Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Бессонов, С. А. Вакуленко, Связанные состояния кинков в неоднородных нелинейных средах, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 115–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:48:25

Н.М. Бессонов, С.А. Вакуленко

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ КИНКОВ В НЕОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрено уравнение $\phi_t = \epsilon^2 \Delta \phi + H^2(x, y) \sin \phi$, имеющее применения в физике жидких кристаллов. Изучена кинетика образования и движения кинков. Вычислены времена релаксации. Показана возможность образования связанных состояний кинков и вычислены параметры этих состояний при малых ϵ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетические уравнения вида

$$u_t = \epsilon^2 \Delta u + H^2(x) \Phi'_u, \quad u \in \mathbf{R}^n, \quad x \in \Omega \subset R^m, \quad (1.1)$$

где $\Phi(u) \in C^2$ — некоторый потенциал, Ω — некоторая гладкая подобласть в $\mathbf{R}^m$, коэффициент $H \in C^\infty$, $H > c > 0$, играют важную роль как простейшая модель в современной математической теории фазовых переходов и статистической физике [1–4], а также в биологии, химии и других областях [5–8].

Характер кинетической эволюции, определённой (1.1), становится ясным, если заметить, что (1.1) может быть записано в функциональном виде

$$\frac{\delta D}{\delta u_t} = -\frac{\delta F}{\delta u}, \quad (1.2)$$

где функционалы диссипации D и энергии F имеют вид

$$D[u_t] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 d^m x, \quad (1.3)$$

$$F_\epsilon[u] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 (\nabla u)^2 - H^2(x, y) \Phi(u) \right) d^m x. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.2) выполнено для всех обычных граничных условий, таких как условия Дирихле, Неймана и периодические. Оно немедленно дает, что на траекториях нашей системы

$$dF_\epsilon[u(\cdot, t)]/dt = -2D, \quad (1.5)$$

т.е. энергия F_ϵ убывает, пока u_t не равно нулю хотя бы в одной точке. В результате оказывается [9–11], что если Φ полуограничено снизу, тогда (1.1) описывает эволюцию

к некоторому равновесному состоянию. Отметим, что таких равновесных состояний может быть много, предел при $t \rightarrow \infty$ зависит от начального состояния

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.6)$$

и может быть нетривиальным решением $u(x) \neq \text{const}$ (равновесной “структурой”). Итак, соотношение (1.2) влечет очень важные ограничения на аттрактор системы. Ниже будет ясно, что случай малых ϵ является наиболее интересным.

Поведение решений (1.1) при малых ϵ очень сильно зависит от групповых свойств потенциала Φ . Элементарная топологическая теория дефектов [12, 13] дает представление о том, как должны выглядеть типичные нетривиальные равновесные структуры для различных обычных в приложениях случаев.

Ниже повсюду мы рассматриваем (если не оговорено противное) простейший случай периодических граничных условий, предполагая что область Ω – ящик (например, $\Omega = [0, 2\pi]^m$) и отвлекаясь от граничных эффектов. Фактически это означает, что мы изучаем (1.1) на торе T^m .

Предположим, что Φ – функция “общего положения”, инвариантная относительно действия группы G . Наиболее типичные примеры:

1. $G: u \rightarrow -u$, т.е. потенциал Φ четный. Например, $\Phi(u) = -a(T - T_c)u^2 - u^4$, $a > 0$. Тогда при $T > T_c$ можно показать, что никаких нетривиальных структур нет:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \equiv 0.$$

При $T < T_c$ потенциал Φ бистабилен, такие структуры могут существовать и связаны с асимптотическими решениями типа кинка, которые исследовались рядом авторов [8, 14–19].

2. $G = U(1)$, параметр порядка u комплексный. Наиболее известный пример – это $\Phi(u) = -a(T - T_c)|u|^2 - |u|^4$, $a > 0$. Тогда при $T > T_c$ снова никаких нетривиальных равновесных решений нет. При $T < T_c$ такие решения могут существовать и связаны в двумерном случае с решениями типа вихрей, а в трехмерном – типа вихревых нитей (вихри Питаевского [20]).

Цель данной статьи – исследование случая, который ранее изучался сравнительно мало. Это случай, когда группа симметрии дискретная, например, $G: \phi \rightarrow \phi + 2\pi$, $u = \phi \in \mathbf{R}$. Важным примером, который будет базисным в этой работе, является уравнение

$$\nu \partial \phi / \partial t = \epsilon^2 \Delta \phi + H^2(x, y) \sin \phi, \quad \phi(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (1.7)$$

в двумерном ящике Ω . В действительности все результаты полностью переносятся на более общую ситуацию ($u \in \mathbf{R}^n$), однако ради простоты мы рассматриваем именно такой вариант.

Уравнение (1.7) встречается в кинетике нематических жидких кристаллов. Оно обобщается (в одномерном случае и при $H \equiv \text{const}$) в [21], где оно применено для описания динамического эффекта Фредерикса. Это уравнение было получено также в работах [22–24] в связи с проблемами дефектоскопии с помощью жидких кристаллов. Здесь “параметр порядка” ϕ – угол наклона директора, H^2 – квадрат амплитуды магнитного поля.

Основная цель настоящей работы – исследовать (при малых ϵ) возникающие в таких системах некоторые новые эффекты, приводящие к связанным состояниям из (возможно, искривленных) доменных границ (кинков). Эти равновесные состояния (структуры)

помимо их физического и механического значения, вероятно, интересны и с чисто математической точки зрения, поскольку, как выяснится ниже, не описываются известной теорией Γ -сходимости, возникшей из пионерских работ де Джорджи [25]. Отметим, что в случае бистабильных $\Phi(u)$ этот эффект отсутствует (там верны известные результаты [3, 4, 26, 27]). Дело в том, что в случае мультистабильного потенциала, связанного с (1.1), и малых ϵ образуются домены очень малого размера, порядка $\epsilon \ln \epsilon$. Такие домены можно назвать “микродоменами”.

