Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Хоружий, К строгой формулировке $2D$ -конформной модели в пространстве Фока–Крейна: построение глобальной $Op J^*$ -алгебры полей и токов, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 60–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:23:05

© 2004 г.

С. С. Хоружий*

К СТРОГОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ 2D-КОНФОРМНОЙ МОДЕЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА–КРЕЙНА: ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ Ор J^* -АЛГЕБРЫ ПОЛЕЙ И ТОКОВ

Формализм модели 2D-безмассового скалярного поля в индефинитном пространстве типа Фока–Крейна используется как база для построения строгой формулировки 2D-квантовых конформных теорий. Показано, что искомое построение является многоэтапной процедурой, центральным блоком которой служит конструкция нового типа представлений алгебры Вирасоро. Прделан исходный этап этой процедуры, который заключается в построении специальной глобальной алгебры полей и токов, порождаемой экспоненциальными образующими. Получена система перестановочных соотношений для виковых квадратов тока, используемых для определения генераторов Вирасоро. Доказано существование виковых экспонент тока как операторозначных обобщенных функций, и искомая глобальная алгебра строго определена как алгебра токовых и полевых, виковых и обычных экспонент на общей плотной инвариантной области пространства Фока–Крейна.

Ключевые слова: пространство Фока–Крейна, конформная теория, полевая алгебра.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одна из особенностей современного аппарата 2D-конформных моделей – обширный спектр применяемых математических подходов и методов. Легко заметить, однако, что в отношении общих принципов и целевых установок исследований разнообразие совсем не так уж значительно. Явное большинство работ концентрирует внимание на групповой и алгебраической структуре конформных систем и ставит целью развитие удобного, неусложненного формализма, ведущего кратчайшим путем к возможности практического расчета физических процессов и эффектов, оценок физических характеристик и т.п. Наряду с этим привлекают немалый интерес задачи углубления и обобщения формализма для более широких классов систем, систем с различными особенностями структуры,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: horuzhy@mi.ras.ru

таких как, например, системы с конформной инвариантностью на римановых поверхностях произвольного рода g . Оба эти направления, которые можно назвать господствующими, сумели достичь крупных и несомненных успехов – достаточно назвать для первого направления подход Белавина–Полякова–Замолодчикова [1], а для второго – результаты Мура и Зайберга [2]. Однако определенный круг проблем, свойств и особенностей поведения изучаемых систем остается за рамками этих направлений. В первую очередь, это относится к функционально-аналитическому уровню структуры теории, который включает проблемы строгого определения математических объектов, связанных с квантованными полями, – сингулярных обобщенных функций, неограниченных операторов и операторных алгебр. Теория, которая уходит от решения этих проблем, имеет перед собой два пути: один из них – рассмотрение “на физическом уровне строгости”, где допускаются нестрогие, оставляемые без конкретного определения операции и объекты, вводятся обрезания и т.п.; другой – переход к какому-либо суженному формализму, в котором нестрогие определенные объекты не фигурируют. В конформной теории находят место оба эти пути. Преобладающим служит первый: именно он реализуется в подходе Белавина–Полякова–Замолодчикова, который сразу же после своего появления в 1984 г. стал ведущим и наиболее распространенным. Что касается второго пути, то в квантовой теории поля применялись два основных вида суженных формализмов, избегающих непосредственного использования операторов поля: S -матричные формализмы и токовые формализмы (причем последние устраняют лишь часть трудностей, поскольку токи являются неограниченными операторами и, вообще говоря, могут также иметь сингулярности). В конформной теории токи свободны от ИК-сингулярностей, и подход алгебр токов получил значительное распространение (см., например, [3]).

Однако оба пути, как путь нестрогих методов, так и путь “теории без поля”, не являются до конца удовлетворительными. Нам нет необходимости заново развивать аргументы в защиту этого: достаточно напомнить дискуссии, которые проходили в квантовой теории поля еще в 60-е годы, когда строилась аксиоматическая теория и обсуждалось соотношение между полевым и S -матричным подходами. Хотя довод о том, что все доступное наблюдению содержание релятивистской квантовой теории исчерпывается набором вероятностей перехода, заведомо неопровержим, весь опыт теории столь же неопровержимо показывает, что нельзя достичь хоть сколько-нибудь полного понимания структуры и динамики квантово-полевой системы, не прибегая к использованию квантованных полей и не развивая общих и строгих методов типа аксиоматической и конструктивной теории. В случае двумерной конформной теории базовым структурным блоком служит теория 2D-безмассового свободного скалярного поля $\varphi(\xi)$ на окружности. Данное поле имеет ИК-особенности, и существует целый ряд свойств теории, конкретное описание которых требует строгого учета этих особенностей. Понятно, каковы эти свойства: ИК-сингулярности связаны с эффектами дальнего действия – ИК-зарядами, асимптотиками и корреляциями на дальних расстояниях и т.п. К этим хорошо известным эффектам можно добавить и свойство скрытой БРСТ-симметрии [4], [5]: ИК-сингулярности ведут к полному пространству состояний H с индефинитной метрикой и характерной структурой физического пространства $H_{\text{ph}} = H'/H''$ (H' –

“предфизическое” неотрицательное подпространство H , H'' – максимальное положительное подпространство H'), которое допускает введение БРСТ-заряда Q такого, что $H' = \ker Q$, $H'' = \operatorname{ran} Q$, и поэтому физические состояния совпадают с БРСТ-инвариантными состояниями, хотя в формализме не вводится духовых и шпуронных степеней свободы, и явная БРСТ-симметрия, таким образом, отсутствует.

Из сказанного следует, что по соображениям математической строгости и полноты физического описания для конформной теории наряду с уже существующими подходами желательно также построение строгого формализма, который в основе имел бы корректно определенные полевые операторы, не включал обрезаний и удовлетворял общим требованиям аксиоматической и конструктивной теории. С учетом последнего замечания желательно также и то, чтобы данный формализм включал объекты, описывающие (скрытую) БРСТ-симметрию конформной системы, давая тем самым возможность использования известных преимуществ БРСТ-подхода (простых компактных формул для физических состояний и наблюдаемых и др.). В силу ИК-сингулярностей полевых объектов искомый формализм, согласно общим теоремам Строкки, должен использовать пространство состояний с индефинитной метрикой.

Какие основные проблемы необходимо решить для построения формализма с указанными свойствами? Главным специфическим отличием структуры конформной теории служит свойство симметрии относительно алгебры Вирасоро $\mathcal{L}_c$, которая является одномерным центральным расширением алгебры Ли полиномиальных векторных полей на окружности и определяется скобкой

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c(n^3 - n)}{12}\delta_{n+m,0}. \quad (1)$$

Поэтому первая задача заключается в том, чтобы в пространстве состояний исходного базового поля $\varphi(\xi)$ ввести представление алгебры Вирасоро (которое, очевидно, должно быть представлением $\mathcal{L}_c$ неограниченными операторами в пространстве с индефинитной метрикой) и установить ковариантность системы относительно этого представления. Далее, главными физическими величинами квантовой конформной теории являются полевые объекты $V_\alpha(z)$, называемые вершинными операторами; они представляют собой некоторые экспоненциальные формы исходных полей $\varphi(\xi)$ на окружности, обладающие также определенными свойствами ковариантности относительно представления $\mathcal{L}_c$. Именно вершинные операторы лежат в основе динамического аппарата конформных моделей, на базе которого развиваются разнообразные применения этих моделей. Тем самым вторая задача заключается в построении корректно определенных вершинных операторов в индефинитном пространстве состояний.

