alpha|}.$$

Введем полосу в $\mathbf{D}^\nu$:

$$\mathbf{D}_\beta^\nu = \left\{ \lambda \in \mathbf{D}^\nu : \max_{1 \leq j \leq \nu} |\operatorname{Im} \lambda^{(j)}| < \beta \right\}.$$

Тогда функция $a(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ аналитична и ограничена в $(\mathbf{D}_\beta^\nu)^N \subset (\mathbf{D}^\nu)^N$ и функция a_Λ аналитична и ограничена в $\tilde{\Gamma}_\Lambda$. Точно так же ядра $V_{\Lambda, \lambda_\alpha}(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)$ аналитичны и ограничены в $\tilde{\Gamma}_\Lambda \times \tilde{\Gamma}_{\Lambda, \lambda_\alpha}$, соответственно.

Кроме того, мы будем считать, что сужения $a_{\Lambda, \lambda_\alpha}$ функции a_Λ на $\Gamma_{\Lambda, \lambda_\alpha}$ для всех $\Lambda, \lambda_\alpha \in \mathbf{T}^\nu$, имеют конечное число вещественных критических точек, и каждая из них либо вообще невырождена (т.е. второй дифференциал функции в критической точке невырожден), либо имеет *простую* особенность (и следовательно, показатель “особости” β каждой критической точки удовлетворяет неравенству $\beta < 1/2$) (терминологию и подробности см. в [10, 11]).

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть выполнены все предположения, сделанные выше относительно функций a_Λ и $V_{\Lambda, \lambda_\alpha}$, и $\nu \geq 3$. Тогда при достаточно малых ϵ и для любого $\Lambda \in \mathbf{T}^\nu$ операторы $H(\Lambda)$ и $H_0(\Lambda)$ унитарно эквивалентны.*

Как уже отмечалось выше, доказательство теоремы 1.1 основано на построении волновых операторов $W_\pm(\Lambda)$ и $W_\pm^*(\Lambda)$, соответствующих паре операторов $H(\Lambda)$ и $H_0(\Lambda)$ (см. [12]), существование которых утверждается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1.1. Тогда для любого ϵ и любого $\Lambda \in \mathbf{T}^\nu$ существуют сильные пределы*

$$W_\pm(\Lambda) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itH(\Lambda)) \exp(-itH_0(\Lambda)) \quad (1.2)$$

(прямые волновые операторы) и при достаточно малых ϵ и любого $\Lambda \in \mathbf{T}^\nu$ существуют сильные пределы

$$W_\pm^*(\Lambda) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(itH_0(\Lambda)) \exp(-itH(\Lambda)) \quad (1.3)$$

(обратные волновые операторы). Кроме того, операторы $W_\pm(\Lambda)$ и $W_\pm^*(\Lambda)$ унитарны, и потому

$$W_\pm(\Lambda)^{-1} = W_\pm^*(\Lambda).$$

Из теоремы 1.2 следует, что операторы $W_{\pm}(\Lambda)$ и $W_{\pm}^*(\Lambda)$ унитарно отображают пространство $\mathcal{H}(\Lambda)$ в себя, и при этом они осуществляют унитарную эквивалентность операторов $H(\Lambda)$ и $H_0(\Lambda)$:

$$H(\Lambda) = W_{\pm}(\Lambda)H_0(\Lambda)W_{\pm}^{-1}(\Lambda)$$

(см. [12]).