Возможны “связанные состояния” из нескольких стенок с образованием нескольких промежуточных микродоменов. Внутри каждого из них решение с экспоненциальной точностью равно постоянной.

В смысле Γ -сходимости при малых ϵ эти состояния равносильны некоторой одной эффективной доменной стенке с соответствующей энергией, асимптотически равной сумме энергий отдельных стенок.

Все это имеет простую физическую интерпретацию. Здесь возникает такая характеристика, как кратность (заряд) доменной стенки. Мы покажем, что стенки взаимодействуют при некоторых условиях как заряды, а именно: кинки (стенки) с разными зарядами сливаются и исчезают, а с одинаковыми – отталкиваются, что может привести в неоднородной среде к образованию упомянутых связанных состояний. В самом деле, неоднородности поля H могут притягивать кинки, и если среди них есть кинки одинакового заряда, то отталкивание между кинками на некотором расстоянии компенсирует притяжение, что и обеспечивает возможность образования связанного состояния.

Другая цель настоящей работы – найти выражения для времен релаксации, определяющих длительность процесса возникновения равновесных конфигураций. Это позволяет оценить предельную скорость быстрогодействия устройства, работающего на жидких кристаллах.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ АТТРАКТОРАХ СИСТЕМЫ (1.7)

Здесь полезно иметь в виду некоторые общие результаты об аттракторах изучаемых систем. Системы типа (1.1) принадлежат к классу так называемых градиентно-подобных систем. Возможна оценка сверху размерности N_ϵ аттрактора: $N_\epsilon < C(\epsilon)$, при этом $C(\epsilon) \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$ [9–11]. Если ϵ достаточно велико, тогда аттрактор (1.7) состоит из тривиальных равновесий $\phi = \pi n$, где n – произвольное целое число, причем они устойчивы при нечетных n и неустойчивы при четных. Это видно из формулы для потенциала Φ :

$$\Phi(\phi) = -2 \cos^2(\phi/2). \quad (2.1)$$

При уменьшении ϵ могут появиться новые нетривиальные равновесия. В общем, сложность аттрактора повышается с уменьшением ϵ . Это легко показать на одномерном примере ($m = 1$), который хорошо исследован [6, 28] и представляет собой с точки зрения возможности глобального исследования динамики вполне замечательную систему (бесконечномерную систему Морса–Смейла, структура траекторий которой полностью выяснена).

Поэтому именно случай малых ϵ представляет наибольший интерес, поскольку в других ситуациях, с одной стороны, эффективны численные методы, а с другой – нет простого описания равновесных структур, возможного при малых ϵ . Исключение составляет случай постоянных H , $H \equiv C$, когда существует явное представление равновесных

($\phi_t = 0$) решений с помощью тэта-функций [29–30]. Найденные нами эффекты отсутствуют в этом случае.

План работы таков. В следующем разделе 3 мы приводим известные результаты, описывающие возникновение кинков из слабонеоднородных начальных данных. В разделе 4 мы описываем процесс движения кинков. Затем в разделах 5, 6 мы получаем новые результаты – находим параметры связанных состояний кинков и выражения для времен релаксации, т.е. оцениваем, с какой скоростью происходит приближение к равновесной конфигурации. Раздел 7 – это заключение.

В заключение этого раздела сделаем замечание. Ниже мы часто будем говорить о “времени релаксации”. Свойства аттрактора (1.7) (то, что любое решение $\phi(x, y, t)$ стремится к равновесному решению) позволяют математически строго определить эту величину. Именно, пусть в некоторой норме $\|\cdot\|$ имеем оценку

$$\|\phi(x, y, t) - \phi_{\text{eq}}(x, y)\| < C \exp(-t/\tau), \quad t > 0,$$

где τ – наименьшее возможное время релаксации. Тогда величину τ можно назвать временем релаксации для процесса установления равновесия ϕ_{eq} . Разумеется, эта величина зависит от равновесного решения ϕ_{eq} .

3. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК (КИНКОВ) ИЗ СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Описанные в этом разделе (в основном известные из литературы) результаты были получены для случая уравнения (1.1) с бистабильным потенциалом и непосредственно переносятся на случай (1.7). Отметим, что для (1.7) бистабильный случай возникает, если предположить, что начальные данные ψ удовлетворяют для некоторого целого n условию

$$(2n - 2)\pi < \psi(x, y) < (2n + 2)\pi. \quad (3.1)$$

Процесс возникновения кинка может быть описан формально-асимптотическим разложением [8, 18]

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x, y, t) + \epsilon^2 \phi_1(x, y, t) + \dots, \quad (3.2)$$

где главный член ϕ_0 удовлетворяет уравнению

$$\nu \partial \phi_0(x, y, t) / \partial t = H^2(x, y) \sin(\phi_0(x, y, t)), \quad \phi_0(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (3.3)$$

а поправки ϕ_k удовлетворяют линейным уравнениям

$$\nu \partial \phi_k(x, y, t) / \partial t = H^2(x, y) \cos(\phi_0(x, y, t)) + G_k(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}), \quad (3.4a)$$

$$\phi_k(x, y, 0) = 0, \quad (3.4b)$$

Здесь G_k выражается через предыдущие приближения. В частности, $G_1 = -\nu \Delta \phi_0$. Для главного члена ϕ_0 получаем решение

$$\text{tg}(\phi_0(x, y, t)/2) = \text{tg}(\psi(x, y)/2) \exp(H^2(x, y)t/\nu). \quad (3.5)$$

Можно строго доказать с помощью метода сравнения решений [8], что это решение остается корректным при всех t и дает точность по крайней мере $O(\epsilon)$ при всех $t > 0$, если

выполнено следующее ограничение на начальные данные: для некоторого целого n имеем

$$2n\pi < \psi(x, y) < (2n + 2)\pi \quad \text{для всех } x, y. \quad (3.6)$$

При этом условии (3.6) как первое приближение ϕ_0 , так и точное решение ϕ стремятся к $(2n + 1)\pi$ при $t \rightarrow \infty$.