Решение этих задач представляет, однако, большую трудность. Введение корректно определенных операторов представления $\mathcal{L}_c$ в пространстве Фока–Крейна $2D$ -безмассового скалярного поля $\varphi(\xi)$ оказывается сложной, многоэтапной проблемой. В теории представлений алгебры Вирасоро модули подобного типа были до сих пор неизвестны. В наиболее распространенных физических подходах генераторы L_n алгебры Вирасоро определяются посредством разложения Фурье–Лорана для тензора натяжений $T(z)$

теории конформного поля на окружности S^1 (или, точнее, на торе $S^1 \times S^1$):

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}}. \quad (2)$$

Существует также другой способ определения L_n в рамках формализма кулоновского газа, тесно связанного с конформной теорией. В основе этого формализма лежит алгебра Гейзенберга, вводимая скобкой

$$[a_n, a_m] = 2n\delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

и генераторы Вирасоро определяются через операторное семейство $\{a_n\}$ с помощью рядов

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}a_k - \alpha_0(n+1)a_n, \quad n \neq 0, \\ L_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}a_k + \frac{1}{4}a_0^2 - \alpha_0 a_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Оба определения успешно используются в физических задачах, обеспечивая нужный комплекс групповых свойств конформной теории; в частности, они позволяют построить и вершинные операторы $V_\alpha(z)$ с требуемыми свойствами ковариантности. Однако все вопросы об областях определения объектов L_n и о самом их существовании в каком-либо корректном смысле остаются в стороне, вследствие чего их использование имеет лишь характер формальных манипуляций, и сфера его весьма ограничена. При этом решить указанные вопросы лобовым путем, исходя из формул типа (2), (4) и пытаясь придать им строгий смысл, заведомо невозможно, ибо для установления сходимости операторных рядов в этих формулах нет ни достаточных сведений, ни адекватных средств. Для решения оказывается необходима многоэтапная процедура, при проведении которой формулы (2), (4), как и другие соотношения, используемые в физических подходах, играют лишь роль ориентиров, источников наводящих соображений. Суть процедуры в том, что корректная определенность первоначально устанавливается для некоторого специально построенного операторного семейства, у которого структура скобок включает скобку Вирасоро (для центрального заряда $c = 1$), но также и определенные “лишние” слагаемые. На следующих этапах семейство модифицируется так, что эти слагаемые исчезают. При этом весь процесс построения исходного хорошо определенного семейства, имеющего неправильную структуру скобок, но допускающего поэтапное приведение этой структуры к искомому вирасоровскому виду, представляет собой процедуру введения и последующего снятия некоторой специально подобранной регуляризации, или же своеобразный вариант перенормировки.

Из опыта строгих методов квантовой теории поля хорошо известно, что критическую роль при построении строгой формулировки квантово-полевой модели играет оптимальный выбор общей плотной области определения для всех операторных объектов теории (аналога области Гординга–Вайтмана в аксиоматическом подходе). От свойств

этой области в сильной степени зависит успех построения: она должна быть достаточно широкой, универсальной, удовлетворяющей ряду условий инвариантности и т.д. Построение такой области и является той задачей, которую мы решаем в настоящей работе; оно служит необходимой базой для всех дальнейших этапов. Как обычно, область ищется в виде пространства, порождаемого действием на вакуум квантово-полевого пространства состояний некоторой глобальной алгебры, так что задача непосредственно состоит в построении данной алгебры. Особенность, которую должно учитывать это построение, состоит в том, что полевыми объектами конформной теории являются не исходные поля $\varphi(\xi)$, но вершинные операторы $V_\alpha(z)$, строящиеся из экспоненциаций $\varphi(\xi)$. Помимо того, как мы видели, важным рабочим объектом здесь служит и тензор натяжений $T(z)$, который, согласно нестрогим формулам, аналогичным (2) (см. [1], [3], [4]), связан с нормально упорядоченным квадратом тока $j(f) = (\partial\varphi)(f)$:

$$T(z) = \frac{1}{2} :j^2:(z) + i\alpha_0 \partial^2 \varphi(z).$$

Виков квадрат тока $:j^2:(f)$ также может быть определен через экспоненциальные формы: если форма $:e^{zj}:(f)$ корректно определена как операторнозначная обобщенная функция, то

$$:j^2:(f) = \frac{d^2}{dz^2} :e^{zj}:(f) \Big|_{z=0}. \quad (5)$$

Эти наводящие соображения показывают, что оптимальным выбором глобальной алгебры для $2D$ -конформной модели должна быть алгебра $\mathcal{F}_{\text{exр}}$, порождаемая двойной системой экспоненциальных образующих – экспонентами полей φ и токов j . Ниже мы построим алгебру $\mathcal{F}_{\text{exр}}$ и соответствующую плотную область $\mathcal{D}_{\text{exр}} = \mathcal{F}_{\text{exр}}\Omega$ в индефинитном пространстве состояний поля φ (Ω – фоковский вакуум в этом пространстве). Основная часть построения – доказательство существования виковых экспонент поля φ и тока j как операторнозначных обобщенных функций в индефинитном пространстве.

2. БАЗОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ПРОСТРАНСТВЕ ФОКА–КРЕЙНА И СИСТЕМА ТОКОВЫХ КОММУТАТОРОВ

Исходный аппарат для нашего построения – строгая формулировка теории $2D$ -свободного безмассового скалярного поля в индефинитном пространстве состояний (см. [5], [6]; будем также использовать результаты данной нами строгой формулировки модели Швингера [7]). Поле φ определяется как решение $2D$ -свободного волнового уравнения, удовлетворяющее каноническим перестановочным соотношениям. В стандартном разложении такого решения на правую и левую компоненты достаточно рассматривать какую-либо одну из компонент, которую обозначим $\varphi(\xi)$. Основные особенности модели, порождаемые отсутствием массы поля, заключаются в несовместимости лоренц-инвариантности и спектральности с положительностью метрики пространства состояний, а также в том, что группа трансляций реализуется неограниченными операторами. Со-

гласно теореме реконструкции структура пространства состояний определяется (неположительной) двухточечной функцией Вайтмана

$$W(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ip\xi} \widetilde{W}(p), \quad \widetilde{W}(p) = \left(\frac{1}{p}\right)_+ \equiv \frac{d}{dp} [\theta(p) \ln |p|].$$

Как показано в работах [5], [6], пространство, порождаемое этой функцией, имеет структуру пространства Фока–Крейна, а именно фоковского пространства над одночастичным пространством $\mathcal{H}_1$, принадлежащим классу пространств Понтрягина типа Π_1 . Пространство $\mathcal{H}_1$ строится как замыкание пространства основных функций $S(\mathbb{R}^1)$ по гильбертовой норме $\|\cdot\|_1$, которая сопоставляется индефинитной форме $\langle \cdot, \cdot \rangle$, порождаемой $W(\xi)$, стандартным путем, с помощью выбора единичного нейтрального вектора χ :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= \int dx dy W(x-y) \bar{f}(x) g(y) = 2\pi \int dp \widetilde{W}(p) \bar{\tilde{f}}(p) \tilde{g}(p), \\ (f, g)_1 &= \langle f^0, g^0 \rangle_1 + \langle f, \chi \rangle_1 \langle \chi, g \rangle_1 + \bar{\tilde{f}}(0) \tilde{g}(0) \quad \forall f, g \in S(\mathbb{R}^1), \\ \tilde{f}^0(p) &\equiv \tilde{f}(p) - \tilde{f}(0) \chi(p) \in S_0(\mathbb{R}^1) = \{h \in S(\mathbb{R}^1) \mid h(0) = 0\}, \\ \chi &\in S(\mathbb{R}^1), \quad \chi(0) = 1, \quad \langle \chi, \chi \rangle_1 = 0. \end{aligned}$$

