Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов, Ренормгрупповое исследование корреляционных функций и составных операторов в модели стохастической магнитной гидродинамики, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 1, 142–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:12:44

Л. Ц. Аджемян, Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов
**РЕНОРМГРУППОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СОСТАВНЫХ
ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ
МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

Методом ренормгруппы изучается скейлинговое поведение корреляционных функций в развитой турбулентности стохастической магнитной гидродинамики. Ранее известные результаты дополнены исследованием инфракрасных асимптотик функций Грина с произвольным числом внешних полей в кинетическом и магнитном режимах. Особо рассмотрен вопрос динамического скейлингового поведения в магнитном режиме. Вычислены критические размерности составных операторов функционала энергии. С помощью операторного разложения Вильсона изучен вопрос о зависимости корреляционных функций в инерционном интервале от интегрального масштаба турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] и [2] методами ренормализационной группы (РГ) исследовалось критическое поведение в модели, описываемой системой стохастических уравнений магнитной гидродинамики

$$\mathcal{D}_t \varphi_i = \nu \Delta \varphi_i - \partial_i p + (\theta \partial) \theta_i + F_i^\varphi, \quad \mathcal{D}_t = \partial_t + \varphi \partial, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}_t \theta_i = \nu' \Delta \theta_i + (\theta \partial) \varphi_i + F_i^\theta. \quad (2)$$

Здесь поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\theta(\mathbf{x}, t)$ поперечны (векторное поле скорости φ — вследствие несжимаемости жидкости ($\partial_i \varphi_i = 0$), псевдовекторное поле θ связано соотношением $\theta = \mathbf{B} / \sqrt{4\pi \varrho}$ с поперечным полем магнитной индукции $\mathbf{B}$, ϱ — плотность среды), ν — коэффициент кинематической вязкости, p — давление. В дальнейшем вместо $\nu' = c^2 / 4\pi \sigma$ (σ — проводимость, c — скорость света) будем использовать безразмерную константу u — обратное число Прандтля, причем $\nu' = u\nu$.

Для обычной гидродинамической внешней случайной силы F^φ и магнитной случайной силы F^θ (ротора случайного тока) предполагается гауссово распределение с матрицей корреляторов

$$\begin{aligned} D_{is}^{\varphi\varphi} &= g_0 \nu_0^3 P_{is} k^{4-d-2\varepsilon}, & D_{is}^{\theta\theta} &= g'_0 \nu_0^3 P_{is} k^{4-d-2a\varepsilon}, \\ D_{is}^{\varphi\theta} &= g''_0 \nu_0^3 \varepsilon_{ism} k_m k^{3-d-(1+a)\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3)$$

в импульсно-частотном представлении (от частоты корреляторы D_{is} не зависят), P_{is} – поперечный проектор, d – размерность пространства (полностью антисимметричный псевдотензор ε_{ism} , вообще говоря, определен только при $d = 3$).

Амплитудные множители g_0 в корреляторах играют роль констант связи, положительная константа a – произвольный параметр теории. Параметр ε служит для построения разложения корреляционных функций, физическим значением ε считается $\varepsilon_p = 2$, что моделирует “подкачку энергии от крупномасштабного движения”.

Система уравнений (1)–(3), была исследована в [1] в первом порядке по ε с помощью рекурсионных соотношений Вильсона. Показано, что в зависимости от значений констант g_0 , g'_0 и u_0 в рассматриваемой системе могут реализовываться два разных скейлинговых режима, – так называемые “кинетический” и “магнитный”, связанные с существованием двух инфракрасно (ИК) устойчивых фиксированных точек преобразования РГ. В [1] были определены критические асимптотики спектральных плотностей энергии $\langle \varphi(\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) \rangle$ и $\langle \theta(\mathbf{k})\theta(-\mathbf{k}) \rangle$. В [2] методом квантово-полевой РГ была рассмотрена более общая постановка задачи со включением перекрестного коррелятора случайной силы $D^{\varphi\theta}$ и обсуждался случай гиротропной турбулентности.