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Спектр оператора $H(\Lambda)$ при достаточно малых ϵ абсолютно непрерывен и заполняет отрезок $[A_1(\Lambda), A_2(\Lambda)]$, где*

$$A_1(\Lambda) = \min_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Gamma_{\Lambda}} a_{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad A_2(\Lambda) = \max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Gamma_{\Lambda}} a_{\Lambda}(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТЫ $\exp(-itH)$

Доказательство существования как прямых, так и обратных волновых операторов основано на методе Кука [12]. Вводя обозначение

$$W_t = e^{itH(\Lambda)}e^{-itH_0(\Lambda)}$$

и замечая, что для любой функции $f \in \mathcal{H}(\Lambda)$

$$\frac{dW_t f}{dt} = ie^{itH(\Lambda)}Ve^{-itH_0(\Lambda)}f,$$

где $V = H(\Lambda) - H_0(\Lambda)$, имеем

$$\left\| \frac{dW_t f}{dt} \right\|_{\mathcal{H}(\Lambda)} = \|Ve^{-itH_0(\Lambda)}f\|_{\mathcal{H}(\Lambda)}.$$

В силу равномерной ограниченности (унитарности) семейства операторов W_t ($\|W_t\| = 1$) нам достаточно показать, что

$$\int_{\mathbf{R}} \|Ve^{-itH_0(\Lambda)}f\| dt < \infty \quad (2.1)$$

для всех f из некоторого множества $\mathcal{D}(\Lambda)$, плотного в $\mathcal{H}(\Lambda)$.

Выбор множества $\mathcal{D}(\Lambda)$, а также вывод неравенства (2.1), основанный на оценке осциллирующих интегралов, по существу, проводится в приводимом ниже доказательстве существования обратных волновых операторов. Поэтому мы опускаем пока эти рассуждения и переходим к доказательству существования операторов $W_{\pm}^*(\Lambda)$.

Так же как и в случае прямых волновых операторов, для доказательства существования сильных пределов (1.3) достаточно показать, что

$$\int_{\mathbf{R}} \|Ve^{-itH(\Lambda)}f\| dt < \infty \quad (2.2)$$

для всех f из некоторого множества $\mathcal{D}(\Lambda)$, плотного в $\mathcal{H}(\Lambda)$.

Для этого представим экспоненту $\exp(-itH(\Lambda))f$, $f \in \mathcal{H}(\Lambda)$, в виде

$$(e^{-itH(\Lambda)}f)(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = (e^{-itH_0(\Lambda)}f)(\lambda_1, \dots, \lambda_N) + g(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t, f). \quad (2.3)$$

Здесь $g(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t, f) \in \mathcal{H}(\Lambda)$ – некоторая функция переменных $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Gamma_\Lambda$, $t \in \mathbf{R}$, линейно зависящая от f , к выводу уравнения для которой мы и переходим. Заметим сначала, что если обозначить $U_t = e^{-itH(\Lambda)}$, то справедливо следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dU_t f}{dt} = -iH(\Lambda)U_t f$$

с начальным условием $U_t|_{t=0} = E$ (E – тождественный оператор в $\mathcal{H}(\Lambda)$). Отсюда после дифференцирования по t получаем уравнение для g :

$$i \frac{\partial g}{\partial t} = H(\Lambda)g + V e^{-itH_0(\Lambda)}f$$

с начальным условием $g(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t)|_{t=0} = 0$. Используя принятое выше обозначение $H(\Lambda) = H_0(\Lambda) + V$, имеем

$$i \frac{\partial g}{\partial t} = H_0(\Lambda)g + (Vg + V e^{-itH_0(\Lambda)}f), \quad g|_{t=0} = 0.$$

Теперь перепишем последнее уравнение в эквивалентной интегральной форме:

$$g(t) = -i \int_0^t e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}(Vg + V e^{-isH_0(\Lambda)}f) ds,$$

или

$$g(t) + i \int_0^t e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}(Vg)(s) ds = -i \int_0^t e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}V e^{-isH_0(\Lambda)}f ds.$$

Здесь $g(t) \equiv g(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t, f)$. Наконец, сделаем последний шаг. Поскольку на самом деле нам нужны свойства именно оператора $V e^{-itH(\Lambda)}$, а не оператора $e^{-itH(\Lambda)}$, то мы применим слева к обоим частям последнего уравнения оператор V и получим уравнение для функции $G(t) \equiv (Vg)(t)$, $G(t) \equiv G(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t, f)$:

$$G(t) + i \int_0^t V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}G(s) ds = F(t), \quad (2.4)$$

где

$$F(t) = -i \int_0^t V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}V e^{-isH_0(\Lambda)}f ds.$$

Именно это уравнение мы и будем рассматривать в дальнейшем. Мы докажем существование его решения (при малых ϵ) в некотором классе функций и получим такую оценку для этого решения, которая позволит затем доказать существование обратных волновых операторов $W_\pm^*$.