Введем помимо χ другой нейтральный вектор v такой, что по определению

$$(v, f)_1 = \langle \chi, f \rangle_1 \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^1).$$

Тогда для векторов $v_{\pm} = (\chi \pm v)/\sqrt{2}$ имеем

$$\langle v_{\pm}, v_{\pm} \rangle_1 = \pm 1, \quad (v_{\pm}, v_{\pm})_1 = 1, \quad (v_{\pm}, v_{\mp})_1 = 0,$$

и $\mathcal{H}_1$ принимает канонический вид с явно выделенной отрицательной частью:

$$\mathcal{H}_1 = \Pi_1(\mathbb{R}_+) = L^2\left(\mathbb{R}_+, \frac{d_1 p}{p}\right) \oplus \{v\} \oplus \{\chi\} = L^2\left(\mathbb{R}_+, \frac{d_1 p}{p}\right) \oplus \{v_+\} \oplus \{v_-\},$$

где

$$\frac{d_1 p}{p} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{dp}{p}.$$

Для ядра $G(x, y)$ гильбертовой метрики, вводимого следующим определением:

$$(f, g)_1 = \int dx dy G(x, y) \bar{f}(x) g(y) = 2\pi \int dp dq \tilde{G}(p, q) \bar{\tilde{f}}(p) \tilde{g}(q), \quad (6)$$

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p, q) &= \frac{1}{2\pi} \int dx dy e^{-ipx+iqy} G(x, y) = \\ &= \widetilde{W}(p) \delta(p-q) + [\widetilde{W}(p) \chi(p) - \delta(p)] [\widetilde{W}(q) \chi(q) - \delta(q)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Над $\mathcal{H}_1$ определяем несимметризованное и симметризованное фоковские пространства (пространства Фока–Крейна) $F(\mathcal{H}_1)$, $F_S(\mathcal{H}_1)$ с фоковским вакуумом $\Psi^{(0)} \equiv \Omega$, тотальным множеством факторизованных векторов $\Psi^{(n)} = \Psi^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \Psi_1 \otimes \dots \otimes \Psi_n$; $\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \mathcal{H}_1$, и плотной областью D_{fin} , состоящей из всех конечных фоковских столбцов.

Как указывалось выше, основной рабочий объект для построения конформной модели – виков квадрат тока $:j^2:(f)$, где $j(f) = (\partial\varphi)(f) = \varphi(-\partial f)$, $f \in S(\mathbb{R}^1)$. Опишем действие j и $:j^2:$ в $F_S(\mathcal{H}_1)$. Разлагая поле φ на операторы рождения и уничтожения:

$$\varphi(f) = \varphi^+(Ef) + \varphi^-(E\bar{f}), \quad E: S(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad Ef = \tilde{f}(-p)|_{p \geq 0}, \quad (8)$$

имеем для любых $\Psi \in D_{\text{fin}}$, $\Phi = \Phi(p) \in \mathcal{H}_1$

$$\begin{aligned} (\varphi^+(\Phi)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \text{Sym } \Phi(p_1)\Psi^{(n-1)}(p_2, \dots, p_n)\sqrt{n+1}, \\ (\varphi^-(\Phi)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \sqrt{n} \int dp \widetilde{W}(p)\bar{\Phi}(p)\Psi^{(n+1)}(p, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (8a)$$

Отсюда для аналогичного разложения тока

$$j(f) \equiv j_+(f) + j_-(f) = -\varphi^+(E(\partial f)) - \varphi^-(E(\partial f)) \quad (9)$$

имеем для любых $\Psi \in D_{\text{fin}}$, $f \in S(\mathbb{R}^1)$

$$\begin{aligned} (j_+(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= -\frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n p_i \tilde{f}(-p_i) \Psi^{(n-1)}(p_1, \dots, \overset{\vee}{p}_i, \dots, p_n), \\ (j_-(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= i\sqrt{n+1} \int dp \theta(p) \tilde{f}(p) \Psi^{(n+1)}(p, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (10)$$

На вакууме $j(f)\Omega = -ip\tilde{f}(-p)$, откуда $j(f)$ представляется полем с двухточечной функцией $W^{(j)}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \langle j(f)\Omega, j(g)\Omega \rangle &= \int dx dy \bar{f}(x)g(y)W^{(j)}(x-y), \\ W^{(j)}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp p e^{-ip\xi} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\xi - i0)^2}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – индефинитная форма в $F(\mathcal{H}_1)$, в данном случае совпадающая с $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Отсюда получаем для викова квадрата тока ($\Psi \in D_{\text{fin}}$)

$$:j^2:(f) = (j_+j_+)(f) + (j_-j_-)(f) + 2(j_+j_-)(f), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} ((j_+j_+)(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{n(n-1)}} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n p_i p_k \tilde{f}(-p_i - p_k) \Psi^{(n-2)}(p_1, \dots, \overset{\vee}{p}_i, \dots, \overset{\vee}{p}_k, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} ((j_- j_-)(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\ &= -\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2\pi} \int dp dq \theta(p)\theta(q) \tilde{f}(p+q) \Psi^{(n+2)}(p, q, p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} ((j_+ j_-)(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n p_i \int dp \theta(p) \tilde{f}(p-p_i) \Psi^{(n)}(p, p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (12в)$$

При построении конформной теории вигов квадрат тока выступает как самостоятельный полевой объект, и нам требуется вычислить его двухточечную функцию. Имеем

$$\begin{aligned} :j^2:(f)\Omega &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} pq \tilde{f}(-p-q), \\ \langle :j^2:(f)\Omega, :j^2:(g)\Omega \rangle &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int dp dq \left(\frac{1}{p}\right)_+ \left(\frac{1}{q}\right)_+ p^2 q^2 \tilde{f}(-p-q) \tilde{g}(-p-q) = \\ &= \int dx dy \bar{f}(x) g(y) W^{(j^2)}(x-y), \\ W^{(j^2)}(\xi) &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int dp dq pq \theta(p)\theta(q) e^{-i(p+q)\xi} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{(\xi-i0)^4}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. На общей плотной области D_{fin} всех токов и полей в $F_S(\mathcal{H}_1)$ и для всех $f, g \in S(\mathbb{R}^1)$ имеет место следующая система коммутационных соотношений:

$$[j(f), j(g)] = \frac{1}{2\pi i} \int dt f'(t) g(t) = \int dp p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p), \quad (13a)$$

$$[:j^2:(f), j(g)] = -\frac{1}{\pi i} j(fg'), \quad (13б)$$

$$[:j^2:(f), :j^2:(g)] = \frac{i}{48\pi^3} \int dt (f'''(t)g(t) - f(t)g'''(t)) - \frac{1}{\pi i} :j^2:(f'g - fg'). \quad (13в)$$

