Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Алабердин, А. А. Вихорева, А. М. Савченко, Б. И. Садовников, К методу Н. Н. Боголюбова в теории сверхпроводимости, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 129–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:58:57

Е. Р. Алабердин, А. А. Вихорев, А. М. Савченко, Б. И. Садовников
**К МЕТОДУ Н. Н. БОГОЛЮБОВА В
ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ**

Исследуется гамильтониан Фрелиха, дополненный электрон-бозонным взаимодействием четвертого порядка по фермионным операторам. Данный гамильтониан учитывает обменное взаимодействие магнитных моментов электронов проводимости. Бозонный спектр системы составляют нормальные моды связанных фонон-магнонных колебаний. На основе метода Н. Н. Боголюбова в теории сверхпроводимости и обобщенного канонического преобразования получена система уравнений совместной компенсации “опасных” – приводящих к расходимости в теории возмущений – диаграмм, соответствующих рождению из вакуума двух (бивершины) и четырех (тетравершины) электронных возбуждений. Обусловленная четырехфермионными взаимодействиями модификация уравнения компенсации бивершин свидетельствует о потенциальной возможности эффективного усиления входящей в гамильтониан Фрелиха константы электрон-бозонной связи и увеличения сверхпроводящей энергетической щели. Выполнено численное исследование полученной системы уравнений, обнаружено значительное увеличение энергетической щели по сравнению с аналогичным результатом в стандартной модели Фрелиха.

Широко известный в теории сверхпроводимости и сверхтекучести метод компенсации “опасных” диаграмм [1], созданный Н. Н. Боголюбовым в 1957 г., позволил дать строгое математическое обоснование феноменологических предпосылок предшествующих теорий сверхпроводимости [2, 3], а также привел к появлению важной для понимания самого явления концепции коллективных электронных возбуждений, имеющих положительно-определенный спектр энергий и ненулевую энергию вакуума. Такие возбуждения представляют собой реально существующие формы движения сверхпроводящей системы и описываются посредством канонического преобразования электронных операторов. Каноническое преобразование в данном случае определяет коллективное фермионное возбуждение как квазичастицу.

Как известно, для получения характерных результатов теории сверхпроводимости, гармонирующих с результатами БКШ [2], оказалось достаточным компенсировать “опасные” диаграммы, соответствующие рождению из вакуума двух электронных возбуждений с противоположными импульсами и спинами, т. е. “опасные” электронные бивершины [1]. При этом использовался модельный гамильтониан Фрелиха [4], содержащий электрон-фононное взаимодействие второго порядка по фермионным операторам. В той же основополагающей работе [1] и в последующих обобщающих исследованиях Н. Н. Боголюбовым было показано, что представление о коллективных электронных

возбуждениях как куперовских парах является концептуально важным первым приближением, но оно не может быть абсолютизировано, и, вообще говоря, мы имеем дело с коллективными возбуждениями всего электронного конденсата как с целостной системой. С математической точки зрения этот вывод приводит нас к обобщению канонического преобразования электронных операторов. А именно, обобщенное каноническое преобразование должно обеспечивать возможность совместной компенсации “опасных” электронных диаграмм, соответствующих рождению из вакуума не только двух (бивершины), но также и четырех (тетравершины), шести (гексавершины) и т.д. фермионных возбуждений с попарно противоположными спинами и нулевым суммарным импульсом.

Дальнейшее теоретическое исследование высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) [5, 6] предсказывает эффективное усиление входящей в гамильтониан Фрелиха константы электрон-фононной связи и указывает на особую роль четырехфермионных процессов в ВТСП-системах. В данной работе исследуется обменное взаимодействие полей электронной намагниченности, т.е. магнитных моментов электронов проводимости. По своей природе такое взаимодействие является диполь-дипольным и существенно дополняет подробно изученное в моделях сверхпроводимости взаимодействие типа монополю-монополю, например между электронами проводимости и ионами кристаллической решетки, последнее учитывает, в частности, модель Фрелиха.

Плотность магнитных диполей – электронная намагниченность – пропорциональна плотности электронов с фиксированным равновесным направлением спина, поэтому обменное взаимодействие между полями электронной намагниченности в сочетании со спин-фононными (бозонными) возбуждениями порождает в сверхпроводящей системе электрон-бозонную связь четвертого порядка по фермионным операторам. Бозонный спектр системы составляют нормальные моды связанных фонон-магнонных колебаний.

Таким образом, ставится задача применения метода компенсации “опасных” диаграмм [1] для определения характеристик сверхпроводящей системы, описываемой гамильтонианом, содержащим как гамильтониан Фрелиха, так и вышеупомянутое электрон-бозонное взаимодействие четвертого порядка по фермионным операторам. Это задача совместной компенсации “опасных” электронных диаграмм, соответствующих рождению из вакуума двух (бивершины) и четырех (тетравершины) фермионных возбуждений. В дальнейшем изложении будем для краткости говорить о совместной компенсации бивершин и тетравершин, подразумевая, что это “опасные” – приводящие к расходимостям в теории возмущений – квазичастичные электронные вершины.

Гамильтониан исследуемой модели следующий:

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad (1)$$

где

$$H_0 = V \int d^3k [\mathcal{E}(k) a_k^{\sigma+} a_k^{\sigma} + \omega_S(k) b_{k,S}^+ b_{k,S}] \quad (2)$$

задает спектр невзаимодействующих фермионных и бозонных возбуждений,

$$H_1 = V^2 \int d^9k \delta \left(\sum_{i=1}^3 \vec{k}_i \right) \sqrt{g\omega_0\omega_S(k_3)} \tau_{\sigma}^S a_{k_1}^{\sigma+} a_{-k_2}^{\sigma} b_{k_3,S}^+ + \text{с.с.}, \quad (3)$$

$$H_2 = V^4 \int d^{15}k \delta \left(\sum_{i=1}^5 \vec{k}_i \right) \sqrt{\varepsilon\omega_0\omega_S(k_5)} a_{k_2}^{1+} a_{k_1}^{0+} a_{-k_3}^0 a_{-k_4}^1 (b_{k_5,S}^+ + b_{-k_5,S}) + \text{с.с.} \quad (4)$$

задают электрон-бозонное взаимодействие соответственно второго и четвертого порядков по фермионным операторам.