Если (3.6) не выполняется, то при $t \rightarrow \infty$ в главном члене ϕ_0 возникают особенности. Можно доказать, что они появляются вблизи подмножества

$$\Omega_0 = \{(x, y) : \psi(x, y) = 2n\pi \text{ для некоторого } n\}. \quad (3.7)$$

ЛЕММА. В случае гладкой функции ψ “общего положения” множество особенностей Ω_0 есть гладкое многообразие коразмерности 1 в R^2 . Это означает, что это множество есть совокупность конечного числа замкнутых (в торе T^2) гладких кривых.

Лемма является следствием общих результатов дифференциальной топологии [31]. Условие общности положения весьма существенно. Без него, как можно вывести из известной теоремы Уитни [31], Ω_0 может быть произвольным замкнутым множеством — случай, который вряд ли допускает аналитическое исследование. Типичной простейшей особенностью, возникающей в случае произвольного ψ , является трансверсальное пересечение двух кривых (например, когда $\psi = axy$, это две прямые $x = 0$ и $y = 0$). Такая ситуация может описывать пересечение двух доменных стенок. В результате “малого шевеления” такое пересечение распадается на две независимые доменные стенки.

Время образования τ_1 существенной особенности решения ϕ_0 (при $t > \tau_1$ решение (3.2) теряет свой асимптотический характер) имеет асимптотику

$$\tau_1 \approx c\nu \overline{H}^{-2} \ln \epsilon, \quad \overline{H} = \max_{\Omega_0} H(x, y). \quad (3.8)$$

Рассмотрим теперь другую асимптотическую процедуру, позволяющую изучить решение вблизи этих замкнутых кривых, где формируется кинк, на временах $t \gg O(\ln \epsilon)$, когда описанное выше разложение уже некорректно.

Итак, пусть Ω_0 — совокупность кривых S_k . Выделим одну такую кривую $S = S_0$. Вблизи S введем стандартные координаты (ρ, s) , где $|\rho|$ — расстояние по нормали до S (знак ρ зависит от того, с какой стороны мы находимся), s — натуральный параметр на кривой. Естественно ввести быструю переменную $z = \rho/\epsilon$. Вблизи S имеем асимптотическое представление

$$\phi(x, y, t) = \phi^0(z, s, t) + \epsilon \phi^1(z, s, t) + \dots, \quad (3.9)$$

где главный член ϕ_0 может быть определен из решения задачи

$$\nu \partial \phi^0(z, s, t) / \partial t = \phi^0_{zz} + H^2(0, s) \sin \phi^0, \quad \phi^0(z, s, 0) = \phi_0(z, s, \epsilon, \tau_1), \quad (3.10)$$

где ϕ , τ_1 определены с помощью (3.5) и (3.8).

Известно [32], что при очень слабых ограничениях на начальные данные $\phi(z, s, \tau_1)$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi^0 = \Xi(z, s), \quad \Xi + (2n + 1)\pi = 4 \arctg(\sigma \exp(H(0, s)z)), \quad (3.11)$$

где заряд σ принимает значения 1 или -1 . Скорость приближения к пределу в (3.11) является экспоненциальной:

$$|\phi^0(\rho, s, t) - \Xi(\rho, s)| < C \exp(-t/\tau_2), \quad (3.12)$$

где “время релаксации” τ_2 может быть оценено как

$$\tau_2 \approx \max_s c\nu H^{-2}(0, s). \quad (3.13)$$

Этот процесс эволюции к квазиодномерному кинку является “быстрым” по сравнению с процессом возникновения особенности, описываемым (3.2). В самом деле, $\tau_1 \gg \tau_2$. Ниже мы опишем процесс медленного движения кинка, который медленнее обоих этих процессов и играет существенную роль начиная с момента, когда левая часть в неравенстве (3.12) достаточно мала.

4. ДВИЖЕНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК И РАВНОВЕСНЫЕ СТРУКТУРЫ

Пусть доменная стенка задана гладкой, без самопересечений кривой S , которая теперь может зависеть от времени. Согласно результатам [8, 18] движение стенок является очень медленным и описывается следующим уравнением:

$$\nu v(s) = \epsilon^2 (\kappa(s) - b(s)), \quad (4.1)$$

где $v(s)$ – проекция скорости движения точки M кривой S с натуральным параметром s на нормаль к кривой в этой точке, $\kappa(s)$ – кривизна в этой точке и величина b есть $b(s) = H_n(0, s)/H_0(s)$, где $H_0(s) = H(0, s)$ – поле H в этой точке на кривой, а H_n – его производная в направлении нормали к кривой в точке M .

Напомним известную процедуру вывода (4.1), поскольку она пригодится нам в дальнейшем. Анзац имеет вид

$$\phi(x, y, T) = \phi^0(z, s) + \epsilon^2 \phi^1(z, s, T) + \dots, \quad (4.2)$$

где $T = \epsilon^2 t$ – медленное время.