Последний коммутатор допускает также ряд других представлений со структурой коцикла, в частности

$$[:j^2:(f), :j^2:(g)] = -\frac{i}{48\pi^3} \int dt (f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)) - \frac{1}{\pi i} :j^2:(f'g - fg'). \quad (13г)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода всех формул исходим из частотного разложения (9), дающего

$$\begin{aligned} [j_+(f), j_+(g)] &= [j_-(f), j_-(g)] = 0, \\ [j_+(f), j_-(g)] &= -\int dp p \theta(p) \tilde{f}(-p) \tilde{g}(p). \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает (13а). Для вывода (13б) разбиваем коммутатор на частотные компоненты с помощью (11), а затем по формулам (12) явно вычисляем эти компоненты на D_{fin} . Имеем для любого $\Psi \in D_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} ([j^2:(f), j(g)] \Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= K_+ + K_-, \\ K_+ &= \left(([j_+ j_+](f), j_-(g)] + 2[j_+ j_-](f), j_+(g)] \Psi \right)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \\ &\equiv K_{+,+,-} + K_{+,-,+}, \\ K_- &= \left(([j_- j_-](f), j_+(g)] + 2[j_+ j_-](f), j_-(g)] \Psi \right)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \equiv \\ &\equiv K_{-,-,+} + K_{+,-,-}. \end{aligned}$$

Все четыре слагаемых здесь вычисляются с помощью (10), (12). Приведем для примера выражение для K_+ :

$$\begin{aligned} K_{+,+,-} &= -\frac{i}{2\pi\sqrt{n}} \left\{ \int dp_{n+1} \theta(p_{n+1}) \tilde{g}(p_{n+1}) \times \right. \\ &\times \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n+1} p_i p_k \tilde{f}(-p_i - p_k) \Psi^{(n-1)}(p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, \check{p}_k, \dots, p_{n+1}) - \\ &- \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n p_i p_k \tilde{f}(-p_i - p_k) \int dp \theta(p) \tilde{g}(p) \Psi^{(n-1)}(p, p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, \check{p}_k, \dots, p_n) \Big\}, \\ K_{+,-,+} &= -\frac{i}{\pi\sqrt{n}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \tilde{g}(-p_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} p_k \times \right. \\ &\times \int dp \theta(p) \tilde{f}(p - p_k) \Psi^{(n-1)}(p, p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, \check{p}_k, \dots, p_n) - \\ &- \sum_{i=1}^n p_i \int dp_{n+1} \theta(p_{n+1}) \tilde{f}(p_{n+1} - p_i) \times \\ &\times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} p_k \tilde{g}(-p_k) \Psi^{(n-1)}(p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, \check{p}_k, \dots, p_{n+1}) \Big\}. \end{aligned}$$

В каждом из этих двучленных выражений имеет место одинаковый эффект компенсации: если в членах, содержащих суммы до $n+1$, отделить высшие слагаемые (с $i = n+1$ и $k = n+1$ в $K_{+,+,-}$ и с $k = n+1$ в $K_{+,-,+}$), то оставшаяся сумма совпадает с другим членом, входящим с противоположным знаком. В итоге в суммах по k остаются лишь

высшие слагаемые, и мы имеем

$$\begin{aligned} K_+ &= \frac{i}{\pi\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n p_i \left(\int dp \theta(p) p \tilde{g}(p) \tilde{f}(-p - p_i) - \right. \\ &\quad \left. - \int dp \theta(p) p \tilde{g}(-p) \tilde{f}(p - p_i) \right) \Psi^{(n-1)}(p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, p_n) = \\ &= \frac{i}{\pi\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n p_i \left(\int dp p \tilde{g}(p) \tilde{f}(-p - p_i) \right) \Psi^{(n-1)}(p_1, \dots, \check{p}_i, \dots, p_n). \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для K_- с помощью (12б), (12в) дает

$$K_- = K_{-,-,+} + K_{+,-,-} = -\frac{i\sqrt{n+1}}{\pi} \int dp \theta(p) \int dq \tilde{g}(q) \tilde{f}(-q + p) \Psi(p, p_1, \dots, p_n).$$

С учетом соотношений для фурье-образов

$$\tilde{g}'(p) = ip\tilde{g}(p), \quad (\widetilde{g'f})(p) = i \int dp p \tilde{g}(p) \tilde{f}(-p + p_i) \quad (14)$$

полученные выражения дают (13б) на D_{fin} .

Для (13в) схема вычислений та же, но объем и комбинаторная сложность их резко возрастают. Исходим из следующего разбиения:

$$\begin{aligned} [:j^2: (f), :j^2: (g)] &= K_{++} + K_{+-} + K_{--}, \\ K_{++} &\equiv 2 [(j_+ j_+) (f), (j_+ j_-) (g)] - 2 [(j_+ j_+) (g), (j_+ j_-) (f)], \\ K_{+-} &\equiv [(j_+ j_+) (f), (j_- j_-) (g)] - [(j_+ j_+) (g), (j_- j_-) (f)] + \\ &\quad + 4 [(j_+ j_-) (f), (j_+ j_-) (g)], \\ K_{--} &\equiv 2 [(j_- j_-) (f), (j_+ j_-) (g)] - 2 [(j_- j_-) (g), (j_+ j_-) (f)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Каждая из компонент вычисляется на D_{fin} . Приведем лишь самое сложное выражение:

$$\begin{aligned} (K_{+-} \Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n+2} \int dp_{n+1} dp_{n+2} \theta(p_{n+1}) \theta(p_{n+2}) p_i p_k \tilde{g}(p_{n+1} + p_{n+2}) \tilde{f}(-p_i - p_k) - \right. \\ &\quad - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n p_i p_k \tilde{f}(-p_i - p_k) \int dp_{n+1} dp_{n+2} \theta(p_{n+1}) \theta(p_{n+2}) \tilde{g}(p_{n+1} + p_{n+2}) - \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n+2} \int dp_{n+1} dp_{n+2} \theta(p_{n+1}) \theta(p_{n+2}) p_i p_k \tilde{f}(p_{n+1} + p_{n+2}) \tilde{g}(-p_i - p_k) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n p_i p_k g(-p_i - p_k) \int dp_{n+1} dp_{n+2} \theta(p_{n+1}) \theta(p_{n+2}) \tilde{f}(p_{n+1} + p_{n+2}) + \\
& + 4 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n \int dp_{n+2} \theta(p_{n+2}) p_i \tilde{f}(p_{n+2} - p_k) \int dp_{n+1} \theta(p_{n+1}) p_k \tilde{g}(p_{n+1} - p_i) - \\
& - 4 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n \int dp_{n+2} \theta(p_{n+2}) p_i \tilde{g}(p_{n+2} - p_k) \int dp_{n+1} \theta(p_{n+1}) p_k \tilde{f}(p_{n+1} - p_i) \Big\} \times \\
& \times \Psi^{(n)}(p_1, \dots, \overset{\vee}{p}_i, \dots, \overset{\vee}{p}_k, \dots, p_{n+2}).
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью аналогичных компенсаций, возникающих при отделении в суммах слагаемых с $i, k = n+1, n+2$, и ряда преобразований получаем

$$\begin{aligned}
(K_{+-} \Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int dp dq \theta(p) \theta(q) pq \times \\
&\times \{ \tilde{g}(p+q) \tilde{f}(-p-q) - \tilde{f}(p+q) \tilde{g}(-p-q) \} \Psi^{(n)}(p_1, \dots, p_n) + \\
&+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^n p_i \int dp \theta(q) \left\{ \int dp p (\tilde{g}(p+q) \tilde{f}(-p-p_i) + \tilde{g}(p-p_i) \tilde{f}(q-p)) \right\} \times \\
&\times \Psi^{(n)}(q, p_1, \dots, \overset{\vee}{p}_i, \dots, p_n). \tag{16}
\end{aligned}$$