Введем класс $\mathcal{A}(\Lambda)$ функций $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, аналитичных и ограниченных в $\tilde{\Gamma}_\Lambda$. Относительно нормы

$$\|\Psi(\cdot)\| \equiv \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \tilde{\Gamma}_\Lambda} |\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N)|$$

этот класс является банаховым пространством.

ЛЕММА 2.1. Семейство операторов $V_t \equiv V e^{-itH_0(\Lambda)}$ оставляет пространство $\mathcal{A}(\Lambda)$ инвариантным, и для его нормы справедлива оценка

$$\|V e^{-itH_0(\Lambda)}\|_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}} \leq \epsilon \frac{\text{const}}{|t|^p + 1}, \quad (2.5)$$

где $p = \nu/2$ в случае, когда все критические точки функции a_Λ невырождены, и $p = \frac{\nu}{2} - \beta$, когда функция a_Λ и ее сужения $a_{\Lambda, \lambda_\alpha}$ имеют особенности с показателем особости β (см. раздел 1). (При условиях $\nu \geq 3$ и $\beta < 1/2$ имеем $p > 1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор V_t выпишем в явном виде:

$$\begin{aligned} V_t f \equiv V e^{-itH_0(\Lambda)} &= \epsilon \sum_{\alpha} \int_{\Gamma_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}} V_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}(\lambda_{\alpha} - \mu_{\alpha}) f(\mu_1, \dots, \mu_N) \times \\ &\times e^{-ita_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}(\mu_1, \dots, \mu_N)} d\omega_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}(\mu_1, \dots, \mu_N). \end{aligned}$$

Каждый из этих интегралов есть осциллирующий интеграл, оценка которого получается методом стационарной фазы [11, 13]. Более точно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.2. Пусть

$$\Phi_{\alpha} = \int_{\Gamma_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}} \phi_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \mu_1, \dots, \mu_N) e^{-ita_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}(\mu_1, \dots, \mu_N)} d\omega_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}(\mu_1, \dots, \mu_N),$$

где функция $\phi_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}$ аналитична и ограничена в $\tilde{\Gamma}_\Lambda \times \tilde{\Gamma}_{\Lambda, \lambda_{\alpha'}}$, а функция $a_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}$ удовлетворяет условиям, перечисленным в разделе 1. Тогда существует константа $c > 0$ такая, что

$$|\Phi_{\alpha}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)| < \frac{c}{|t|^p + 1} \quad \text{для всех} \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \tilde{\Gamma}_\Lambda.$$

Доказательство этой леммы см. в [13], более подробное доказательство (для случая, когда каждая критическая точка функции $a_{\Lambda, \lambda_{\alpha}}$ невырождена) см. в [5].

Из этой леммы следует, что для любой функции $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{A}(\Lambda)$ справедлива оценка

$$|(V e^{-itH_0(\Lambda)} \Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N))| < \frac{c}{|t|^p + 1}.$$

Тогда для семейства операторов $B_t = (|t|^p + 1) V e^{-itH_0(\Lambda)}$, действующих в $\mathcal{A}(\Lambda)$ выполнены неравенства: для каждой $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{A}(\Lambda)$ существует константа $c_{\Psi} > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\|B_t \Psi\| \leq \epsilon c_{\Psi}.$$

Из принципа равномерной ограниченности тогда следует, что

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|B_t\|_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}} < \infty,$$

что равносильно неравенству (2.5). Лемма 2.1 доказана.