Главный член имеет вид (3.11): $\phi^0(z, s) = \Xi(z, s)$. Заметим, что переменные z, s зависят от T , поскольку положение кривой S зависит от τ . Главный член удовлетворяет уравнению (1.1) с точностью до членов порядка 1. Для поправки ϕ^1 имеем линейное уравнение

$$\mathcal{L}\phi^1 = G, \quad G = G_1 + G_2 + G_3. \quad (4.3)$$

Первый член G_1 возникает из $\frac{\partial \Xi}{\partial T}$ и равен $-\nu v \frac{\partial \Xi}{\partial z}$, второй появляется из разложения Лапласиана в ряд по степеням ϵ , и, наконец, третий возникает, если мы разложим коэффициент H в ряд в окрестности кривой, т.е. около $\rho = 0$:

$$H(\rho, s) = H_0(s) + H_1(s)\rho + \frac{1}{2}H_2\rho^2 + \dots \quad (4.4)$$

Оператор $\mathcal{L}$ имеет ядро, состоящее из функций вида $\frac{\partial \Xi}{\partial z}$. Тем самым ограниченная поправка ϕ^1 существует тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial \Xi}{\partial z} dz = 0. \quad (4.5)$$

После упрощений, используя явные формулы для G_i , имеем уравнение (4.1) [8].

Видно, что процесс движения стенки является очень медленным. Соответствующее время релаксации описывается формулой

$$\tau_d = \text{const}(H, S)\nu\epsilon^{-2}, \quad (4.6)$$

где постоянная зависит от поля H и геометрических свойств кривой S .

Введем функционал типа Ферма $\bar{F}$, зависящий от кривой S ,

$$\bar{F} = \int_S H(x(s), y(s)) ds. \quad (4.7)$$

Легко показать, что в силу (4.1) функционал Ферма не возрастает:

$$d\bar{F}/dt \leq 0, \quad (4.8)$$

причем равенство имеет место, только если кривая S равновесная, т.е. удовлетворяет условию

$$\kappa(s) = b(s) = H_1(s)/H(s). \quad (4.9)$$

В отличие от эволюционного случая, который исследован в основном на формально-асимптотическом уровне строгости, для описания равновесных структур имеется строгая теория [3, 4, 26, 27]. Эта теория развита для бистабильных потенциалов $\Phi(u)$ с двумя невырожденными минимумами при (для простоты считаем $u \in R$) $u = a$, $u = b$. Можно предположить, что $\Phi \geq 0$.

Рассмотрим функционал F_N , определенный на кусочно-гладких в Ω функциях $u(x, y)$, принимающих только два значения a и b , где $\Omega_a = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = a\}$ и $\Omega_b = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = b\}$. При этом также предполагается, что внутренняя граница раздела $\Gamma = \partial\Omega_a \cap \partial\Omega_b$ есть объединение достаточно регулярных кривых. Положим

$$F_N = [\Phi(b) - \Phi(a)] |\Gamma|, \quad (4.10)$$

где $|\Gamma|$ обозначает суммарную длину совокупности кривых из Γ . Один из основных результатов [3] (рассматриваем нулевые условия Неймана и скалярное уравнение (1.1) с $n = 1$) может быть сформулирован так:

ТЕОРЕМА 4.1 [3]. Пусть $H = \text{const}$. Если $v_\epsilon \rightarrow u$ в $L_1(\Omega)$, тогда $\liminf F_\epsilon(v_\epsilon) \geq F_N(u)$ и существует последовательность $\bar{u}_\epsilon$ такая, что $\bar{u}_\epsilon \rightarrow u$ в $L_1(\Omega)$ и

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon[\bar{u}_\epsilon] = F_N(u). \quad (4.11)$$

Более сложный редуцированный функционал получается в задаче Дирихле [3, 25, 26].

Этот результат (и аналогичные другие результаты) позволяет описать равновесные структуры, используя редуцированные функционалы, имеющие простой геометрический смысл. Именно, в задаче Неймана при постоянном поле H кривая раздела должна иметь минимальную длину. Следовательно, она должна быть прямой и быть ортогональна границе. Это означает, что равновесные кривые раздела (равновесные кинки) устойчивы только для невыпуклых областей Ω . Для переменного H и периодических

граничных условий устойчивая граница (кинк, доменная стенка) S определяется из вариационного принципа, совпадающего по форме с обычным принципом Ферма линейной геометрической оптики:

$$\delta \bar{F}[S] = \delta \left(\int_S H(x(s), y(s)) ds \right) = 0. \quad (4.12)$$

Замкнутые кривые S , отличные от прямых, могут быть устойчивы только для переменных H , и их форма определяется принципом (4.12). Для постоянного поля такие кривые постепенно сжимаются в точку [33]. Отметим простой геометрический смысл уравнения (4.12) и заодно покажем, что оно действительно равносильно (4.9). Это выясняется из известного соотношения [34]:

$$\delta L = - \int_{\Gamma} \kappa(s) \delta n ds + O((\delta n)^2), \quad (4.13)$$

где δn – малое смещение кривой в нормальном направлении, L – ее длина, δL – приращение длины за счет малого смещения. Следовательно, вариация $\bar{F}$ может быть записана в виде $\delta \bar{F} = \int_S (-\kappa(s) H_0 + H_1(s)) \delta n(s) ds$, откуда и вытекает (4.9).

Перейдем теперь к описанию эффектов взаимодействия кинков.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КИНКОВ. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Чтобы вычислить аналитически силу взаимодействия между кинками, начнем в целях упрощения изложения, с одномерного случая, заменяя область Ω на ось $(-\infty, \infty)$ и полагая пока $H \equiv \text{const}$. Это дает одномерное уравнение

$$\nu \phi_t = \epsilon^2 \phi_{xx} + H^2 \sin \phi. \quad (5.1)$$

Мы будем строить асимптотическое разложение решения в ряд по малому параметру $\exp(-Hr/\epsilon)$, где $r(t)$ – расстояние между кинками. Мы, однако, не будем вводить явно эту величину в асимптотическое разложение, ограничиваясь нахождением только главных членов. Процедура, описанная выше и связанная с соотношением ортогональности типа (4.5), автоматически дает уравнения движения для медленных параметров кинков.