Два других слагаемых в (15) более просты. Аналогично они приводятся к виду

$$\begin{aligned}
(K_{++} \Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\
&= \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{n(n-1)}} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n p_i p_k \left\{ \int dp p (\tilde{g}(p-p_i) \tilde{f}(-p-p_k) + \tilde{g}(p-p_k) \tilde{f}(-p-p_i)) \right\} \times \\
&\times \Psi^{(n-2)}(p_1, \dots, \overset{\vee}{p}_i, \dots, \overset{\vee}{p}_k, \dots, p_n), \\
(K_{--} \Psi)^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \\
&= \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2\pi^2} \int dp dq \{ dr r (\tilde{g}(p+r) \tilde{f}(q-r) + \tilde{g}(q+r) \tilde{f}(p-r)) \} \times \\
&\times \Psi^{(n+2)}(p, q, p_1, \dots, p_n).
\end{aligned}$$

Двойной интеграл в (16) преобразуем с помощью замены $\lambda = p+q$, $\mu = p-q$, что дает

$$\begin{aligned}
& \int dp dq \theta(p) \theta(q) pq \{ \tilde{g}(p+q) \tilde{f}(-p-q) - \tilde{f}(p+q) \tilde{g}(-p-q) \} = \\
& = \frac{1}{6} \int_0^\infty d\lambda \lambda^3 [\tilde{g}(\lambda) \tilde{f}(-\lambda) - \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(-\lambda)] = \frac{1}{6} \int d\lambda \lambda^3 \tilde{g}(\lambda) \tilde{f}(-\lambda).
\end{aligned}$$

Оставшиеся интегралы во всех трех слагаемых в (15) преобразуем посредством формул

$$\begin{aligned} \int dr r (\tilde{g}(r+p)\tilde{f}(q-r) + \tilde{g}(r+q)\tilde{f}(p-r)) = \\ = \int dr r (\tilde{g}(r)\tilde{f}(-r+p+q) - \tilde{f}(r)\tilde{g}(-r+p+q)) - \\ - p \int dr (\tilde{g}(r)\tilde{f}(-r+p+q) - \tilde{f}(r)\tilde{g}(-r+p+q)) = i(\widetilde{f'g - fg'})(p+q), \end{aligned}$$

получаемых с учетом (14). В итоге для всего коммутатора (13в) получаем основное представление:

$$[:j^2:(f), :j^2:(g)] = -\frac{1}{12\pi^2} \int d\lambda \lambda^3 \tilde{f}(-\lambda)\tilde{g}(\lambda) - \frac{1}{\pi i} :j^2:(f'g - fg'). \quad (17)$$

В силу очевидного обобщения первой из формул (14)

$$\lambda^k \tilde{g}(\lambda) = (-i)^k \widetilde{\frac{d^k g}{d\lambda^k}}(\lambda) \quad (18)$$

интеграл в (17) представим в разных формах, имеющих структуру коцикла; в том числе из (17), (18) непосредственно вытекают соотношения (13в) и (13г). Предложение доказано.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТ ТОКА И ПОЛЯ И ПОСТРОЕНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ $\text{Op } J^*$ -АЛГЕБРЫ И ОБЩЕЙ ПЛОТНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ ОБЛАСТИ ПОЛЕЙ И ТОКОВ

Как обосновывалось в разделе 1, оптимальная конструкция глобальной алгебры и общей плотной инвариантной области определения для полевых величин конформной теории возникает при выборе в качестве образующих глобальной алгебры набора ви-ковских экспонент базового поля и тока. Поэтому очередной задачей является корректное определение таких образующих.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $z \in \mathbb{C}^1$ и основных функциях $f \in Z(\mathbb{R}^1) = \{h(x) \mid \tilde{h}(p) \in D(\mathbb{R}^1)\}$ ви-ков степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} :j^n:(f) \quad (19)$$

сходится в сильной топологии гильбертова пространства на вакууме Ω и определяет операторнозначную обобщенную функцию $:e^{zj}:(f)$ на положительном подпространстве $F_S(\mathcal{H}_1)$, получаемом действием на Ω всех полиномов, ви-ковых полиномов по току и всех рядов вида (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Центральную роль в доказательстве играет обобщенная функция $R(x, y)$ – аналог ядра (7) для оператора тока. По построению из (6) имеем

$$(\varphi(f)\Omega, \varphi(g)\Omega) = \int dx dy G(x, y) \bar{f}(x)g(y),$$

где ядро G дано формулой (7). Вводя ядро R аналогичным определением:

$$(j(f)\Omega, j(g)\Omega) = \int dx dy R(x, y) \bar{f}(x)g(y),$$

получаем

$$R(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x, y), \quad \tilde{R}(p, q) = pq \tilde{G}(-p, -q).$$

Главный необходимый нам факт доставляет

ЛЕММА. *Экспоненциальная форма*

$$e^{zR}(\bar{f}f) = \int dx dy e^{zR(x, y)} \bar{f}(x)f(y)$$

определена как обобщенная функция на пространстве основных функций $f \in S(\mathbb{R}^1)$, и ее значение на каждой основной функции есть целая функция z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7), а также из формул

$$W^{(j)}(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x - i0)^2}, \quad \tilde{W}^{(j)}(p) = \frac{1}{2\pi} \theta(p)p \quad (20)$$

имеем

$$\begin{aligned} R(x, y) &= W^{(j)}(x - y) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} W_\chi(x)W_\chi(-y), \\ W_\chi(x) &= (W * \chi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-ipx} \tilde{W}(p)\chi(p), \\ \tilde{R}(p, q) &= \frac{1}{4\pi} \theta(p)p\delta(p - q) + \theta(p)\theta(q)\chi(-p)\chi(-q). \end{aligned} \quad (21)$$

В отличие от двухточечных функций поля φ , токовые двухточечные функции не имеют ИК-особенности при $p \rightarrow 0$, но имеют УФ-особенность при $x \rightarrow 0$. Отличия имеют место и в поведении комплексных продолжений в окрестности вещественной оси: если $W(x + iy)$ имеет при $y \rightarrow 0$ логарифмическую особенность ($W(x) = -1/(2\pi)[\ln(x - i0) + i\pi/2 + \gamma]$, где γ – константа Эйлера–Маскерони), то $W^{(j)}(x + iy)$ имеет степенную особенность ($W^{(j)}(x + iy) \sim |y|^{-2}$ при $y \rightarrow 0$). Отсюда следует, что экспоненциальная форма $e^{zW(x)}$ в окрестности вещественной оси x удовлетворяет полиномиальной оценке, требуемой теоремой Владимирова ([8], § 26.3), и в силу этой теоремы при $y \rightarrow 0$ имеет единственное граничное значение, лежащее в $S'(\mathbb{R}^1)$ (как было уже показано в [6]); однако для экспоненциальной формы $e^{zW^{(j)}(x)}$ граничное значение заведомо не лежит в $S'(\mathbb{R}^1)$. Чтобы определить класс основных функций для корректного определения этой

последней формы, существуют различные способы. В частности, можно воспользоваться развитым в работе [9] эффективным формализмом для установления функциональных областей определения виковых степенных рядов. Но в нашем случае $W^{(j)}$ имеет простой вид, из которого следует, что фурье-образ обобщенной функции $e^{W^{(j)}}$ определен на финитных основных функциях, а значит, сама она определена на пространстве $Z = S^0$ всех аналитических функций $f(s)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|s^k f(\sigma + i\tau)| \leq C_k(f) e^{a(f)|\tau|}$$