Фермионные операторы $a_k^{\sigma+}$, a_k^{σ} описывают электронные возбуждения, σ – спиновый индекс ($\sigma = 0, 1$), $\mathcal{E}(k) = E(k) - \lambda$. Бозонные операторы $b_{k,s}^+$, $b_{k,s}$ – описывают нормальные моды связанных фонон-магнонных колебаний, s – номер дисперсионной ветви. Фактор τ_{σ}^S является комплексной величиной, удовлетворяющей условию $|\tau_{\sigma}^S| = 1$ и определяющей сигнатуру взаимодействия нормальной моды типа s со спином электрона. Так, для чистых фононов $\tau_0^S = \tau_1^S = 1$, а для чистых магнонов $\tau_0^S = -\tau_1^S = 1$. Параметр λ определяет уровень Ферми, $E(k)$ – энергия электрона, g и ε – константы связи, V – объем, ω_0 – масштабная энергетическая постоянная, $d^{3n}k = \prod_{i=1}^n d^3k_i$, $n = 1, 3, 5$.

Ранее считалось, что взаимодействие (4) мало по величине и не приводит к существенным эффектам. Однако используемое в дальнейшем обобщенное каноническое преобразование показывает, что в сверхпроводящих системах со взаимодействием (4) фермионные квазичастицы представляют собой коллективные возбуждения всего электронного конденсата как целостной системы. Именно этот коллективный эффект обеспечивает существенное влияние даже небольшого по величине четырехфермионного взаимодействия (4) на сверхпроводимость в исследуемой системе.

Для решения поставленной задачи необходимо перейти к коллективным электронным возбуждениям (квазичастицам) с помощью канонического преобразования электронных операторов, будем исходить из общего определения: $A' = UAU^{-1}$, где $U^{-1} = U^+$, A – преобразуемый оператор. Унитарный оператор U определим следующим образом: $U = U_1U_2$, где $U_1 = \exp(iS_1)$ соответствует преобразованию Боголюбова и обеспечивает возможность компенсации бивершин [7, 8], оператор $U_2 = \exp(iS_2)$ обеспечивает возможность компенсации тетравершин. Эрмитовы операторы S_1 и S_2 имеют вид

$$S_1 = iV \int d^3k \gamma_k (a_k^{1+} a_{-k}^{0+} - a_{-k}^0 a_k^1),$$

$$S_2 = \frac{i}{4} V^2 \int d^3k d^3q X_{kq} (a_q^{1+} a_{-k}^{0+} a_{-q}^{1+} a_k^{0+} - a_k^0 a_{-q}^1 a_{-k}^0 a_q^1).$$

Весовые функции γ_k , X_{kq} в силу изотропии импульсного пространства и антикоммутируемости фермионных операторов обладают следующими свойствами:

$$X_{kq} = -X_{k,-q}, \quad X_{kq} = X_{-k,-q}, \quad X_{kq} = X_{qk}, \quad \gamma_k = \gamma_{-k}.$$

Для практических вычислений гораздо удобнее другая форма записи канонического преобразования:

$$A' = U_1U_2AU_2^{-1}U_1^{-1} = U_1U_2U_1^{-1}(U_1AU_1^{-1})U_1U_2^{-1}U_1^{-1},$$

где вначале совершается преобразование Боголюбова, а затем преобразование, обеспечивающее возможность компенсации тетравершин, но при этом в оператор $U_{21} = U_1U_2U_1^{-1}$ входят уже однократно преобразованные электронные операторы вида

$U_1 a_k^{\sigma+} U_1^{-1}$ и $U_1 a_k^{\sigma} U_1^{-1}$. Воспользовавшись формулой Хаусдорфа, получим известные соотношения

$$\begin{aligned}\alpha_k^0 &= U_1 a_k^0 U_1^{-1} = u_k a_k^0 - v_k a_{-k}^{1+}, \\ \alpha_k^1 &= U_1 a_k^1 U_1^{-1} = u_k a_k^1 + v_k a_{-k}^{0+}, \\ u_k &= \cos \gamma_k, \quad v_k = \sin \gamma_k.\end{aligned}\tag{5}$$

Тогда оператор $U_{21} = U_1 U_2 U_1^{-1}$ представим в виде $U_{21} = \exp(iS_{21})$, где эрмитов оператор

$$S_{21} = \frac{i}{4} V^2 \int d^3 k d^3 q X_{kq} (\alpha_q^{1+} \alpha_{-k}^{0+} \alpha_{-q}^{1+} \alpha_k^{0+} - \alpha_k^0 \alpha_{-q}^1 \alpha_{-k}^0 \alpha_q^1).$$

Новые операторы β_k^0, β_k^1 определяются равенствами

$$\begin{aligned}\beta_k^0 &= U_{21} U_1 a_k^0 U_1^{-1} U_{21}^{-1} = U_{21} \alpha_k^0 U_{21}^{-1}, \\ \beta_k^1 &= U_{21} U_1 a_k^1 U_1^{-1} U_{21}^{-1} = U_{21} \alpha_k^1 U_{21}^{-1},\end{aligned}$$

но в дальнейшем будем преобразовывать непосредственно билинейные комбинации операторов $\alpha_k^{\sigma+}, \alpha_k^{\sigma}$, входящие в гамильтониан после преобразования Боголюбова. Введем обозначения