Используемые в [1] и [2] разные РГ-подходы, по-видимому, полностью эквивалентны, имеющиеся между ними различия носят скорее терминологический характер. Так, исследование [1] в вильсоновской схеме РГ ограничено двумя корреляционными функциями, в то время как в квантово-полевой РГ, кроме критических размерностей параметров теории, вводятся понятия критических размерностей полей Δ_ϕ (ϕ обозначает поля $\varphi, \varphi'; \theta, \theta'$; корреляционные функции с участием вспомогательных полей φ', θ' – функции отклика), которые определяют скейлинговые асимптотики всех возможных корреляционных функций теории:

$$G_{N_\phi}(x_1, t_1, \dots, x_N, t_N) \simeq s^{-\sum_\phi \Delta_\phi N_\phi} \times \\ \times \bar{G}_{N_\phi}(x_1 s^{-1}, t_1 s^{\Delta_t}, \dots, x_N s^{-1}, t_N s^{\Delta_t}), \quad s \rightarrow 0, \quad (4)$$

где N_ϕ – число внешних линий типа ϕ в функции Грина (корреляционной функции) G , Δ_t – критическая размерность времени, s – безразмерный масштабный параметр. Критические размерности полей определяются формулой

$$\Delta_\phi = d_\phi^p + \Delta_\omega d_\phi^\omega + \gamma_\phi^*, \quad (5)$$

d_ϕ^p и d_ϕ^ω – соответственно импульсная и частотная канонические размерности поля ϕ , критическая размерность частоты $\Delta_\omega = -\Delta_t = 2 - \gamma_\nu^*$; γ_ν^* и γ_ϕ^* – аномальные размерности вязкости и полей ϕ , соответствующие данному критическому режиму. В первом порядке по ε аномальные размерности были вычислены в [2].

Специфика рассматриваемой задачи (1)–(3) заключается в том, что в связи с нулевыми значениями зарядов в фиксированных точках коэффициенты при формально старших степенях скейлингового параметра s в (4) для многих функций Грина, т.е. $\bar{G}_{N_\phi}(x_1 s^{-1}, t_1 s^{\Delta_t}, \dots, x_N s^{-1}, t_N s^{\Delta_t})$, обращаются в нуль во всех порядках теории возмущений (подробнее об этом см. в разделе 3), поэтому скейлинговые соотношения (4) с вычисленными в [2] критическими размерностями становятся чисто формальными. Нами были исследованы эти особенности скейлинговых функций $\bar{G}_{N_\phi}(x_1, t_1 s^{\Delta_t}, \dots, x_N s^{-1}, t_N s^{\Delta_t})$, в результате было получено скейлинговое соотношение (4) для корреляционных функций в кинетическом режиме с новыми по сравнению с [2] критическими размерностями полей.

Показано, что в магнитном критическом режиме скейлингового поведения в смысле (4) в рассматриваемой теории, строго говоря, нет, т.е. невозможно ввести критические размерности полей, описывающие ИК-асимптотики одновременно всех корреляционных функций Грина. В разделе 4 перечислены функции Грина, для которых известным образом нарушается соотношение (4) в фиксированной точке.

Как известно [3], гипотеза Колмогорова о независимости турбулентных спектров от интегрального масштаба турбулентности (“ИК-массы”) в инерционном интервале не выполняется для разновременных корреляционных функций. Это связано с существованием в теории опасных операторов, обладающих отрицательной критической размерностью (например, φ^n). Для одновременных функций гипотеза выполняется, поскольку такие функции являются галилеево-инвариантными объектами (на ненулевых импульсах) и на их свойства отмеченные галилеево-неинвариантные составные операторы влияния не оказывают.

В настоящее время в обычной теории турбулентности неизвестны галилеево-инвариантные опасные составные операторы. С этой точки зрения было интересно рассмотреть критические размерности операторов степеней полей в магнитной гидродинамике, принимая во внимание, что θ^n – здесь галилеево-инвариантен.

РГ-исследование [1, 2] стохастической магнитной гидродинамики дополнено в данной статье вычислением критических размерностей составных операторов – локальных плотностей энергий. В результате показано, что гипотеза Колмогорова о независимости корреляционных функций в инерционном интервале от ИК-массы в кинетическом скейлинговом режиме нарушается в рассматриваемой задаче для функций Грина с участием полей θ даже для одновременных функций.

2. РЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ. ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ РГ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В соответствии с общей теоремой [4–6] стохастическая задача (1), (2), (3) эквивалентна квантовой теории удвоенного числа полей с функционалом действия [2]

$$\begin{aligned} S_R = & \frac{1}{2}g\nu^3 M^{2\varepsilon} \varphi' D^{\varphi\varphi} \varphi' + \frac{1}{2}g'\nu^3 M^{2a\varepsilon} \theta' D^{\theta\theta} \theta' + g''\nu^3 M^{(1+a)\varepsilon} \varphi' D^{\varphi\theta} \theta' + \\ & + \varphi' [-\partial_t \varphi + Z_1 \nu \Delta \varphi - (\varphi \partial) \varphi + Z_3 (\theta \partial) \theta] + \\ & + \theta' [-\partial_t \theta + Z_2 \nu u \Delta \theta - (\varphi \partial) \theta + (\theta \partial) \varphi] \end{aligned} \quad (6)$$

(нужные интегрирования по $\mathbf{x}$, t и суммирования по индексам подразумеваются), вспомогательные поля φ' , θ' поперечны, как и φ , θ (поэтому из действия выпадает член с давлением (1)), мы выделили явно все амплитудные множители из корреляторов (3), $D^{\phi\phi}$ в (4) обозначают интегральные операторы – простые степени импульса в импульсном представлении, множители g играют роль констант связи, M – ренормировочная масса.