с константами C_k и a , зависящими от f . Далее, полагая функцию χ бесконечно гладкой и достаточно быстро убывающей, мы получаем из (21), что и экспоненциальная форма $e^{zR(x,y)}$ есть непрерывный билинейный функционал над $Z(\mathbb{R}^1) \otimes Z(\mathbb{R}^1)$. Для установления же свойств значений формы $e^{zR}(\bar{f}f)$ по z заметим сначала, что согласно результатам Джаффе [10] (см. также [6]) значение обобщенной функции $e^{zW(x)}$ на любой функции из ее пространства тест-функций есть целая функция z ; этот результат сохраняется и для обобщенной функции $e^{zW''(x)} = e^{zW^{(j)}(x)}$. Отсюда следует, что для каждой функции $f \in Z(\mathbb{R}^1)$ форма, обобщающая e^{zR} :

$$\int dx dy (e^{zW^{(j)}})(x-y) e^{tW'_\chi(x)} W'_\chi(-y) \bar{f}(x) f(y),$$

является целой функцией z при фиксированном $t \in \mathbb{C}^1$, и свойства χ обеспечивают также, что данная форма является целой функцией t при фиксированном $z \in \mathbb{C}^1$. В итоге согласно теореме Хартогса эта форма есть целая функция и по совокупности аргументов z, t , что при $z = t$ дает, что $e^{zR}(\bar{f}f)$ есть целая функция z для всех $f \in Z(\mathbb{R}^1)$. Лемма доказана.

Следствием леммы является корректная определенность соотношения

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} e^{zR}(\bar{f}f) \right|_{z=0} = R^n(\bar{f}f) = \frac{1}{n!} (:j^n:(f)\Omega, :j^n:(f)\Omega). \quad (22)$$

Отсюда можно оценить поведение последовательности квадратов норм частичных сумм ряда (19) на вакууме Ω . С учетом (22) имеем

$$\left\| \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} :j^n:(f)\Omega \right\|^2 = \sum_{n,m=0}^N \frac{z^n \bar{z}^m}{n! m!} (:j^n:(f)\Omega, :j^m:(f)\Omega) = \sum_{n=0}^N \frac{|z|^{2n}}{n!} R^n(\bar{f}f).$$

В силу доказанной леммы этот ряд сходится к $e^{|z|^2 R}(\bar{f}f)$, т.е. последовательность частичных сумм ограничена по норме. Далее, можно получить и другое свойство – мажорируемость ряда из модулей членов ряда (19) сходящимся рядом. Обычным приемом (см., например, [11], формула (2.59)) с помощью интегральной формулы Коши получаем оценку для производных голоморфной функции $e^{zR}(\bar{f}f)$: для любых положительных A_1, A_2 существует константа $C(f; A_1, A_2)$ такая, что

$$\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} e^{|z|^2 R}(\bar{f}f) \right|_{z=0} \leq (n!)^2 \frac{C(f; A_1, A_2)}{(A_1, A_2)^n}. \quad (23)$$

Отсюда, взяв $A_1 = A_2 = A$ и вновь применяя (22), имеем

$$\|:j^n:(f)\Omega\|^2 \leq (n!)^2 \frac{C(f; A)}{A^{2n}}, \quad (24)$$

что при выборе $A > |z|$ дает искомую мажорацию:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \|:j^n:(f)\Omega\| \leq C(f; A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{A^n}. \quad (25)$$

В итоге нами доказано, что ряд (19) сильно сходится на векторе Ω .

Для расширения области сходимости установим сходимость на Ω уже для кратного ряда

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} :j^{k_1}:(f_1) \dots :j^{k_n}:(f_n). \quad (26)$$

Схема доказательства остается прежней, но возникает громоздкая комбинаторика. При оценках по норме частичных сумм ряда (26) на векторе Ω необходимо рассматривать вакуумные ожидания следующего общего вида:

$$\begin{aligned} & (:j^{k_r}:(f_r) :j^{k_{r-1}}:(f_{r-1}) \dots :j^{k_1}:(f_1)\Omega, :j^{k_{r+1}}:(f_{r+1}) \dots :j^{k_n}:(f_n)\Omega) = \\ & = (\Omega, :j^{k_1}:(\bar{f}_1)^* \dots :j^{k_r}:(\bar{f}_r)^* :j^{k_{r+1}}:(\bar{f}_{r+1}) \dots :j^{k_n}:(\bar{f}_n)\Omega) \equiv \\ & \equiv R^{k_1+\dots+k_n}((\bar{f})_r, (f)_{r+1,n}), \end{aligned}$$

где для $h_1, \dots, h_n \in Z(\mathbb{R}^1)$, $(h)_{i,j} \equiv h_i, h_{i+1}, \dots, h_j$, $(h)_k \equiv (h)_{1,k}$, и символ B^* для оператора B в $F(\mathcal{H}_1)$ обозначает гильбертово сопряжение. Набор всех ожиданий такого вида объединяется в сумму

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{z_n^{k_n}}{k_n!} R^{k_1+\dots+k_n}((\bar{f})_r, (f)_{r+1,n}) \equiv J(z_1, \dots, z_n \mid (\bar{f})_r, (f)_{r+1,n}). \quad (27)$$

Для вывода нужных свойств обобщенных функций $R^{k_1+\dots+k_n}((\bar{f})_r, (f)_{r+1,n})$ и $J(z_1, \dots, z_n \mid (\bar{f})_r, (f)_{r+1,n})$ входящие в них вакуумные ожидания необходимо свести к двухточечным функциям $R(\bar{f}f)$, $W^{(j)}(f)$, пользуясь теоремой Вика. Комбинаторная часть проблемы сведения типична для задач вычисления матричных элементов в квантово-полевой теории возмущений. В данном случае проблема идентична той, что возникает при определении виковой экспоненты поля φ , и мы можем воспользоваться ее решением, найденным Пьеротти [6]. Это дает нам выражение для необходимых обобщенных функционалов $R(x, y)$ и $e^{zR}(\bar{f}f)$. Используя [6] (предложение А.1), получаем

$$\begin{aligned} & J(z_1, \dots, z_n \mid (\bar{f})_r, (f)_{r+1,n}) = \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \sum_{p_{ik}} \left(\prod_{i < k} \frac{(z_i z_k)^{p_{ik}}}{p_{ik}!} R_{ik}^{p_{ik}} \right) ((\bar{f})_r, (f)_{r+1,n}), \end{aligned} \quad (28)$$

где p_{ik} — число подмножеств в произвольном разбиении n -элементного множества $(k_1, \dots, k_n)$, причем

$$p_{ik} = p_{ki}, \quad p_{ii} = 0, \quad \sum_{k=1}^n p_{ik} = k_i,$$

а набор функционалов R_{ik} дается следующим определением:

$$R_{ik} = \begin{cases} R(x_i, x_k), & i \in [1, r], \quad k \in [r+1, n], \\ W^{(j)}(x_i - x_k), & i, k \in [1, r], \quad i < k \text{ или } i, k \in [r+1, n], \quad i < k. \end{cases} \quad (29)$$

Данное представление позволяет прямым путем доказать обобщение доказанной выше леммы: функционал $J(z_1, \dots, z_n \mid (\bar{f})_r, (f)_{r+1, n})$ существует как обобщенная функция на $Z(\mathbb{R}^n)$ и является целой функцией $z_1, \dots, z_n$ при всех $f_1, \dots, f_n \in Z(\mathbb{R}^1)$. Из (27), (28) вытекает также, что этот функционал есть экспоненциальная форма, обобщающая $e^{zR}(\bar{f}f)$:

$$J(z_1, \dots, z_n \mid (\bar{f})_r, (f)_{r+1, n}) = \exp \left\{ \sum_{\substack{i, k=1 \\ i < k}}^n z_i z_k R_{ik} \right\} ((\bar{f})_r, (f)_{r+1, n}).$$