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{kq}^0 &= \alpha_k^{0+} \alpha_q^0, \quad \mathcal{N}_{kq}^1 = \alpha_{-q}^{1+} \alpha_{-k}^1, \quad \mathcal{C}_{kq} = \alpha_k^0 \alpha_{-q}^1, \\ \mathcal{N}_{kq}^0 &= \beta_k^{0+} \beta_q^0, \quad \mathcal{N}_{kq}^1 = \beta_{-q}^{1+}, \quad \mathcal{C}_{kq} = \beta_k^0 \beta_{-q}^1.\end{aligned}$$

Суммированием ряда Хаусдорфа получим в квадратичном приближении по $\mathcal{C}_{kq}$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{kq}^0 &= U_{21} \mathcal{N}_{kq}^0 U_{21}^{-1} = \mathcal{N}_{kq}^0 + \frac{1}{2} V \int d^3 l [(\omega_{kl} \omega_{ql} - 1) \mathcal{C}_{ql} \mathcal{C}_{kl}^+ + \\ &+ t_{kl} t_{ql} \mathcal{C}_{-q, -l}^+ \mathcal{C}_{-k, -l} + \omega_{kl} t_{ql} \mathcal{C}_{-q, -l}^+ \mathcal{C}_{kl}^+ + t_{kl} \omega_{ql} \mathcal{C}_{ql} \mathcal{C}_{-k, -l}],\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{kq}^1 &= U_{21} \mathcal{N}_{kq}^1 U_{21}^{-1} = \mathcal{N}_{kq}^1 + \frac{1}{2} V \int d^3 l [(\omega_{lq} \omega_{lk} - 1) \mathcal{C}_{lk} \mathcal{C}_{lq}^+ + \\ &+ t_{lq} t_{lk} \mathcal{C}_{-l, -k}^+ \mathcal{C}_{-l, -q} + \omega_{lq} t_{lk} \mathcal{C}_{-l, -k}^+ \mathcal{C}_{lq}^+ + t_{lq} \omega_{lk} \mathcal{C}_{lk} \mathcal{C}_{-l, -q}],\end{aligned}\tag{7}$$

$$\mathcal{C}_{kq} = U_{21} \mathcal{C}_{kq} U_{21}^{-1} = \omega_{kq} \mathcal{C}_{kq} - t_{kq} \mathcal{C}_{-k, -q}^+.\tag{8}$$

Подставляя обращенное преобразование (8) в формулы (6), (7) и совершая после этого нормальное упорядочение операторов $\mathcal{C}_{kq}, \mathcal{C}_{kq}^+$, находим обратные преобразования:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{kq}^0 &= \left(1 + V \int d^3 l Q_{kql}^0\right) \mathcal{N}_{kq}^0 + \delta(\vec{k} - \vec{q}) \int d^3 l Q_{kkl}^0 (\mathcal{N}_{ll}^1 - 1) - \\ &- V \int d^3 l [\Psi_{kql}^0 \mathcal{C}_{-q, -l}^+ \mathcal{C}_{kl}^+ + \Phi_{kql}^0 \mathcal{C}_{ql} \mathcal{C}_{-k, -l} + \\ &+ P_{kql}^0 \mathcal{C}_{-q, -l}^+ \mathcal{C}_{-k, -l} + Q_{kql}^0 \mathcal{C}_{kl}^+ \mathcal{C}_{ql}], \\ \mathcal{N}_{kq}^1 &= \left(1 + V \int d^3 l Q_{kql}^1\right) \mathcal{N}_{kq}^1 + \delta(\vec{k} - \vec{q}) \int d^3 l Q_{kql}^1 (\mathcal{N}_{ll}^0 - 1) - \\ &- V \int d^3 l [\Psi_{kql}^1 \mathcal{C}_{-l, -k}^+ \mathcal{C}_{lq}^+ + \Phi_{kql}^1 \mathcal{C}_{lk} \mathcal{C}_{-l, -q} + \\ &+ P_{kql}^1 \mathcal{C}_{-l, -k}^+ \mathcal{C}_{-l, -q} + Q_{kql}^1 \mathcal{C}_{lq} \mathcal{C}_{lk}], \\ \mathcal{C}_{kq} &= \omega_{kq} \mathcal{C}_{kq} + t_{kq} \mathcal{C}_{-k, -q}^+, \end{aligned}$$

где $\omega_{kq} = \text{ch } X_{kq}$, $t_{kq} = \text{sh } X_{kq}$,

$$\begin{aligned} Q_{kql'l'}^0 &= \frac{1}{2}(\text{ch } 2X_{kl} \text{ch } 2X_{q'l'} - \text{ch } X_{kl} \text{ch } X_{q'l'}), & Q_{kql'l'}^1 &= Q_{l'lqk}^0, \\ P_{kql'l'}^0 &= \frac{1}{2}(\text{sh } 2X_{kl} \text{sh } 2X_{q'l'} - \text{sh } X_{kl} \text{sh } X_{q'l'}), & P_{kql'l'}^1 &= P_{l'lqk}^0, \\ \Psi_{kql'l'}^0 &= \frac{1}{2}(\text{ch } 2X_{kl} \text{sh } 2X_{q'l'} - \text{ch } X_{kl} \text{sh } X_{q'l'}), & Psi_{kql'l'}^1 &= \Psi_{l'lqk}^0, \\ \Phi_{kql'l'}^0 &= \frac{1}{2}(\text{sh } 2X_{kl} \text{ch } 2X_{q'l'} - \text{sh } X_{kl} \text{ch } X_{q'l'}), & Phi_{kql'l'}^1 &= \Phi_{l'lqk}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Путем последовательного проведения преобразования Боголюбова (5), а затем преобразований (6), (7), (8), выразим исходный гамильтониан (1) через новые операторы $\beta_k^{\sigma+}$, β_k^{σ} . Будем иметь