Ранее такие задачи уже рассматривались [35–37], однако в основном только для бистабильных потенциалов, когда между кинками действует сила притяжения. В настоящей работе мы применяем новый подход.

Мы имеем следующие представления для кинков по отдельности:

$$Y_i = 4 \arctg(\exp(\sigma_i H(x - X_i(t))/\epsilon)) + (2n_i + 1)\pi, \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Величины $\sigma_i = +1, -1$ – это заряды. Для кинков разного заряда $n_1 = n_2 = n$, для одинакового заряда $n_2 - n_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_1)$.

Чтобы получить главный член, “склеим” эти два выражения при помощи разбиения единицы. Возьмем функцию $\theta \in C^\infty$ со свойствами

$$\theta(x) = 1 \quad (x < 1), \quad \theta(x) = 0 \quad (x > 2), \quad d\theta/dx \leq 0. \quad (5.3)$$

Возьмем $p(\epsilon) = c\epsilon |\ln \epsilon|$. Положим $\chi(x, \epsilon) = \chi = \theta(x/p(\epsilon))$ и возьмем в качестве первого приближения

$$\phi_0(x, t, \epsilon) = \chi(x - X_1, \epsilon) Y_1(x, X_1(t), \epsilon) + (1 - \chi(x - X_1, \epsilon)) Y_2(x, X_2(t), \epsilon). \quad (5.4)$$

Дальнейшая конструкция носит стандартный характер, и мы опишем ее кратко. Для поправки w к первому приближению (5.4) получаем уравнение

$$\mathcal{L}w = G(x, \epsilon, X_1(t), X_2(t)), \quad (5.5)$$

где $\mathcal{L}$ – симметричный линейный оператор второго порядка, аналогичный оператору из раздела 4 и имеющий две “почти” собственные функции:

$$Z_i = 4H\epsilon^{-1} \exp(\sigma_i H(x - X_i)/\epsilon) (1 + \exp(2H\sigma_i(x - X_i)/\epsilon))^{-1}, \quad (5.6)$$

которые удовлетворяют уравнению $\mathcal{L}Z_i = 0$ с экспоненциальной точностью $\exp(-2Hr/\epsilon)$. Положим $r = X_2 - X_1$ и пусть $X_2(0) > X_1(0)$. Уравнения для $X_i(t)$ возникают из условий ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \epsilon, X_1(t), X_2(t)) Z_i dx = 0. \quad (5.7)$$

Чтобы представить их в явном виде, вычислим G . Это выражение состоит из трех членов. Первые два имеют вид $-\nu Z_i dX_i/dt$, $i = 1, 2$. Третий член отличен от нуля только в области I , где $\chi \neq 0$. В этой области можно воспользоваться асимптотическим разложением Y_i . Например, при $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$ имеем

$$Y_1 = -4\sigma_1 \exp(-\sigma_1 H(x - X_1)/\epsilon) + (2n_1 + 1)\pi = (2n_1 + 1)\pi + \tilde{Y}_1, \quad (5.8)$$

$$Y_2 = 4\sigma_2 \exp(-\sigma_2 H(x - X_2)/\epsilon) + (2n_2 + 1)\pi = (2n_2 + 1)\pi + \tilde{Y}_2, \quad (5.9)$$

а при $\sigma_2 = 1 -$

$$Y_2 = 4\sigma_2 \exp(\sigma_2 H(x - X_2)/\epsilon) + (2n_2 + 1)\pi = (2n_2 + 1)\pi + \tilde{Y}_2. \quad (5.9a)$$

Выражения $\tilde{Y}_i$ могут быть названы хвостами кинков.

Пренебрегая членами порядка $O(\tilde{Y}_i^2)$ в области I , имеем

$$G = \epsilon^2 \left[2\chi_x \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial x} + \chi_{xx} \tilde{Y}_1 - 2\chi_x \frac{\partial \tilde{Y}_2}{\partial x} - \chi_{xx} \tilde{Y}_2 \right] - \nu Z_1 \frac{X_1}{dt} - \nu Z_2 \frac{X_2}{dt}. \quad (5.10)$$

(Отметим, что члены с производными Y_{ixx} сокращаются с членами, возникающими из разложения величины $\sin((2n_1 + 1)\pi + \chi \tilde{Y}_1 + (1 - \chi)\tilde{Y}_2)$ в ряд в окрестности $(2n_1 + 1)\pi$ в области I .)

Подставим (5.10) в (5.7). Учтем, что Z_i в I можно заменить на его хвост $\frac{\partial \tilde{Y}_i}{\partial x}$. Далее, замечая, что

$$\begin{aligned} \int_I \left[2\chi_x \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial x} + \chi_{xx} \tilde{Y}_1 \right] \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial x} dx &= H \int_I \left[2\chi_x \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial x} + \chi_{xx} \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_1 \right] dx + O(\tilde{Y}_1^2) = \\ &= H \int_I \frac{\partial(\chi_x \tilde{Y}_1^2)}{\partial x} dx + O(\tilde{Y}_1^2) = O(\tilde{Y}_1^2), \end{aligned}$$

а перекрестные члены с произведениями хвостов $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ и их производных легко вычисляются, имеем систему

$$\nu dX_1/dt = -4\sigma_1\sigma_2 H\epsilon \exp(-H(X_2 - X_1)/\epsilon), \quad (5.11)$$

$$\nu dX_2/dt = 4\sigma_1\sigma_2 H\epsilon \exp(-H(X_2 - X_1)/\epsilon). \quad (5.12)$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим, что центр масс $X(T)$ системы кинков $X_1 + X_2 = X$ не зависит от времени, а для расстояния r между ними имеем

$$\nu dr/dt = 8\sigma_1\sigma_2 H\epsilon \exp(-Hr/\epsilon). \quad (5.13)$$

Мы видим, что эволюция r по (5.13) приводит к очень медленному росту расстояния, т. е. сила взаимодействия является силой отталкивания, если заряды одинаковы: $\sigma_1\sigma_2 = 1$. Наоборот, если $\sigma_1\sigma_2 = -1$, т. е. заряды разные, то кинки сближаются.