Далее, требуемые оценки сходимости выводятся по аналогии со случаем простого ряда. Основная оценка — обобщение (23), также следующее из интегральной формулы Коши (уже кратной):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{2(k_1 + \dots + k_n)}}{\partial z_1^{k_n} \dots \partial z_n^{k_1} \partial z_{n+1}^{k_1} \dots \partial z_{2n}^{k_n}} J(z_1, \dots, z_{2n} \mid (\bar{f})_n, (f)_{n+1, n}) \right|_{z_1 = \dots = z_{2n} = 0} \leq \\ & \leq (k_1!)^2 \dots (k_n!)^2 \frac{C((\bar{f})_n, (f)_{n+1, n}; A_1, A_2)}{(A_1 A_2)^{k_1 + \dots + k_n}}, \end{aligned}$$

где C — некоторая константа, A_1, A_2 — произвольные положительные числа. Из определения (27) имеем также (для набора $(f)_{2n}$ такого, что $f_{n+r} = f_r$, $r = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{2(k_1 + \dots + k_n)}}{\partial z_1^{k_n} \dots \partial z_n^{k_1} \partial z_{n+1}^{k_1} \dots \partial z_{2n}^{k_n}} J(z_1, \dots, z_{2n} \mid (\bar{f})_n, (f)_{n+1, n}) \right|_{z_1 = \dots = z_{2n} = 0} = \\ & = \| :j^{k_1}:(f_1) \dots :j^{k_n}:(f_n) \Omega \|^2, \end{aligned}$$

что в совокупности при $A_1 = A_2 = A$ дает оценку сходимости

$$\| :j^{k_1}:(f_1) \dots :j^{k_n}:(f_n) \Omega \| \leq k_1! k_2! \dots k_n! \frac{C((f_n); A)}{A^{k_1 + \dots + k_n}}.$$

В итоге нами доказано, что ряд (26) сильно сходится на векторе Ω . С учетом замыкаемости оператора тока $j(f)$, а также его обычных и виковых полиномов предельный вектор может быть записан в виде: $e^{z_1 j}:(f_1):e^{z_2 j}:(f_2) \dots e^{z_n j}:(f_n)\Omega$ для любых $f_1, \dots, f_n \in Z(\mathbb{R}^1)$. Предложение доказано.

Таким образом, виковы экспоненты тока $j(f)$, $f \in Z(\mathbb{R}^1)$, определены как операторнозначные обобщенные функции, образующие алгебру на положительном подпространстве $\mathcal{D}_{j+}$ пространства $F_S(\mathcal{H}_1)$, порождаемом действием на Ω всех указанных экспонент, а также, как это следует из доказательства, всех виковых и обычных полиномов по току. Дальнейшая задача двояка: необходимо расширить исходную область определения до плотной области во всем пространстве $F_S(\mathcal{H}_1)$, а также расширить и саму алгебру до достаточно широкой глобальной алгебры полевых и токовых объектов. Проблема расширения области определения может быть решена прямым путем: из явных формул (8), (8а), (12) для поля и тока нетрудно вывести смешанные перестановочные соотношения между полями $\varphi(h)$, $:\varphi^i:(h)$ и токами $j(f)$, $:j^k:(f)$ и с их помощью показать существование экспонент $:e^{zj}:(f)$ на векторах вида $\varphi(h)\Omega$, $:\varphi^i:(h)\Omega$, $\varphi(h)^l\Omega$. Более эффективным, однако, является другой способ, при котором одновременно решаются обе задачи. Учтем прежде всего, что согласно теореме 1 из работы [6] в рамках двумерного описания поля φ виковы экспоненты данного поля определены как обобщенные функции над пространством основных функций $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ типа Джаффе со значениями во множестве неограниченных плотноопределенных операторов в пространстве состояний Фока–Крейна, а обычные экспоненты поля также корректно определены в этом пространстве при сглаживании с функциями из $S(\mathbb{R}^2)$. Эти результаты сохраняют справедливость и для используемого нами описания на конусе, т.е. для всех основных функций $g \in S(\mathbb{R}^1)$ и h из пространства

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^1) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}^1) \mid \|h\|_{C,n,m} < \infty \quad \forall C > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}\},$$

определяемого системой полунорм

$$\|h\|_{C,n,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \left\{ \exp(C[\ln(1+|x|)]^2) \right\} (1+|x|^2)^n D^m h(x),$$

в пространстве $F_S(\mathcal{H}_1)$ определены операторнозначные функционалы $e^{t\varphi(g)}$, $:e^{t\varphi}:(h)$, $t \in \mathbb{C}^1$, имеющие общую плотную область определения $\mathcal{D}_\varphi$, порождаемую действием на фоксовский вакуум всех полиномов по указанным экспонентам.

Из этих результатов следует, что имеет место сходимость на Ω кратного ряда вида (26), в котором виковы полиномы тока $j(f)$, $f \in Z(\mathbb{R}^1)$, заменены виковыми полиномами поля $\varphi(h)$, $h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$, а также ряда, в котором эти полиномы заменены обычными полиномами по $\varphi(g)$, $g \in S(\mathbb{R}^1)$. Ясно также, что если бы была установлена сходимость на Ω смешанного кратного ряда произвольного вида

$$\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^{\infty} \frac{z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} :j^{k_1}:(f_1) \dots : \varphi^{k_r}:(h_r) \dots :j^{k_s}:(f_s) \dots : \varphi^{k_n}:(h_n), \quad (30)$$

то это бы имплицировало, что экспоненты $:e^{z_i j}:(f_i)$ определены на области $\mathcal{D}_\varphi$, а экспоненты $:e^{z_r \varphi}:(h_r)$, в свою очередь, определены на $\mathcal{D}_{j+}$, и на объединенной области

$\text{Lin}\{\mathcal{D}_\varphi \cup \mathcal{D}_{j+}\}$, плотной в $F_S(\mathcal{H}_1)$, обе системы нормальных экспонент допускают взаимное перемножение и образуют общую алгебру. Оценки сходимости ряда (30) требуют анализа смешанных вакуумных ожиданий

$$(\Omega, :j^{l_1}:(f_1)^* \dots : \varphi^{l_p}:(h_p)^* \dots :j^{l_q}:(f_q)^* \dots : \varphi^{l_m}:(h_m)^* \dots \Omega), \quad (31)$$

являющихся обобщением функционалов $R^{k_1+\dots+k_n}((f)_r, (f)_{r+1,n})$, а также аналогичного смешанного обобщения функции $J(z_1, \dots, z_n \mid (f)_r, (f)_{r+1,n})$. Путем применения теоремы Вика вакуумные ожидания (31) сводятся к произведениям двухточечных функций (виковых спариваний), причем набор спариваний, включавший для ряда (26) лишь функции $R(x, y)$, $W^{(j)}(x - y)$, расширяется за счет смешанных токово-полевых функций. С учетом $j(f) = \varphi(-\partial f)$ последние вычисляются без труда. Имеем для всех $f, h \in S(\mathbb{R}^1)$ (необходимости сужения до $h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$ в этих формулах нет)

$$D^{(\varphi j)}(f, h) \equiv \langle \Omega, [j(\bar{f}), \varphi(h)] \Omega \rangle = - \int dx \bar{f}(x) g(x),$$