Теория (6) логарифмична при $\varepsilon = 0$, ее ренормировка подробно изучена в [1]. В [2] приведено уже ренормированное действие (рассматривается случай произвольной размерности пространства $d > 2$), при этом в соответствии с [2] однопетлевые константы ренормировки Z_i равны

$$Z_1 = 1 - \frac{gd(d-1)}{4B\varepsilon} - \frac{g'(d^2 + d - 4)}{4Bau^2\varepsilon},$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g(d+2)(d-1)}{2Bu(u+1)\varepsilon} - \frac{g'(d+2)(d-3)}{2Bau^2(u+1)\varepsilon}, \quad (7)$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g}{Bu\varepsilon} - \frac{g'}{Bau^2\varepsilon},$$

где $B = d(d+2)(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Отметим, что неренормированное действие восстанавливается по (4) переходом от ренормированных переменных $e = \{g, g', g'', u, \nu\}$ к неренормированным e_0 (связанным с ренормированными соотношениями $e_0 = eZ_e M^{\dim e}$) и приравниванием всех констант ренормировки Z_i единице.

В [2] мультипликативная ренормировка теории осуществляется с помощью констант ренормировки полей и зарядов:

$$Z_\varphi = Z_{\varphi'} = 1, \quad Z_\theta = Z_{\theta'}^{-1} = Z_3^{1/2}, \quad Z_\nu = Z_1, \quad Z_u = Z_2 Z_1^{-1},$$

$$Z_g = Z_1^{-3}, \quad Z_{g'} = Z_3 Z_1^{-3}, \quad Z_{g''} = Z_3^{1/2} Z_1^{-3}, \quad (8)$$

что приводит к следующим выражениям для РГ-функций (коэффициентов уравнения РГ):

$$\gamma_\varphi = \gamma_{\varphi'} = 0, \quad \gamma_\theta = -\gamma_{\theta'} = \frac{1}{2}\gamma_3, \quad \gamma_\nu = \gamma_1,$$

$$\beta_g = g[-2\varepsilon + 3\gamma_1], \quad \beta_{g'} = g'[-2a\varepsilon - \gamma_3 + 3\gamma_1], \quad (9)$$

$$\beta_{g''} = g''[-\varepsilon - a\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma_3 + 3\gamma_1], \quad \beta_u = u[\gamma_1 - \gamma_2],$$

где γ_α определяются соотношениями $\gamma_i = M \partial_M |_{e_0} \ln Z_i$, а $\beta_{g_\alpha} = M \partial_M |_{e_0} g_\alpha$ для всех четырех зарядов g, g', g'', u .

Нули β -функций (9) определяют положения фиксированных точек, с которыми связаны варианты скейлингового поведения системы. В [1, 2] по β -функциям (7), (9) были найдены положения шести фиксированных точек рассматриваемой теории, из которых лишь две ИК-устойчивы (“кинетическая” и “магнитная” точки). Удобными переменными являются новые константы связи: $g_1 = g/Bu$, $g_2 = g'/Bu^2$, $g_3 = g''/Bu^3$, в которых при $d = 3$ в первом порядке по ε положение кинетической точки определяется соотношениями

$$g_1^* = \frac{\varepsilon(1+u^*)}{15}, \quad g_2^* = 0, \quad u^* = \frac{\sqrt{43/3}-1}{2}, \quad (10)$$

а магнитной –

$$g_1^* = u^* = 0, \quad g_2^* = a\varepsilon. \quad (11)$$

Магнитная фиксированная точка устойчива при $a \geq 0,25$, кинетическая – при $a < 1,16$. Вместо g_3 введен новый безразмерный параметр ρ такой, что $g_3 = \rho\sqrt{g_1 g_2}$, при этом вследствие (9) $\beta_\rho = 0$, поэтому ρ является, в сущности, не зарядом, а произвольным (в пределах неравенства $|\rho| \leq 1$, вытекающего из требования положительности матрицы корреляторов) параметром теории.