$$H = U_0 + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}_{1,1} + \mathcal{H}_{1,2} + \mathcal{H}_{2,1} + \mathcal{H}_{2,2}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= V \int d^3k \left[\xi(k) \left(1 + V \int d^3l Q_{kkl}^{\sigma} \right) + V \int d^3l \xi(l) Q_{kkl}^{\sigma} \right] N_{kk}^{\sigma} + \\ &\quad + V^2 \int d^3k d^3l [\xi(k) + \xi(l)] 2Q_{kkl}^0 C_{kl}^+ C_{kl}, \\ \mathcal{H}_{01} &= V \int d^3k 2\mathcal{E}(k) u_k v_k (\omega_{kk} + t_{kk}) (C_{kk}^+ + C_{kk}) + \\ &\quad + V^2 \int d^3k d^3l [\xi(k) + \xi(l)] \Psi_{kkl}^0 (C_{-k,-l}^+ C_{kl}^+ + C_{kl} C_{-k,-l}), \\ \mathcal{H}_{1,1} &= V^2 \int d^9k \delta(k_1 - k_2 - k_3) \sqrt{g\omega_0\omega_S(k_3)} (\tau_{\sigma}^S u_{k_1} u_{k_2} - \tau_{\bar{\sigma}}^S v_{k_1} v_{k_2}) \times \\ &\quad \times \left(1 + V \int d^3l Q_{k_1 k_2, l}^{\sigma} \right) N_{k_1 k_2}^{\sigma} b_{-k_3, S}^+ + \text{э.с.}, \\ \mathcal{H}_{1,2} &= V^2 \int d^9k \delta(k_1 - k_2 - k_3) \sqrt{g\omega_0\omega_S(k_3)} (\tau_0^S u_{k_1} u_{k_2} + \tau_1^S v_{k_1} v_{k_2}) \times \\ &\quad \times (\omega_{k_1 k_2} + t_{k_1 k_2}) (C_{k_1 k_2} + C_{-k_1, -k_2}^+) b_{-k_3, S}^+ + \text{э.с.}, \\ \mathcal{H}_{2,1} &= V^4 \int d^{15}k \delta(k_1 - k_2 - k_3 + k_4 - k_5) \sqrt{\varepsilon\omega_0\omega_S(k_5)} R_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} \times \\ &\quad \times C_{k_1 k_2}^+ C_{k_3 k_4} (b_{-k_5, S}^+ + b_{k_5, S}) + \text{э.с.}, \\ \mathcal{H}_{2,2} &= V^4 \int d^{15}k \delta(k_1 - k_2 - k_3 + k_4 - k_5) \sqrt{\varepsilon\omega_0\omega_S(k_5)} L_{k_1 k_2}^{k_3 k_4} \times \\ &\quad \times C_{-k_3, -k_4}^+ C_{k_1 k_2}^+ (b_{-k_5, S}^+ + b_{k_5, S}) + \text{э.с.}, \\ U_0 &= V \int d^3k 2\mathcal{E}(k) \left[v_k^2 - V \int d^3l Q_{kkl}^0 \right]. \end{aligned}$$

В перечисленных выше слагаемых гамильтониана (10) использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{E}(k) = E(k) - \lambda, \quad \xi(k) = \mathcal{E}(k)(u_k^2 - v_k^2), \quad (11)$$

а также вспомогательные:

$$\begin{aligned} R_{kq}^{hp} &= \phi_{kqh p}^{(1)} \text{ch}(X_{kq} + X_{hp}) + \phi_{kqh p}^{(2)} \text{sh}(X_{kq} + X_{hp}), \\ L_{kq}^{hp} &= \phi_{kqh p}^{(1)} \text{sh}(X_{kq} + X_{hp}) + \phi_{kqh p}^{(2)} \text{ch}(X_{kq} + X_{hp}), \\ \phi_{kqh p}^{(1)} &= (u_k u_p + v_k v_p)(u_h u_q + v_h v_q), \quad \phi_{kqh p}^{(2)} = (u_k u_q v_h v_p + v_k v_q u_h u_p), \end{aligned}$$

σ – спиновый индекс, $\bar{\sigma}$ – инверсный спиновый индекс.

Вектор состояния вакуума $\mathcal{L}_V$ для новых квазичастиц определяется условиями

$$N_{kk}^\sigma \mathcal{L}_V = 0, \quad \sigma = 0, 1,$$

т.е. в состоянии, описываемом вектором $\mathcal{L}_V$, все числа заполнения для новых квазичастиц равны нулю.

Рис. 1. Диаграммная запись уравнений совместной компенсации “опасных” электронных бивершин и тетравершин. Процессы, изображенные справа, возникают в результате совместного действия на вакуум указанных гамильтонианов.

Условие совместной компенсации “опасных” электронных бивершин и тетравершин представляет собой систему связанных нелинейных интегральных уравнений. С помощью диаграмм эта система может быть символически записана в виде, изображенном на рис. 1, где слева стоят компенсируемые “опасные” вершины, а справа – компенсирующие диаграммы. Последние возникают в результате совместного действия на вакуум указанных на рис. 1 гамильтонианов, описывающих фермион-бозонное взаимодействие.