Эти формулы корректны при $r \gg \epsilon$. В случае притяжения при достижении расстояний $r \approx O(\epsilon)$ необходимо перестроить анзац.

Мы не будем этого делать, поскольку хорошо известно [5], в том числе и из численных расчетов, что результатом столкновения является взаимное поглощение и исчезновение обоих кинков.

Нетрудно обобщить результат на случай переменного H . В одномерном случае уравнение движения одиночного кинка с координатой $X(t)$ имеет вид [8]

$$dX/dt = -\epsilon^2 H'(X)/H(X). \quad (5.14)$$

Прежде всего заметим, что все кинки в этом случае притягиваются к локальным минимумам $H(x)$. Взаимодействие кинков возникает, если два кинка движутся к одному такому локальному минимуму. Рассмотрим случай кинков одного заряда и покажем, что возможно образование равновесного состояния.

Пусть минимум H находится в точке X_0 . Разложим H в ряд в окрестности этой точки: $H(x) = H_0 + \frac{1}{2}H_2(x - X_0)^2 + \dots$

Анзац сохраняет свою форму, однако легко понять, что H в экспонентах надо заменить на H_0 .

Кроме того, в правой части G возникают дополнительные члены, аналогичные рассмотренным в разделе 4. Именно, они пропорциональны $H'(X_i)(x - X_i)$. Их вклад в уравнение движения аддитивен, поэтому сразу ясно, что по сравнению с (5.11) и (5.12) будет дополнительный член, равный правой части (5.14). Ее можно разложить в ряд при малых $X_i - X_0$, $i = 1, 2$ (еще раз напомним, что эффект взаимодействия существует только при малом r и, значит, малых $X_i - X_0$, когда оба кинка около дефекта).

Окончательное уравнение для эволюции расстояния r принимает вид

$$\nu dr/dt = -\epsilon^2 H_2 r + 8H_0\epsilon \exp(-H_0 r/\epsilon). \quad (5.15)$$

Это уравнение описывает эволюцию $r(t)$ к равновесному расстоянию $r_{\text{eq}}(\epsilon)$

$$r_{\text{eq}} = -\epsilon H_0^{-1} (\ln(\epsilon^2 H_2/(8H_0)) + O(\ln \ln \epsilon)). \quad (5.16)$$

Соответствующее время релаксации может быть найдено линеаризацией (5.15) вблизи r_{eq} , что дает

$$\tau_4 \approx c\epsilon^{-2}. \quad (5.17)$$

Эффект, описанный здесь, приводит к образованию связанного состояния из двух стенок и узкой полоски из устойчивой фазы между ними. Эту полоску можно назвать микрофазой (микродоменом).

Возникнет микродомен или нет, зависит от начальных условий, в частности от множества особенностей (3.7). В одномерном случае множество особенностей Ω_0 должно состоять по крайней мере из двух точек, разделяющих всю область на три подобласти, и начальная функция ψ не должна удовлетворять неравенству (3.1). Это означает физически, что в начальный момент должны быть “зародыши” по меньшей мере трех различных доменов, соответствующих минимумам потенциала в $(2n + 1)\pi$.

Отметим, что для начальных данных $\Psi(x)$ “общего положения”, когда разность $\Psi - 2\pi n$ имеет только простые нули для всех целых n , кинки стартуют, разделенные расстоянием $r_0 \gg r_{eq}$ и никогда не сближаются на расстояния, меньшие чем $r_{eq} \gg O(\epsilon)$. Это обеспечивает корректность данного подхода.

6. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ КИНКОВ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В предыдущем разделе было выяснено, что связанное состояние возникает при приближении двух кинков с координатами $X_1(t)$, $X_2(t)$ и одного заряда к равновесному состоянию X_0 , дающему невырожденный локальный минимум H .

Этот результат обобщается на двумерный случай. Предположим, что существует замкнутая гладкая кривая Γ , дающая невырожденный локальный минимум функционала Ферма (4.7). Далее, пусть образуются два кинка одинакового заряда (две доменные стенки), которые сосредоточены вблизи кривых $S_1(t)$, $S_2(t)$, зависящих от времени, и приближаются к кривой Γ при эволюции по закону (4.1). Легко показать, что такая ситуация действительно возможна.

В самом деле, пусть критическое множество Ω_0 , определенное в разделе 3, состоит из двух кривых S_i^0 , $i = 1, 2$, достаточно близких к Γ . Вводя в окрестности Γ стандартные координаты ρ, s , можно записать их уравнения в виде $\rho = X_i(s)$, $X_2 > X_1$. Далее, кинки одинакового заряда возникают, если начальные данные $\psi(x, y) = \psi(\rho, s)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi(\rho, s) &< 0 && \text{(для } \rho < X_1(s)), \\ \psi(\rho, s) &\in (0, 2\pi) && \text{(для } \rho \in (X_1(s), X_2(s))), \\ \psi(\rho, s) &> 2\pi && \text{(для } \rho > X_2(s)). \end{aligned}$$