Обратимся теперь к уравнению (2.4). Пусть $\mathcal{B}(\Lambda)$ – пространство $\mathcal{A}(\Lambda)$ -значных функций от переменной $t \in \mathbf{R}$:

$$G: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{A}(\Lambda), \quad G \equiv G(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t),$$

с нормой

$$\begin{aligned} \|G\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{t \in \mathbf{R}} (|t|^p + 1) \|G(\cdot, t)\|_{\mathcal{A}} = \\ &= \sup_{t \in \mathbf{R}} (|t|^p + 1) \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \tilde{\Gamma}_\Lambda} |G(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t)| < \infty, \end{aligned}$$

относительно которой $\mathcal{B}(\Lambda)$ превращается в банахово пространство, и пусть $K: \mathcal{B}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{B}(\Lambda)$ – оператор в $\mathcal{B}(\Lambda)$, определяемый равенством

$$(KG)(t) = i \int_0^t V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)} G(s) ds. \quad (2.6)$$

Следующая лемма устанавливает, что формула (2.6) действительно определяет оператор в $\mathcal{B}(\Lambda)$ и притом ограниченный.

ЛЕММА 2.3. *Для каждой функции $G \in \mathcal{B}(\Lambda)$ функция $KG \in \mathcal{B}(\Lambda)$, и при этом существует такая константа C , что*

$$\|KG\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon C \|G\|_{\mathcal{B}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.1 справедливы следующие оценки для любых $t \in \mathbf{R}$ и $s < t$:

$$\|V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)} G(s)\|_{\mathcal{A}} \leq \|V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}\|_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}} \|G\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon \frac{\text{const}}{(|t-s|^p + 1)} \frac{\|G\|_{\mathcal{A}}}{(|s|^p + 1)}.$$

Следовательно,

$$\left\| \int_0^t V e^{-i(t-s)H_0(\Lambda)} G(s) ds \right\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon \frac{\text{const}}{(|t-s|^p + 1)} \frac{\|G\|_{\mathcal{A}}}{(|s|^p + 1)} \leq \epsilon \|G\|_{\mathcal{A}} \frac{C}{|t|^p + 1}, \quad (2.7)$$

так как

$$\int_0^t \frac{ds}{(|t-s|^p + 1)(|s|^p + 1)} \leq \frac{\text{const}}{|t|^p + 1}.$$

Последнее неравенство в (2.7) доказывает лемму 2.3.

ЛЕММА 2.4. Пусть $f \in \mathcal{A}(\Lambda)$. Тогда свободный член уравнения (2.4) лежит в $\mathcal{B}(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опять в силу леммы 2.1 справедливы неравенства для $t \in \mathbf{R}$ и $s < t$:

$$\|Ve^{-itH_0(\Lambda)}f\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon \frac{\text{const}}{|s|^p + 1}$$

и

$$\|Ve^{-i(t-s)H_0(\Lambda)}(Ve^{-isH_0(\Lambda)}f)\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon^2 \frac{\text{const}}{(|t-s|^p + 1)(|s|^p + 1)}.$$

Поэтому

$$\|F(t)\|_{\mathcal{A}} \leq \epsilon^2 \text{const} \int_0^t \frac{ds}{(|t-s|^p + 1)(|s|^p + 1)} \leq \epsilon^2 \frac{\text{const}}{|t|^p + 1}.$$

Это означает, что

$$\|F\|_{\mathcal{B}} = \sup_{t \in \mathbf{R}} (|t|^p + 1) \|F(t)\|_{\mathcal{A}} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.5. Пусть $f \in \mathcal{A}(\Lambda)$. Тогда при достаточно малых ϵ уравнение (2.4) разрешимо в пространстве функций $\mathcal{B}(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначении (2.6) уравнение имеет вид $(E + K)G = F$, где E — единичный оператор в $\mathcal{B}(\Lambda)$, с нормой $\|K\| < \epsilon C$, а $F \in \mathcal{B}(\Lambda)$ (леммы 2.3 и 2.4). Следовательно, при малых ϵ норма $\|K\| < 1$, и оператор $E + K$ обратим в $\mathcal{B}(\Lambda)$, откуда $G = (E + K)^{-1}F \in \mathcal{B}(\Lambda)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $f \in \mathcal{A}(\Lambda)$ и ϵ достаточно мало. Тогда