Выписывая согласно теории возмущений соответствующие коэффициенты в указанных на рис. 1 комбинациях гамильтонианов и в гамильтониане $\mathcal{H}_{01}$ и приравнявая нулю сумму энергетических вкладов “опасных” и компенсирующих диаграмм, получим искомую систему уравнений

$$\begin{cases} 4\mathcal{E}(k)u_kv_k(\omega_{kk} + t_{kk}) = \Gamma_k^1 + \Gamma_{-k}^1, \\ 2[\xi(k) + \xi(q)]\omega_{kq}t_{kq}\{2(\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) - 1\} = \Gamma_{kq}^2 + \Gamma_{-k,-q}^2 - \Gamma_{k,-q}^2 - \Gamma_{-k,q}^2, \end{cases} \quad (12)$$

где Γ_k^1 — коэффициент при $C_{kk}^+\mathcal{L}_V$ в выражении $\mathcal{H}_{1,1}\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{H}_{1,2}\mathcal{L}_V$, Γ_{kq}^2 — коэффициент при $C_{-k,-q}^+C_{kq}^+\mathcal{L}_V$ в выражении $\mathcal{H}_{2,1}\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{H}_{2,2}\mathcal{L}_V$. Симметризация относительно зеркального отражения импульса, в первом уравнении, связана с изотропией импульсного пространства и физической тождественностью двух проекций спина. Симметризация относительно зеркального отражения обоих импульсов и антисимметризация относительно отражения одного из импульсов, во втором уравнении, связаны, кроме вышеперечисленного, с антикоммутацией фермионных операторов в произведении $C_{-k,-q}^+C_{kq}^+$.

Взаимная связь уравнений системы (12) приводит к некоторой модификации ядра уравнения компенсации бивершин, полученного в работе [1]. Можно сказать, что решение второго уравнения (компенсации тетравершин) осуществляет “модуляцию” ядра первого уравнения. Первое уравнение системы (12) таково:

$$\tilde{\mathcal{E}}(k)u_kv_k = (u_k^2 - v_k^2)g\omega_0V \int d^3q \sum_S \text{Re}(\tau_0^{*S}\tau_1^S)G_k^q(s)u_qv_q, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}(k) = \mathcal{E}(k) - g\omega_0V \int d^3q \sum_S G_k^q(s)(u_q^2 - v_q^2).$$

Ядро

$$G_k^q(s) = \frac{\omega_S(k-q)(1 + I_{kq})\exp(X_{kq} - X_{kk})}{\omega_S(k-q) + \eta_k^1\xi(k) + \eta_q^1\xi(q) + \mu_{kq}^1} \quad (14)$$

содержит “модулирующие” множители

$$\eta_k^1 = 1 + I_{kk} - 2Q_{kq}, \quad \eta_q^1 = 1 + I_{qq} - 2Q_{qk}$$

и “модулирующее” смещение

$$\mu_{kq}^1 = V \int d^3l \xi(l)[Q_{kl} + Q_{ql}],$$

где

$$I_{kq} = V \int d^3l Q_{kql}^0, \quad Q_{kq} = Q_{kkqq}^0 = Q_{kqkq}^1, \quad (15)$$

величина Q_{kql}^0 определена в (9).

Коэффициенты u_q , v_q не зависят от направления импульса, поэтому ядро $G_k^q(s)$ должно быть усреднено по направлениям импульса $\vec{q}$, тогда оно будет зависеть только от модулей импульсов $\vec{k}$, $\vec{q}$. Значение усредненного по поверхности Ферми ядра $G_k^q(s)$

является максимальным и может рассматриваться как коэффициент усиления (или ослабления) константы электрон-бозонной связи g . Эффективная константа связи определяется равенством

$$g_{\text{eff}} = g \sum_S \zeta_S \text{Re}(\tau_0^{*S} \tau_1^S),$$

где

$$\zeta_S = \langle G_k^q(s) \rangle_{|\vec{k}|=|\vec{q}|=k_F}.$$

Отсюда, используя (14), получим приближенную формулу для ζ_S :

$$\zeta_S = \zeta_{0S}(1 + I_{kk})|_{|\vec{k}|=k_F}, \quad \zeta_{0S} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \frac{\omega_S \{k \sqrt{2(1-t)}\}}{\omega_S \{k \sqrt{2(1-t)}\} + \mu_{kk}^1} \Big|_{|\vec{k}|=k_F}. \quad (16)$$

Коэффициент ζ_S может быть больше или меньше единицы, достоверные выводы о его величине можно сделать, если известно решение уравнения компенсации тетравершин X_{kq} . В предельном случае, когда четырехфермионное взаимодействие (4) отсутствует, функция X_{kq} тождественно равна нулю и коэффициент ζ_S равен единице.

Чтобы выявить поведение ядра $G_k^q(s)$ и, в частности, коэффициента ζ_S , обратимся к исследованию уравнения компенсации тетравершин. При нахождении явного вида этого уравнения будем предполагать, что коэффициенты u_k^2 , v_k^2 стремятся к “тета”-функциям, т.е. к асимптотическим решениям уравнения компенсации бивершин:

$$u_k^2 \rightarrow \theta(|\vec{k}| - k_F), \quad v_k^2 \rightarrow \theta(k_F - |\vec{k}|). \quad (17)$$

Тогда коэффициент Γ_{kq}^2 во втором уравнении системы (12) следующий:

$$\begin{aligned} \Gamma_{kq}^2 = & V^2 \int d^3h d^3p F_{kq}^{hp} \times \\ & \times \left[(u_k^2 u_q^2 u_h^2 u_p^2 + v_k^2 v_q^2 v_h^2 v_p^2) \left\{ \text{ch}(X_{kq} + X_{hp}) \text{sh}(X_{hq} + X_{kp}) + \frac{1}{2} \text{sh}(2X_{kq} + 2X_{hp}) \right\} + \right. \\ & + (u_k^2 u_q^2 v_h^2 v_p^2 + v_k^2 v_q^2 u_h^2 u_p^2) \left\{ \text{sh}(X_{kq} + X_{hp}) \text{sh}(X_{hq} + X_{kp}) + \frac{1}{2} \text{sh}(2X_{kq} + 2X_{hp}) \right\} + \\ & \left. + (u_k^2 v_q^2 v_h^2 u_p^2 + v_k^2 u_q^2 u_h^2 v_p^2) \left\{ \text{ch}(X_{kq} + X_{hp}) \text{ch}(X_{hq} + X_{kp}) + \frac{1}{2} \text{sh}(2X_{kq} + 2X_{hp}) \right\} \right], \quad (18) \end{aligned}$$