Чтобы показать, что доменные границы с координатами $\rho = X_i(s, t)$ действительно приближаются к Γ , используем разложение коэффициента H в ряд вблизи Γ , аналогичное использованному в разделе 5. Получаем

$$H(\rho, s) = H_0(s) + H_1(s)\rho + \frac{1}{2}H_2(s)\rho^2 + \dots \quad (6.1)$$

Уравнение движения имеет вид $\nu v_i(s) = \epsilon^2(\kappa_i - b(s))$, где κ_i – кривизны, $v = dX_1/dt$ – нормальные скорости фронтов ($b(s)$ определено в разделе 4). Разлагая b в ряд с использованием (6.1), получаем, пренебрегая пока эффектами взаимодействия (и учитывая, что на Γ выполнено $\kappa(s) = -H_1(s)/H_0(s)$),

$$dX_i/dt = -\epsilon^2 a(s) X_i(t), \quad (6.2)$$

где $a(s) = H_2(s)/H_0(s) > 0$.

Отсюда видно, что $X_i(t) \rightarrow 0$, как и утверждалось. Эффект взаимодействия приводит к дополнительному члену, существенному на расстояниях $r(s, t) \approx O(\epsilon \log \epsilon)$. Вычисление этого эффекта теперь тривиально ввиду возможности построений, аналогичных проведенным в разделе 5, и аддитивности этого эффекта относительно эффекта неоднородности среды, связанного с (6.2).

В самом деле, можно написать анзац, обобщающий (5.4):

$$\phi_0(\rho, s, t\epsilon) = \chi(\rho, \epsilon)Y_1(\rho, X_1(t), \epsilon) + (1 - \chi(\rho, \epsilon))Y_2(\rho, X_2(t), \epsilon). \quad (6.3)$$

Дальнейшие вычисления, связанные с этим анзацем, полностью повторяют вычисления из раздела 5, за исключением того, что здесь необходимо учитывать параметрическую зависимость всех величин от s . В итоге имеем, что на расстояниях $|X_i|$ порядка $O(\epsilon \log \epsilon)$ и больше от Γ верны уравнения

$$\nu \frac{\partial X_1}{\partial t} = -\epsilon^2 a(s)X_1 - 4H_0(s)\epsilon \exp(-H_0(s)(X_2 - X_1)/\epsilon), \quad (6.4)$$

$$\nu \frac{\partial X_2}{\partial t} = -\epsilon^2 a(s)X_2 - 4H_0(s)\epsilon \exp(-H_0(s)(X_2 - X_1)/\epsilon). \quad (6.5)$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим, что в координатах ρ, s “центр масс” $X(s, t) = X_1 + X_2$ системы кинков стремится к нулю, т.е. к кривой Γ , а для расстояния $r(s, t)$ между ними имеем

$$\nu dr/dt = -\epsilon^2 a(s)r + 8\epsilon \exp(-Hr/\epsilon). \quad (6.6)$$

Равновесное расстояние в первом приближении определяется формулой

$$r_{\text{eq}}(s) \approx -H_0^{-1}(s)\epsilon \ln(\epsilon^2 H_2(s)/(8H_0(s))). \quad (6.7)$$

Отметим, что в работах [35–37] были предложены строгие методы обоснования асимптотик рассмотренного здесь типа (в одномерном случае и для постоянного H). Проведение подобной процедуры обоснования требует отдельной большой работы, поэтому мы пошли другим путем.

Мы провели численные расчеты по проверке данного подхода. Был рассмотрен одномерный случай с $H = 1 + (x - 1)^2$ на интервале $(0, 2)$ с нулевыми условиями Неймана на концах. Получено, что даже для умеренных $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.025$ результаты качественно и количественно подтверждаются. Кинки движутся по направлению к минимуму H в точке $x = 1$; скорость движения замедляется при уменьшении ϵ ; образуется связанное состояние с центром в $x = 1$. Величина расстояния $r_{\text{eq}}(\epsilon)$ (в одномерном случае) получилась равной: для $\epsilon = 0.1$ – около 0.51, для $\epsilon = 0.05$ – около 0.31, для $\epsilon = 0.025$ – около 0.18.

Все эти значения с хорошей точностью аппроксимируются формулой (5.16). По этой формуле получаются соответственно значения 0.59, 0.37, 0.22. Заметим, что теория неплохо работает даже в первом случае, когда “микродомен” на самом деле не мал.

Расчеты производились с помощью стандартных конечно-разностных методов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели задачи кинетики образования равновесных структур в жидких кристаллах (в рамках модели, предложенной в работах [21–24]). Показано, что существуют три различных процесса, описывающих выход решения на равновесный режим. Эти процессы следующие:

- 1) возникновение (зарождение) доменных стенок. Соответствующее время релаксации определяется формулой (3.8) и имеет порядок $O(\ln \epsilon)$;
- 2) рост доменных стенок вплоть до момента, когда их структура становится стационарной по времени. Соответствующее время релаксации определяется формулой (3.13) и имеет порядок $O(1)$;
- 3) движение доменных стенок к равновесному положению или до их исчезновения (сжатие в точку). Соответствующее время релаксации определяется формулой (4.6) и имеет порядок $O(\epsilon^{-2})$;
- 4) образование структур из стенок, разделенных узкими слоями шириной $O(\epsilon \ln \epsilon)$ (микродоменами). Соответствующее время релаксации определяется формулой (5.17) и имеет порядок $O(\epsilon^{-2})$.

Если множество начальных особенностей Ω_0 (см. (3.7)) пусто, тогда возникает тривиальное решение и выход на это равновесие происходит за время $O(\ln \epsilon)$.

Эти времена релаксации определяют минимальные характерные времена, лимитирующие скорость быстрогодействия устройства, работающего на жидких кристаллах.