3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ФИКСИРОВАННАЯ ТОЧКА

Теория возмущений в теории (6) строится с использованием следующих пропагаторных функций и вершин взаимодействия:

$$\langle \varphi_i(\mathbf{k}, t) \varphi'_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 = P_{ij} e^{-\nu k^2 t} \theta(t);$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_i(\mathbf{k}, t) \varphi_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \frac{1}{2} P_{ij} g \nu^2 k^{2-d-2\varepsilon} M^{2\varepsilon} e^{-\nu k^2 |t|}, \\
\langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \theta'_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= P_{ij} \theta(t) e^{-\nu u k^2 t}, \\
\langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \theta_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \frac{1}{2} P_{ij} \frac{g' \nu^2 k^{2-d-2a\varepsilon}}{u} M^{2a\varepsilon} e^{-\nu u k^2 |t|}, \\
\langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \varphi_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \varepsilon_{isj} \frac{g'' \nu^2 k^{1-d-(1+a)\varepsilon}}{(1+u)} M^{(1+a)\varepsilon} k_s \times \\
&\quad \times [e^{-u \nu k^2 t} \theta(t) + e^{\nu k^2 t} \theta(-t)]; \tag{12}
\end{aligned}$$

Пропагаторы написаны здесь в импульсно-временном представлении, $\theta(t)$ – θ -функция (все вершины содержат производную по координатам, две первые вершины симметричны по основным полям φ , θ , третья антисимметрична).

Первые члены разложения, к примеру, парных корреляционных функций $\langle \varphi \varphi \rangle$ и $\langle \theta \theta \rangle$ при этом имеют вид

$$\begin{aligned}
\langle \varphi \varphi \rangle = G_{\varphi\varphi} &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \\
&+ \frac{1}{2} \text{diagram 4} + \frac{1}{2} \text{diagram 5} + \\
&+ \frac{1}{2} \text{diagram 6} + \dots, \\
\langle \theta \theta \rangle = G_{\theta\theta} &= \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \\
&+ \frac{1}{2} \text{diagram 9} + \text{diagram 10} + \dots \tag{13}
\end{aligned}$$

Скейлинговые функции $\bar{G}_{N_\phi}$ обычно получаются из соответствующих функций Грина, вычисленных в теории возмущений по константам взаимодействия g_i , заменой в них

всех переменных на РГ-инвариантные аналоги (вместо последних используют их асимптотики $\bar{x} \sim x/s$, $\bar{t} \sim ts^{\Delta_t}$ и т.д., а для инвариантных зарядов $\bar{g}_i$ – их значения в фиксированной точке g_i^*).

Из соображений размерности произвольная корреляционная функция $G_{N_\phi}^R$ представима в виде

$$G_{N_\phi}^R = \mu^\gamma \nu^\beta \tilde{G}(x_i \mu, \nu \mu^2 t_i, g_\alpha),$$

где μ – ренормировочная масса. Уравнение РГ позволяет написать для функций $\tilde{G}$ выражение

$$\tilde{G} = s^{-\sum_\Phi \Delta_\Phi N_\Phi} \tilde{G}(x_i s^{-1}, \bar{\nu} \mu^2 t_i, \bar{g}_\alpha),$$

где $\bar{g}_\alpha$ – совокупность инвариантных зарядов – первых интегралов уравнения РГ, удовлетворяющих условию $\bar{g}_\alpha(g_\alpha, s_i)|_{s_i=1} = g_\alpha$.

Для нахождения ИК-асимптотик в функции Грина обычно заменяют $\bar{g}_\alpha$ на их асимптотики в фиксированных точках $\bar{g}_\alpha^*$ при $s \rightarrow 0$. В этом случае $s^{-\sum_\Phi \Delta_\Phi N_\Phi}$ определяет ИК-поведение соответствующей функции Грина. Однако из (13) видно, что скейлинговые функции для функций Грина с участием полей θ пропорциональны $\bar{g}_2^*$, $\bar{g}_3^*$, равным нулю в кинетической фиксированной точке. Скейлинговые функции полей θ при этом также обращаются в нуль. Следовательно, в теории (6) замена инвариантных зарядов, стремящихся в ИК-асимптотике к нулю, на их значение в фиксированной точке является слишком грубым приближением. Для этих инвариантных зарядов следует воспользоваться более точными асимптотическими оценками $\bar{g}_i \approx a_i s^{\omega_i}$, где ω_i – соответствующие поправочные индексы. Поэтому для обсуждения скейлингового поведения теории надо определить, каким степеням зарядов пропорциональна та или иная корреляционная функция.