где несимметризованное ядро F_{kq}^{hp} имеет вид

$$F_{kq}^{hp} = \sum_S \frac{\varepsilon \omega_0 \omega_S (k - q - h + p)}{\omega_S (k - q - h + p) + \eta_k \xi(k) + \eta_q \xi(q) + \eta_h \xi(h) + \eta_p \xi(p) + \mu_{kqh p}} \quad (19)$$

и содержит “модулирующие” множители

$$\begin{aligned} \eta_k &= 1 + I_{kk} - 2Q_{kq} - 2Q_{kp}, & \eta_q &= 1 + I_{qq} - 2Q_{kq} - 2Q_{hq}, \\ \eta_h &= 1 + I_{hh} - 2Q_{hp} - 2Q_{hq}, & \eta_p &= 1 + I_{pp} - 2Q_{hp} - 2Q_{kp}, \end{aligned} \quad (20)$$

а также “модулирующее” смещение

$$\mu_{kqh p} = V \int d^3 l \xi(l) [Q_{kl} + Q_{ql} + Q_{hl} + Q_{pl}]. \quad (21)$$

Величины I_{kq} , Q_{kq} определены равенствами (15). Выполняя операцию симметризации и антисимметризации коэффициента Γ_{kq}^2 , определенную в (12), получим основной результат данной работы – уравнение компенсации “опасных” тетравершин:

$$\begin{aligned} \omega_{kq} t_{kq} \left[\frac{\xi(k) + \xi(q)}{2} \{2(\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) - 1\} + V^2 \int d^3 h d^3 p F_{\{kq\}}^{\{hp\}} (\omega_{hp}^2 + t_{hp}^2) \right] = \\ = -(\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) V^2 \int d^3 h d^3 p \left(\sum_{J=1}^3 \Theta_{kqh p}^J \right) F_{[kq]}^{[hp]} \omega_{hp} t_{hp} - \\ - V^2 \int d^3 h d^3 p \left[\Theta_{kqh p}^1 F_{\langle kq \rangle}^{\langle hp \rangle} (\omega_{kq} \omega_{hp} \omega_{hq} t_{kp} + t_{kq} t_{hp} t_{hq} \omega_{kp}) + \right. \\ + \Theta_{kqh p}^1 F_{(kq)}^{(hp)} (\omega_{kq} \omega_{hp} t_{hq} \omega_{kp} + t_{kq} t_{hp} \omega_{hq} t_{kp}) + \\ + \Theta_{kqh p}^2 F_{\langle kq \rangle}^{\langle hp \rangle} (t_{kq} \omega_{hp} \omega_{hq} t_{kp} + \omega_{kq} t_{hp} t_{hq} \omega_{kp}) + \\ + \Theta_{kqh p}^2 F_{(kq)}^{(hp)} (t_{kq} \omega_{hp} t_{hq} \omega_{kp} + \omega_{kq} t_{hp} \omega_{hq} t_{kp}) + \\ + \Theta_{kqh p}^3 F_{\{kq\}}^{\{hp\}} (t_{kq} t_{hp} \omega_{hq} \omega_{kp} + \omega_{kq} \omega_{hp} t_{hq} t_{kp}) + \\ \left. + \Theta_{kqh p}^3 F_{[kq]}^{\{hp\}} (\omega_{kq} \omega_{hp} \omega_{hq} \omega_{kp} + t_{kq} t_{hp} t_{hq} t_{kp}) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Левая часть и первое слагаемое в правой части уравнения (22) воспроизводят (в гиперболических функциях) структуру уравнения компенсации бивершин (13). Остальные слагаемые в правой части (22) являются выражением того факта, что пара электронов с согласованными спинами не эквивалентна настоящему бозону. Интересно отметить наличие среди указанных слагаемых неоднородного слагаемого, содержащего произведение четырех гиперболических косинусов.

В уравнении (22) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Theta_{kqh p}^1 &= u_k^2 u_q^2 u_h^2 u_p^2 + v_k^2 v_q^2 v_h^2 v_p^2, \\ \Theta_{kqh p}^2 &= u_k^2 u_q^2 v_h^2 v_p^2 + v_k^2 v_q^2 u_h^2 u_p^2, \\ \Theta_{kqh p}^3 &= u_k^2 v_q^2 v_h^2 u_p^2 + v_k^2 u_q^2 u_h^2 v_p^2. \end{aligned}$$

Различными видами скобок обозначены линейные комбинации:

$$\begin{aligned} F_{\{kq\}}^{hp} &= \frac{1}{4} (F_{kq}^{hp} + F_{-k,-q}^{hp} + F_{k,-q}^{hp} + F_{-k,q}^{hp}), \\ F_{[kq]}^{hp} &= \frac{1}{4} (F_{kq}^{hp} + F_{-k,-q}^{hp} - F_{k,-q}^{hp} - F_{-k,q}^{hp}), \\ F_{(kq)}^{hp} &= \frac{1}{4} (F_{kq}^{hp} - F_{-k,-q}^{hp} + F_{k,-q}^{hp} - F_{-k,q}^{hp}), \\ F_{\langle kq \rangle}^{hp} &= \frac{1}{4} (F_{kq}^{hp} - F_{-k,-q}^{hp} - F_{k,-q}^{hp} + F_{-k,q}^{hp}), \end{aligned}$$

аналогично для верхних переменных h, p .