Отметим, что основной результат теории Γ -сходимости (теорема 4.1) после некоторой модификации оказывается верным даже для переменных H , давая грубое описание равновесной структуры. Именно, величины a, b из формулировки теоремы могут принимать любые значения, равные $(2n + 1)\pi$. В первом приближении энергия F_N стенки Γ , разделяющей состояния $a = (2n_1 + 1)\pi$, $b = (2n_2 + 1)\pi$, равна $|\sigma| \int_{\Gamma} H(s) ds$. Здесь “заряд” σ равен $n_2 - n_1$.

В действительности, как мы видели выше, такая стенка состоит из $n_2 - n_1$ стенок (кинков), разделенных расстояниями порядка $O(\epsilon \ln \epsilon)$. Теория Γ -сходимости как бы не замечает этой сложной структуры. В самом деле, она игнорирует любые домены, площади которых исчезающе малы при $\epsilon \rightarrow 0$.

При этом не учитывается малая энергия связи доменных стенок и не описываются детали строения этих “микродоменов”. Такое описание, однако возможно в рамках представленного здесь подхода. Наши численные расчеты показали, что учет образования этих микродоменов может быть необходимым, поскольку эффект возможен и для очень малых ϵ , когда реальный размер “микродомена” не очень мал.

Результаты полностью переносятся на случай мультистабильного потенциала Φ , зависящего от векторного параметра порядка и инвариантного относительно дискретной группы симметрии. Лишь постоянные в формулах для времен релаксации и других параметров могут зависеть от деталей строения Φ . Сами же характерные зависимости от ϵ и H остаются прежними.

Авторы выражают благодарность Э.Л. Аэро за постановку задачи и ценные замечания и В.Г. Данилову за интересные обсуждения.

Работа поддержана РФФИ, грант N 94 -01-01018-а.

Список литературы

- [1] Allen S., Cahn J. // Acta Metallurgica. 1979. V. 27. P. 1084.
- [2] Cahn J. W., Hilliard J. H. // J. Chem. Phys. 1958. V. 28. №2. P. 258.

- [3] *Owen N. C., Rubinstein J., Sternberg P.* // Proc. R. Soc. London. 1990. V. A429. P. 505.
- [4] *Sternberg P.* // Rocky Mountain J. of Math. 1991. V. 21. №2. P. 799.
- [5] *Fife P. C.* Mathematical aspects of reacting and diffusing systems. Berlin: Springer, 1979.
- [6] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [7] *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1977.
- [8] *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
- [9] *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [10] *Ладыженская О. А.* // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 25.
- [11] *Чуешов И.Д.* // УМН. 1993. Т. 48. Вып. 3. С. 135.
- [12] *Воловик Г.Е., Минеев В. П.* // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. С. 647.
- [13] *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. С. 605.
- [14] *Волосов К.А., Маслов В.П., Данилов В.Г.* Математическое моделирование процессов изготовления СБИС. М.: Наука, 1984.
- [15] *Маслов В.П., Омеляннов Г.Е.* // УМН. 1981. Т. 36. №3.
- [16] *Данилов В.Г.* // Матем. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 3. С. 77.
- [17] *De Mottoni P., Schatzman P.* // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser I Math. 1989. V. 309. P. 453.
- [18] *Rubinstein J., Keller J., Sternberg P.* // Siam J. on Appl. Math. 1989. V. 49. P. 116.
- [19] *Kohn R.V., Bronsard L.* // J. Diff. Eq. 1991. V. 90. P. 211.
- [20] *Брусев П.Н., Попов В.Н.* Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988.
- [21] *Де Жень П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
- [22] *Аэро Э.Л., Булыгин А.Н.* // ФТТ. 1971. Т. 13. №6. С. 1701.
- [23] *Аэро Э.Л.* // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65. Вып. 2. С. 342.
- [24] *Аэро Э.Л., Захаров А.В.* // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. ВИНТИ, 1988. Т. 3. Вып. 2. С. 163.
- [25] *De Giorgi E.* // Boll. Un. Mat. Ital. 1977. V. 14A. №5. P. 213.
- [26] *Modica L.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1987. V. 98. P. 123.
- [27] *Modica L.* // Annales Inst. H. Poincare. L'Analyse Nonlineaire. 1987. V. 5. P. 453.
- [28] *Jolly M.* // J. Diff. Equat. 1989. V. 78. P. 220.
- [29] *Бабич М.В.* // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. Вып. 3. С. 63.
- [30] *Бабич М. В.* // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 1. С. 57.
- [31] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- [32] *Fife P.C., Macleod J.B.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 65. P. 335.
- [33] *Cage M., Hamilton R.S.* // J. Diff. Geom. 1986. V. 23. P. 69.
- [34] *Фоменко А.Т.* Вариационные проблемы в топологии. М.: Наука, 1982.
- [35] *Fusco G.A.* Geomtric approach to the dynamics of $u_t = \epsilon^2 u + f(u)$ // Lect. Notes in Phys. 359. Berlin-Heidelberg: Springer, 1990. P. 53-73.
- [36] *Carr J., Pego R.* Very slow phase separation in one dimension // Lect. Notes in Phys. 344. / Ed. M. Rasele et al. Springer, 1989. P. 216.
- [37] *Carr J., Pego R.* // Comm. Pure and Appl. Math. 1989. V. 42. P. 523.

Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Поступила в редакцию
26.VII.1995 г.

N.M. Bessonov, S.A. Vakulenko

CONNECTED KINK STATES IN NONLINEAR INHOMOGENEOUS MEDIA

The equation $\phi_t = \epsilon^2 \Delta \phi + H^2(x, y) \sin \phi$ is considered arising in liquid crystal physics. The kink formation and motion are studied. The relaxation times are calculated. It is shown that there are possible connected kink states. Parameters of these states are found for small ϵ .