$$\|Ve^{-itH(\Lambda)}f\|_{\mathcal{H}(\Lambda)} \leq \frac{\text{const}}{|t|^p + 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оператор V слева к равенству (2.3), имеем

$$Ve^{-itH(\Lambda)}f = Ve^{-itH_0(\Lambda)}f + G(t),$$

где $G(t) = (Vg)(t) \in \mathcal{B}(\Lambda)$ (лемма 2.5). Следовательно, снова пользуясь леммой 2.1, получим

$$\|Ve^{-itH(\Lambda)}f\|_{\mathcal{H}(\Lambda)} \leq \text{const} \{ \|Ve^{-itH_0(\Lambda)}f\|_{\mathcal{A}} + \|G(\cdot, t)\|_{\mathcal{A}} \} \leq \frac{\text{const}}{|t|^p + 1},$$

что и требовалось доказать.

Выбирая в качестве множества $\mathcal{D}(\Lambda)$ множество $\mathcal{A}(\Lambda)$: $\mathcal{D}(\Lambda) \equiv \mathcal{A}(\Lambda)$, плотное в $\mathcal{H}(\Lambda)$, из следствия 2.6 и оценки (2.2) при $\nu \geq 3$ получаем существование обратных волновых операторов $W_{\pm}^*(\Lambda)$.

Из существования как прямых, так и обратных волновых операторов $W_{\pm}(\Lambda)$ и $W_{\pm}^*(\Lambda)$ вытекает их асимптотическая полнота, т.е. равенство

$$\text{Ran } W_{\pm}(\Lambda) = \mathcal{H}(\Lambda)$$

(см. [12]), которое вместе с очевидной изометричностью операторов $W_{\pm}(\Lambda)$ и $W_{\pm}^*(\Lambda)$ влечет их унитарность:

$$W_{\pm}^*(\Lambda) = W_{\pm}^{-1}(\Lambda),$$

что полностью доказывает теорему 1.2.

Автор выражает глубокую благодарность Р.А. Минлосу за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант MGJ300) и Международной соросовской программы образования в области точных наук (грант а876-м).

Список литературы

- [1] *Малышев В.А., Минлос Р.А.* Линейные операторы в бесконечночастичных системах. М.: Наука, 1994.
- [2] *Mogilner A.I.* Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results // Adv. Soviet. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
- [3] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [4] *Melnikov A.M., Mogilner A.I.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. V. 24. P. 3671–3676.
- [5] *Жуков Ю.В.* Теорема Йорио–О’Кэррола для общих решетчатых гамильтонианов // Труды сем. им. И. Г. Петровского. В. 20.
- [6] *Фаддеев Л.Д.* Математические вопросы теории рассеяния для системы трех частиц // Тр. МИАН. 1963. В. 69.
- [7] *Minlos R.A., Spohn H.* Twice-body problem in radiative decay // Adv. Soviet. Math. (in print).
- [8] *Minlos R.A., Mogilner A.I.* // Math. Problems of Statistical Mechanics and Dynamics / Ред. R.L. Dobrushin. Dordrecht, 1986. С. 139–160.
- [9] *Наймарк М.А., Фомиш С.В.* // УМН. 1955. Т. 10. В. 2. С. 111–142.
- [10] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотика интегралов. М.: Наука, 1984.
- [11] *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
- [12] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
- [13] *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
12.X.1995 г.

Yu. V. Zhukov

THE IORIO–O’CARROLL THEOREM FOR N -PARTICLE LATTICE HAMILTONIAN

The unitary equivalence of the full and free Hamiltonians for a N -particle quantum lattice system with the small coupling constant is proved. This result is obtained by means of the mathematical scattering theory: we prove the existence and asymptotic completeness of the wave operators. Here we construct a special representation for the exponent of the Hamiltonian.