т.е. в рассматриваемой модели поле и ток образуют канонически сопряженную пару, $[j(x), \varphi(y)] = i\delta(x - y)$. Далее, с учетом $\tilde{f}'(p) = ip\tilde{f}(p)$ имеем

$$\begin{aligned} R^{(\varphi j)}(f, h) &\equiv (j(f)\Omega, \varphi(h)\Omega) = 2\pi \int dp dq \tilde{R}^{(\varphi j)}(p, q) \tilde{f}(p) h(q) = \\ &= -2\pi \int dp dq \tilde{G}(p, q) \tilde{f}'(p) \tilde{h}(q) = 2\pi i \int dp dq \tilde{G}(-p, q) p \tilde{f}(-p) \tilde{h}(q), \end{aligned}$$

откуда в силу (7) получим

$$\tilde{R}^{(\varphi j)}(p, q) = ip\tilde{G}(-p, q) = -i\delta(p - q) - i\chi(-p) [\widetilde{W}(q)\chi(q) - \delta(q)]. \quad (32)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} W^{(\varphi j)}(f, h) &\equiv \langle j(f)\Omega, \varphi(h)\Omega \rangle = \int dx dy W^{(\varphi j)}(x - y) \bar{f}(x) h(y) = \\ &= \int dx dy W(x - y) (-\partial \bar{f})(x) h(y), \end{aligned}$$

откуда

$$W^{(\varphi j)}(x - y) = -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{x - y - i0}, \quad \widetilde{W}^{(\varphi j)}(p) = \frac{1}{2\pi} \theta(p) \quad (33)$$

(что, разумеется, следует и из формул для $D^{(\varphi j)}$). С помощью (32), (33) легко проверить, что для смешанных спариваний сохраняются свойства токовых спариваний $R(x, y)$, $W^{(j)}(x - y)$, которые были использованы при доказательствах леммы, а затем ее обобщения на случай кратного ряда (26) и функции $J(z_1, \dots, z_n \mid (f)_r, (f)_{r+1,n})$. Комбинаторная структура набора спариваний, описываемая в (28) параметром разбиения p_{ik} , усложняется (возникает уже не две, а четыре группы объектов $j, j^*, \varphi, \varphi^*$);

наряду с этим набор функционалов R_{ik} расширяется по сравнению с (29) за счет включения смешанных спариваний. Но проблема учета этих изменений идентична проблеме, рассмотренной нами ранее (см. [7], лемма 4) в аналогичной ситуации, при объединении двух систем экспоненциальных образующих в пространстве Фока–Крейна модели Швингера. Комбинаторные изменения в итоге не сказываются на выполнении оценок сходимости, и мы получаем искомым вывод о сходимости смешанных рядов вида (30) на фоковском вакууме Ω .

Суммируя все результаты, установленные после доказательства предложения 2, и объединяя их с приведенными результатами из [6], находим, что имеет место

ТЕОРЕМА. В пространстве Фока–Крейна $F_S(\mathcal{H}_1)$ $2D$ -безмассового скалярного поля φ при всех $z \in \mathbb{C}^1$, $f_n \in Z(\mathbb{R}^1)$, $n = 1, \dots, N$, всех $z_m \in \mathbb{C}^1$, $h_m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$, $m = 1, \dots, M$, и всех $N, M \in \mathbb{N}$ определены операторнозначные обобщенные функции

$$A_N((f)_N) \equiv \prod_{n=1}^N :e^{z_n j}:(f_n), \quad B_M((h)_M) \equiv \prod_{m=1}^M :e^{z_m \varphi}:(h_m),$$

совместно с виковыми полиномами тока и поля порождающие алгебру неограниченных операторов

$$\mathcal{F}_{\text{exp}} \equiv \text{Alg} \left\{ A_N((f)_N), B_M((h)_M); :j^{k_r}:(f_r), :\varphi^{k_s}:(h_s) \mid f_i \in Z(\mathbb{R}^1), h_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1), \right. \\ \left. i, k, M, N, k_r, k_s, r, s \in \mathbb{N} \right\}$$

на общей плотной инвариантной области $\mathcal{D}_{\text{exp}} \equiv L\{D_\varphi \cup \mathcal{D}_{j+}\}$.

Нетрудно установить для алгебры $\mathcal{F}_{\text{exp}}$ также ряд дополнительных свойств. Прежде всего, из $\mathcal{J}$ -самосопряженности операторов $j(f)$, $\varphi(h)$ просто следует, что $\mathcal{F}_{\text{exp}}$ обладает структурой $\text{Op } J^*$ -алгебры, и в силу этого для нее справедливы основные структурные свойства данного класса алгебр [12]. Далее $\mathcal{F}_{\text{exp}}$ может быть расширена обычными полиномами и экспонентами $e^{t\varphi(g)}$ поля φ , без изменения своей области $\mathcal{D}_{\text{exp}}$: в работе [6] выведены перестановочные соотношения виковых и обычных экспонент φ и с их помощью доказано, что экспоненты $e^{t\varphi(g)}$ определены на $\mathcal{D}_\varphi$; из этих соотношений можно получить и перестановочные соотношения между $:e^{zj}:(f)$ и $e^{t\varphi(g)}$, установив определенность $e^{t\varphi(g)}$ также и на $\mathcal{D}_{j+}$. Очевидно также, что ввиду наличия образующих с основными функциями из $Z(\mathbb{R}^1)$ алгебра $\mathcal{F}_{\text{exp}}$ не может быть наделена обычной сетью локальных подалгебр. Выбор пространства основных функций для токовых и токово-полевых обобщенных функций возможно рассмотреть детальнее и оптимизировать с помощью эффективной методики, развитой в работе [9], однако для наших применений построенная алгебра $\mathcal{F}_{\text{exp}}$ является, как можно предполагать, достаточной. Данная алгебра вводится не для получения стандартного формализма полевых алгебр квантово-полевой модели, но для дальнейшего использования в качестве исходной базы построения строгой формулировки $2D$ -конформной модели. А в этом построении, как указывалось выше, экспоненты тока предполагается использовать для определения генераторов Вира-соро L_n , которые отнюдь не должны являться локальными величинами. Ближайшие

же этапы построения должны включать переход к алгебре токов и полей на окружности S^1 , а также строгое определение L_n .

Благодарности. В заключение автор выражает признательность А. В. Воронину, с которым обсуждались начальные стадии данной работы, а также рецензенту журнала ТМФ за указания на погрешности в первом варианте текста и на работу [9].

Список литературы

- [1] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333–380.
- [2] *G. Moore, N. Seiberg.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 177–254.
- [3] *P. Furlan, G. M. Sotkov, I. T. Todorov.* Riv. Nuovo Cimento. 1989. V. 12. № 6. P. 1–202.
- [4] *G. Felder.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 317. P. 312–348.
- [5] *G. Morchio, D. Pierotti, F. Strocchi.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1467–1477.
- [6] *D. Pierotti.* Lett. Math. Phys. 1988. V. 15. P. 219–230.
- [7] *S. S. Horuzhy, A. V. Voronin.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2823–2841.
- [8] *B. C. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [9] *А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 355–373.
- [10] *A. Jaffe.* Phys. Rev. 1967. V. 158. P. 1454–1461.
- [11] *P. Стритер, А. Вайтман.* PCT, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
- [12] *К. Ю. Дадашян, С. С. Хоружий.* ТМФ. 1983. Т. 54. С. 57–77.

Поступила в редакцию 13.XI.2003 г.,
после доработки 18.III.2004 г.