Для общего решения данной проблемы удобно избавиться от пропорциональных $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ множителей в корреляционных функциях, содержащих поля θ , сделав в теории (6) растяжение полей

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \sqrt{g' \nu^3} M^{a_\varepsilon} \theta, & \theta' &\rightarrow \theta' / \sqrt{g' \nu^3} M^{a_\varepsilon}, \\ \varphi &\rightarrow \sqrt{g \nu^3} M^\varepsilon \varphi, & \varphi' &\rightarrow \varphi' / \sqrt{g \nu^3} M^\varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

(поля φ и φ' растянуты для единообразия). При этом ренормированное действие теории приобретает вид

$$\begin{aligned} S_R = & \frac{1}{2} g \nu^3 M^{2\varepsilon} \varphi' D^{\varphi\varphi} \varphi' + \frac{1}{2} g' \nu^3 M^{2a_\varepsilon} \theta' D^{\theta\theta} \theta' + \rho \varphi' D^{\varphi\theta} \theta' + \\ & + \varphi' \left[-\partial_t \varphi + Z_1 \nu \Delta \varphi - g^{1/2} \nu^{3/2} M^\varepsilon (\varphi \partial) \varphi + Z_3 g' g^{-1/2} \nu^{3/2} M^{(2a-1)\varepsilon} (\theta \partial) \theta \right] + \\ & + \theta' \left[-\partial_t \theta + Z_2 u \nu \Delta \theta - g^{1/2} \nu^{3/2} M^\varepsilon (\varphi \partial) \theta + g^{1/2} \nu^{3/2} M^\varepsilon (\theta \partial) \varphi \right], \end{aligned} \quad (15)$$

т.е. в результате преобразования (14) константа взаимодействия g' переносится из пропагатора в вершину взаимодействия. В форме записи (15) мультипликативная ренормировка теории (аналог (8)) осуществляется следующими константами Z :

$$\begin{aligned} Z_\varphi = Z_{\varphi'} = Z_\theta = Z_{\theta'} = 1, & \quad Z_\nu = Z_1, \quad Z_u = Z_2 Z_1^{-1}, \\ Z_g = Z_1^{-3}, & \quad Z_{g'} = Z_3 Z_1^{-3}, \quad Z_\rho = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

с прежними (7) константами Z_1, Z_2, Z_3 , что приводит к уравнению РГ с

$$\gamma_\varphi = \gamma_{\varphi'} = \gamma_\theta = \gamma_{\theta'} = 0, \quad \gamma_\nu = \gamma_1 \quad (17)$$

и β -функциями, совпадающими с (9). Следовательно, растяжение (14) не изменило положения рассматриваемой кинетической фиксированной точки.

Константа g' в действии (15) стоит коэффициентом при вершине взаимодействия $\varphi'(\theta\partial)\theta$. Рассматривая диаграммы для разных функций Грина в этой теории, несложно убедиться, что все они существуют при $g' = 0$ (т.е. любую связную функцию Грина можно построить без участия данной вершины взаимодействия). Следовательно, представление (4) для теории (15) избавлено от проблемы нулевых коэффициентов при ведущих по s степенях асимптотик корреляционных функций. Вычисленные в теории (15) величины Δ_ϕ (5) определяют истинные критические размерности полей. Необходимо учесть, что при растяжении (14) изменились и канонические размерности полей в теории (15) (см. таблицу).

	Поля			
d	φ	φ'	θ	θ'
d^p	$2 - \varepsilon$	$d - 2 + \varepsilon$	$2 - a\varepsilon$	$d - 2 + \varepsilon$
d^ω	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$

Учитывая (17) и то, что вследствие (9) $\gamma_\nu(g_*) = 2\varepsilon/3$ в кинетической фиксированной точке во всех порядках ε -разложения, с помощью (5) получаем критические размерности полей и времени:

$$\begin{aligned} \Delta_t &= -2 + 2\varepsilon/3, & \Delta_\varphi &= 1 - 2\varepsilon/3, & \Delta_{\varphi'} &= d - 1 + 2\varepsilon/3, \\ \Delta_\theta &= 1 - (a - 1/3)\varepsilon, & \Delta_{\theta'} &= d - 1 + (a - 1/3)\varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

(размерность координаты, как обычно, полагается равной минус единице), (18) справедливо при любой размерности пространства $d > 2$ и во всех порядках теории возмущений по ε .

Таким образом, в кинетическом режиме (при выходе системы инвариантных зарядов в кинетическую фиксированную точку) теория (1)–(3) демонстрирует скейлинговое поведение (4) с критическими размерностями (18).

4. МАГНИТНАЯ ФИКСИРОВАННАЯ ТОЧКА

В магнитной фиксированной точке (11) в нуль обращаются все исходные заряды теории (6) ($g_* = g'_* = g''_* = u_* = 0$), поэтому ситуация здесь еще более сложная. В отличие от зарядов g, g', g'' константа взаимодействия u встречается в знаменателях пропагаторов (12). Поэтому в зависимости от соотношения скоростей стремления инвариантных зарядов в фиксированную точку (т.е. в зависимости от отношений индексов ω_i) скейлинговые функции $\bar{G}_{N_\phi}$ (4) могут обращаться как в нуль, так и в бесконечность. Кроме того, проблематичным становится скейлинговое поведение с точки зрения существования понятия критической размерности времени, т.к. переменная t входит в диаграммы вследствие (12) как с множителем u , так и без него.