Благодаря стремлению коэффициентов u_k^2, v_k^2 к “тета”-функциям (17) искомая функция X_{kq} расщепляется на четыре компоненты по секторам пространства импульсов $\vec{k}, \vec{q}$. Импульсное пространство Ω , ($\Omega = \{ \vec{k}, \vec{q} : |\vec{k}| < \kappa, |\vec{q}| < \kappa \}$, κ – верхняя граница импульсов) распадается на четыре области:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{ \vec{k}, \vec{q} : |\vec{k}| > k_F, |\vec{q}| < k_F \}, & \Omega_2 &= \{ \vec{k}, \vec{q} : |\vec{k}| < k_F, |\vec{q}| > k_F \}, \\ \Omega_3 &= \{ \vec{k}, \vec{q} : |\vec{k}| > k_F, |\vec{q}| > k_F \}, & \Omega_4 &= \{ \vec{k}, \vec{q} : |\vec{k}| < k_F, |\vec{q}| < k_F \}.\end{aligned}$$

Приступим к численному исследованию уравнения компенсации тетравершин (22). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}b_0 &= V^2 \int d^3h d^3p F_{\{kq\}}^{\{hp\}} \frac{\omega_{hp}^2 + t_{hp}^2}{\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2}, \\ b_1 &= -V^2 \int d^3h d^3p F_{[kq]}^{[hp]} \frac{\omega_{hp} t_{hp}}{\omega_{kq} t_{kq}} \Theta_{kqh p}^3, \\ \tilde{b}_1 &= -V^2 \int d^3h d^3p F_{[kq]}^{[hp]} \frac{\omega_{hp} t_{hp}}{\omega_{kq} t_{kq}} (\Theta_{kqh p}^1 + \Theta_{kqh p}^2), \\ b_2 &= V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^1 \left\{ F_{\langle kq \rangle}^{\langle hp \rangle} \frac{\omega_{hp} \omega_{hq} t_{kp}}{\omega_{kq} \omega_{kq} t_{kq}} + F_{(kq)}^{(hp)} \frac{\omega_{hp} t_{hq} \omega_{kp}}{\omega_{kq} t_{kq} \omega_{kq}} \right\}, \\ b_3 &= V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^1 \left\{ F_{\langle kq \rangle}^{\langle hp \rangle} \frac{t_{hp} t_{hq} \omega_{kp}}{t_{kq} t_{kq} \omega_{kq}} + F_{(kq)}^{(hp)} \frac{t_{hp} \omega_{hq} t_{kp}}{t_{kq} \omega_{kq} t_{kq}} \right\}, \\ b_4 &= V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^2 \left\{ F_{(kq)}^{\langle hp \rangle} \frac{\omega_{hp} \omega_{hq} t_{kp}}{\omega_{kq} \omega_{kq} t_{kq}} + F_{\langle kq \rangle}^{(hp)} \frac{\omega_{hp} t_{hq} \omega_{kp}}{\omega_{kq} t_{kq} \omega_{kq}} \right\} + \\ &\quad + V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^2 \left\{ F_{(kq)}^{\langle hp \rangle} \frac{t_{hp} t_{hq} \omega_{kp}}{t_{kq} t_{kq} \omega_{kq}} + F_{\langle kq \rangle}^{(hp)} \frac{t_{hp} \omega_{hq} t_{kp}}{t_{kq} \omega_{kq} t_{kq}} \right\}, \\ b_5 &= -V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^3 \left\{ F_{\{kq\}}^{[hp]} \frac{t_{hp} \omega_{hq} \omega_{kp}}{t_{kq} \omega_{kq} \omega_{kq}} + F_{\{kq\}}^{[hp]} \frac{\omega_{hp} t_{hq} t_{kp}}{\omega_{kq} t_{kq} t_{kq}} \right\}, \\ b_6 &= -V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^3 F_{[kq]}^{\{hp\}} \frac{\omega_{hp} \omega_{hq} \omega_{kp}}{\omega_{kq} \omega_{kq} \omega_{kq}}, \\ b_7 &= -V^2 \int d^3h d^3p \Theta_{kqh p}^3 F_{[kq]}^{\{hp\}} \frac{t_{hp} t_{hq} t_{kp}}{t_{kq} t_{kq} t_{kq}}, \\ a_0 &= \frac{\xi(k) + \xi(q)}{2}.\end{aligned}$$

Используя введенные обозначения, запишем уравнение (22) в виде

$$\begin{aligned}2\omega_{kq} t_{kq} [a_0 \{2(\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) - 1\} + (\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) b_0] = \\ = 2\omega_{kq} t_{kq} (\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2) (b_1 + \tilde{b}_1) - \\ - 2\omega_{kq}^3 t_{kq} b_2 - 2\omega_{kq} t_{kq}^3 b_3 - 2\omega_{kq}^2 t_{kq}^2 b_4 + \\ + 2\omega_{kq}^2 t_{kq}^2 b_5 + 2\omega_{kq}^4 b_6 + 2t_{kq}^4 b_7.\end{aligned}\tag{23}$$

Введем новую переменную $y = \operatorname{th} 2X_{kq}$, т.к. $\omega_{kq} = \operatorname{ch} X_{kq}$, $t_{kq} = \operatorname{sh} X_{kq}$, то,

$$y = \frac{2\omega_{kq}t_{kq}}{\omega_{kq}^2 + t_{kq}^2},$$

В области $(\Omega_3 \cup \Omega_4)$ уравнение (23) после несложных преобразований принимает вид

$$(a_0 + \delta)y\sqrt{1 - y^2} = (\tilde{\beta} + 2a_0)y + \gamma y^2,$$

где

$$\tilde{\beta} = b_0 - \tilde{b}_1 + \frac{1}{2}(b_2 + b_3), \quad \gamma = \frac{1}{2}b_4, \quad \delta = -\frac{1}{2}(b_2 - b_3).$$

Это уравнение имеет тривиальное решение.