Для исследования сингулярностей скейлинговых функций по $1/\bar{u}$ удобно растяжение полей и времени:

$$\theta \rightarrow \sqrt{u}\theta, \quad \theta' \rightarrow \theta'/\sqrt{u}, \quad t \rightarrow t/u, \quad \varphi \rightarrow u\varphi, \quad \varphi' \rightarrow \varphi'. \quad (19)$$

В результате ренормированное действие теории приобретает вид

$$\begin{aligned} S_R = & \frac{1}{2}Bg_1\nu^3M^{2\varepsilon}\varphi'D^{\varphi\varphi}\varphi' + \frac{1}{2}Bg_2\nu^3M^{2a\varepsilon}\theta'D^{\theta\theta}\theta' + Bg_3\nu^3M^{(1+a)\varepsilon}\varphi'D^{\varphi\theta}\theta' + \\ & + \varphi'[-u\partial_t\varphi + Z_1\nu\Delta\varphi - u(\varphi\partial)\varphi + Z_3(\theta\partial)\theta] + \\ & + \theta'[-\partial_t\theta + Z_2\nu\Delta\theta - (\varphi\partial)\theta + (\theta\partial)\varphi]. \end{aligned} \quad (20)$$

В форме (20) мультипликативная ренормировка теории осуществляется следующими константами Z :

$$\begin{aligned} Z_\varphi &= 1, \quad Z_{\varphi'} = Z_1Z_2^{-1}, \quad Z_\theta = Z_{\theta'} = Z_1^{-1/2}Z_3^{1/2}Z_2^{1/2}, \\ Z_\nu &= Z_2, \quad Z_u = Z_2Z_1^{-1}, \quad Z_{g_1} = Z_1^{-2}Z_2^{-1}, \\ Z_{g_2} &= Z_3Z_1^{-1}Z_2^{-2}, \quad Z_{g_3} = Z_3^{1/2}Z_1^{-3/2}Z_2^{-3/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

поэтому β -функции зарядов g_1, g_2, g_3, u остались прежними (9) (положение рассматриваемой магнитной точки не изменилось), а γ -функции определяются соотношениями

$$\gamma_\varphi = 0, \quad \gamma_{\varphi'} = \gamma_1 - \gamma_2, \quad \gamma_\theta = -\gamma_{\theta'} = \frac{1}{2}(\gamma_3 + \gamma_2 - \gamma_1), \quad \gamma_\nu = \gamma_2. \quad (22)$$

Пропагаторы полей в теории (20):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(\mathbf{k}, t) \varphi'_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= P_{ij} \frac{1}{u} e^{-\nu k^2 t/u} \theta(t), \\ \langle \varphi_i(\mathbf{k}, t) \varphi_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \frac{1}{2} P_{ij} \frac{g_1 B}{u} \nu^2 k^{2-d-2\varepsilon} M^{2\varepsilon} e^{-\frac{\nu k^2 |t|}{u}}, \\ \langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \theta'_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= P_{ij} \theta(t) e^{-\nu k^2 t}, \\ \langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \theta_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \frac{1}{2} P_{ij} g_2 B \nu^2 k^{2-d-2a\varepsilon} M^{2a\varepsilon} e^{-\nu k^2 |t|}, \\ \langle \theta_i(\mathbf{k}, t) \varphi_j(-\mathbf{k}, 0) \rangle_0 &= \varepsilon_{isj} \frac{g_3 B \nu^2 k^{1-d-(1+a)\varepsilon}}{(1+u)} M^{(1+a)\varepsilon} k_s [e^{-\nu k^2 t} \theta(t) + e^{\nu k^2 t/u} \theta(-t)], \end{aligned} \quad (23)$$

определены при $u = 0, g_i = 0$. Действительно, пропагаторы $\theta\theta$ и $\theta\theta'$ (23) от u не зависят, а для остальных в пределе $u \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi \varphi' \rangle_0 &\rightarrow \frac{P_{ij}}{\nu k^2} \delta(t) \theta(t), \quad \langle \varphi \varphi \rangle_0 \rightarrow \frac{g_1 B \nu M^{2\varepsilon} P_{ij}}{k^{d+2\varepsilon}} \delta(t), \\ \langle \varphi \theta \rangle_0 &\rightarrow \varepsilon_{isj} B g_3 \nu^2 k^{1-d-(1+a)\varepsilon} M^{(1+a)\varepsilon} k_s e^{-\nu k^2 t} \theta(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Сингулярности по $1/u$ пропагаторов нашли свое выражение в $\delta(t)$ -функциях и опасны в диаграммах типа

(см (13)), где имеется произведение двух δ -функций с совпадающими аргументами. Рассматривая эти диаграммы до предельного перехода $u \rightarrow 0$, устанавливаем, что сингулярности по $1/u$ в них устраняются интегрированиями по временам в вершинах и множителями u при взаимодействии $\varphi'(\varphi\partial)\varphi$ и что они не дают вклада в скейлинговые функции вследствие $\bar{g}_1 \rightarrow 0$ (пропагатор $\varphi\varphi$ (23) пропорционален заряду g_1).

Следовательно, в теории (20) при вычислении функций Грина с несовпадающими временами можно положить $\bar{u} = u_* = 0$, $\bar{g}_1 = g_1^* = 0$. При этом из действия выпадает пропорциональная u вершина взаимодействия $\varphi'(\varphi\partial)\varphi$, а в диаграммах отсутствуют пропагаторы типа $\varphi\varphi$.

Любую связную функцию Грина с четным числом внешних полей θ и θ' можно построить и без смешанного пропагатора $\varphi\theta$, поэтому при вычислении этих функций можно положить и $\bar{g}_3 = g_3^* = 0$. Для таких функций Грина в рассматриваемой теории (6) реализуется скейлинговое поведение (4) с критическими размерностями полей и времени

$$\Delta_t = -2, \quad \Delta_\varphi = 1, \quad \Delta'_\varphi = 2 + 4a\varepsilon, \quad \Delta_\theta = 1 - a\varepsilon, \quad \Delta'_\theta = 2 + a\varepsilon, \quad (25)$$

вычисленными при $d = 3$ в первом порядке ε -разложения (отметим, что при растяжении (19) на безразмерный параметр u канонические размерности полей и времени не изменились и совпадают с приведенными в [2]). Соответствующие этим функциям Грина скейлинговые функции вычисляются в теории (20) с $g_1 = g_3 = u = 0$, независимость от u обеспечивает существование скейлинга (4) и в отношении динамического поведения (зависимости скейлинговых функций от времени).

Функции Грина с нечетным числом внешних полей θ и θ' в своем диаграммном представлении содержат по крайней мере один смешанный пропагатор $\langle\varphi\theta\rangle_0$, следовательно, для них скейлинговое представление (4) приобретает дополнительный множитель $s^{(4a-1)\varepsilon}$, определяемый поправочным индексом ω_{g_3} в первом порядке ε -разложения.

Скейлинговое соотношение (4) не выполняется также для функций Грина при совпадающих временах (т.е. статических), в диаграммах которых линии $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$ и $\langle\varphi\varphi\rangle_0$ не интегрируются по времени. К ним относятся корреляторы $\langle\varphi\varphi\rangle$ и $\langle\varphi\varphi'\rangle$, а также несвязные функции Грина, содержащие эти пропагаторы в качестве связных подграфов. В этих функциях Грина при использовании представлений (24) также проявляется сингулярность типа $\delta(0)$. Например, для $G_{\varphi\varphi'}(p, t = 0)$ и $G_{\varphi\varphi}$ в однопетлевом приближении имеем

$$G_{\varphi\varphi'} = \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \varphi' \\ \square \\ t \end{array} + \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \varphi' \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \theta \\ \theta' \end{array} \begin{array}{c} \theta \\ \theta \end{array} \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ t \end{array} \begin{array}{c} \varphi' \\ \square \\ t \end{array}, \quad (26)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ t \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \varphi' \\ \square \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \theta \\ \theta \end{array} \begin{array}{c} \theta \\ \theta \end{array} \begin{array}{c} \varphi' \\ \square \\ t \end{array} \begin{array}{c} \varphi \\ \square \\ t \end{array};$$

при $t = 0$ в правой части (26) в уравнении для $G_{\varphi\varphi'}(p, t = 0)$ остается лишь беспетлевой вклад – затравочный пропагатор (пропорциональный $\theta(0)/u$). Однако в соответствии с [6], $\theta(0)$ в $\langle\varphi\varphi'\rangle(t = 0)$ доопределяется нулем.