Уравнение (23) в области $(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ имеет вид

$$(a_0y + \tau)\sqrt{1 - y^2} = (\beta + 2a_0)y - \alpha - \chi y^2, \quad (24)$$

где

$$\beta = (b_0 - b_1), \quad \alpha = (b_6 + b_7), \quad \tau = (b_6 - b_7), \quad \chi = \frac{1}{2}b_5 - \frac{1}{2}(b_6 + b_7). \quad (25)$$

Пренебрегая коэффициентами τ и χ по сравнению с α и β , перепишем уравнение (24):

$$a_0y\sqrt{1 - y^2} = (\beta + 2a_0)y - \alpha.$$

Решение данного уравнения аппроксимируется функцией

$$y = \frac{\alpha}{\beta + a_0}, \quad (26)$$

являющейся его асимптотическим решением при $a_0 \rightarrow 0$ и $a_0 \rightarrow \infty$.

При численном исследовании коэффициенты α и β считались не зависящими от импульсов $\vec{k}$, $\vec{q}$ и равными их значениям на поверхности Ферми. Далее, с помощью метода простой итерации решалась система уравнений (13), (25). Отметим, что при подстановке функции (26) в выражения для коэффициентов b_0 , b_1 , b_6 , b_7 уравнения (25) записываются в виде

$$\begin{cases} \beta = b_0(\alpha, \beta) - b_1(\alpha, \beta), \\ \alpha = b_6(\alpha, \beta) + b_7(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Результат этого исследования представлен на рис. 2, где изображена функция

$$C(k) = \mathcal{E}(k) \operatorname{tg} 2\gamma_k = \mathcal{E}(k) \frac{2u_kv_k}{u_k^2 - v_k^2}.$$

Кривая 1 соответствует решению уравнения компенсации бивершин (13), входящего в систему (13), (22), а кривая 2 – решению уравнения компенсации Н.Н. Боголюбова [1]

Рис. 2. Вид функции $C(k)$: кривая 1 – решение уравнения компенсации бивершин (13), входящего в систему (13), (22); кривая 2 – решение уравнения компенсации бивершин для стандартной модели Фрелиха.

для стандартной модели Фрелиха. Данные решения были получены при следующих значениях параметров:

$$\lambda/E_F = 1, \quad \omega_0/E_F = 1, \quad V k_F^3 = 10^3, \quad \varepsilon = 10^{-6}, \quad g = 4 * 10^{-4},$$

где E_F – энергия Ферми.

При этом предполагалось, что в исследуемой сверхпроводящей системе существует только одна бозонная ветвь, соответствующая линейной дисперсионной зависимости вида $\omega_S(k) = c_S k$, и $c_S \approx v_F$, где v_F – скорость электронов на поверхности Ферми.

При указанных значениях параметров энергетическая щель $\Delta = C(k_F)$ увеличивается более чем в два раза по сравнению с аналогичным результатом в стандартной модели Фрелиха (см. рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Постановка задачи совместной компенсации “опасных” электронных бивершин и тетравершин привела к возникновению нового класса нелинейных интегральных уравнений и конкретной реализации обобщенного канонического преобразования. Решение полученной системы уравнений позволяет сделать вывод о значимости обменных диполь-дипольных взаимодействий для ВТСП. Выбранная модель на основе метода Н.Н. Боголюбова раскрывает не только известное разрушительное, но и возможное созидательное влияние магнонов (спиновых волн) на сверхпроводящее состояние.

Проведенное численное исследование полученной системы уравнений показывает, что учет тетравершин приводит к повышению точности асимптотического решения уравнения компенсации бивершин и вызывает эффективное усиление входящей в гамильтониан Фрелиха константы электрон-бозонной связи. При этом возрастает энергетическая (сверхпроводящая) щель, а, следовательно, и критическая температура T_c .

Список литературы

- [1] Боголюбов Н.Н. // Избранные труды в трех томах. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1971. С. 11–38.
- [2] Bardin J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. // Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 162; V. 108. P. 1175.
- [3] Shafroth M. R., Butler S. T., Blatt J. M. // Helv. Phys. Acta 1957. V. 30. P. 93.
- [4] Frölich H. // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 845.
- [5] Савченко М. А. Обзоры по высокотемпературной сверхпроводимости. Вып. 1. М.: МЦНТИ, 1990.
- [6] Вихорев А. А., Савченко М. А., Садовников Б. И. // Вестн. МГУ. 1994. Т. 35. № 3. С. 50–55.
- [7] Kopp H., Mühlischlegel B. // Zs. Phys. 1958. B. 151. S. 613–629.
- [8] Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Шумовский А. С. Математические методы статистической механики модельных систем. М.: Наука, 1989.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
19.VII.1995 г.

E. R. Alaberdin, A. A. Vichorev, A. M. Savchenko, B. I. Sadovnikov
TO BOGOLUBOV'S METHOD IN SUPERCONDUCTIVITY

The Frohlich Hamiltonian with electron-boson interaction of the fourth degree in fermion operators is studied. The Hamiltonian takes into account the exchange interaction of electron magnetic moments of conductivity. The boson spectrum consists of normal modes of connected phonon-magnon oscillations. The system of equations describing the compensation of “dangerous” diagrams that correspond to birth from vacuum two (bivertexes) and four (tetravertexes) electron excitements is obtained by using Bogolubov's method. The modification of bivertex compensation equation stimulated by four-fermion interactions leads to the possibility of increasing the constant of the electron-boson connection and the energetic split. The numerical investigation of this system of equations is carried out. Considerable increasing of the energetic split in comparison with the Frohlich model is revealed.