Рассмотрим $G_{\theta\theta'}$. Заменяя в последней диаграмме (26) пропагаторы $\langle\varphi\varphi'\rangle_0$ на пропорциональные $\delta(t)$ выражения (24), мы сталкиваемся с ультрафиолетовыми (УФ) расходимостями в интеграле по импульсам. В этой диаграмме нельзя переходить к пределу $u = 0$ до взятия интегралов по временам в вершинах. При этом несложно убедиться, что при $t = 0$ последняя однопетлевая диаграмма в (26) пропорциональна $u^{-1/2}$, в то время как беспетлевой вклад в $\langle\varphi\varphi\rangle$ пропорционален g_1/u (при $t \rightarrow 0$) (23). Оценивая по β -функциям (9) в первом порядке по ε в фиксированной точке (11) соответствующие поправочные индексы ω_i :

$$\omega_{g_1} = 2(4a - 1)\varepsilon, \quad \omega_u = 4a\varepsilon,$$

можно утверждать, что одновременная функция Грина $\langle\varphi\varphi\rangle$ приобретает дополнительный множитель к скейлинговой форме (4) с размерностями (25) вида $s^{(4a-2)\varepsilon}$ при $a < 1/3$ (беспетлевой вклад) или $s^{-2a\varepsilon}$ при $a > 1/3$ (вклад петлевых диаграмм).

Вышеупомянутые особенности диаграмм по u проявляются только в однопетлевых связных функциях $\langle\varphi\varphi\rangle$, степень сингулярности диаграмм по u не изменяется с увеличением порядка теории возмущений.

Таким образом, в магнитной фиксированной точке скейлинговое поведение (4) с критическими размерностями (25) (вычисленными в первом порядке по ε) нарушается приведенными выше множителями для корреляционных функций с нечетным числом полей θ , θ' и для одновременной связной функции $\langle\varphi\varphi\rangle$.

5. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ

В теории (4) существуют три скалярных составных оператора канонической размерности 2:

$$F_1 = \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_i, \quad F_2 = \frac{1}{2}\theta_i\theta_i, \quad F_3 = \theta_i\varphi_i, \quad (27)$$

которые при ренормировке могли бы смешиваться между собой. Однако в отличие от истинных скаляров – операторов F_1 и F_2 , оператор F_3 – псевдоскаляр, поэтому он выпадает из семейства смешивающихся операторов.

Существенным свойством теории (1)–(3) является галилеевская инвариантность, она была использована в [7] для изучения составных операторов в обычной стохастической гидродинамике. Нестационарные галилеевские преобразования полей

$$\varphi_v(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{u}(t), t) - \mathbf{v}(t), \quad \varphi'_v(\mathbf{x}, t) = \varphi'(\mathbf{x} + \mathbf{u}(t), t), \\ \theta_v(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x} + \mathbf{u}(t), t), \quad \theta'_v(\mathbf{x}, t) = \theta'(\mathbf{x} + \mathbf{u}(t), t)$$

(где параметр преобразования $\mathbf{v}(t)$ – произвольная зависящая только от времени векторная функция, хорошо убывающая при $|t| \rightarrow \infty$, а $\mathbf{u}(t) = \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{v}(t')$) реализуются в тождествах Уорда, следствием которых (см. [7]) является соотношение

$$\int dx \left\{ a_{0\alpha} \left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial (\partial_t \varphi_k)} \partial_s \varphi_k \right] + \partial_t \left[a_{0\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial (\partial_s \varphi_k)} \right] \right\} < \infty, \quad (28)$$

где $a_{0\alpha}$ – неренормированные источники семейства операторов F_α , а символ “ $< \infty$ ” означает УФ-конечность рассматриваемого функционала. Следствиями (28) для составных операторов (27) являются отсутствие ренормировки составного оператора F_1 и

непримешивание его к оператору F_2 (можно сказать, что оператор F_1 не ренормируется сам и не примешивается к галилеево-инвариантному оператору F_2 , т.к. сам он не является галилеево-инвариантным) и отсутствие собственной расходимости в диаграммах с составным оператором F_3 (он также галилеево-неинвариантен). Вследствие общей формулы ренормировки со смешиванием составных операторов

$$F_\alpha(\phi) = Z_{\alpha\beta} F_\beta^R(Z_\phi \phi) \quad (29)$$

(ϕ означает поля из набора $\varphi, \varphi', \theta, \theta'$; Z_ϕ – соответствующие константы ренормировки) получаем соотношение $Z_{33} = Z_\theta^{-1}$.

Таким образом, матрица констант ренормировки $\mathbf{Z}_{ik}$ (29) операторов (27) имеет вид

$$\mathbf{Z}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & Z_{12} & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Z_\theta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя в однопетлевом приближении по диаграммам

соответствующие константы $Z_{\alpha\beta}$ в теории (6), получаем ренормированное действие для производящего функционала функций Грина с составными операторами F_α : $\bar{S}_R = S_R + a_{0\alpha} Z_{\alpha\beta} F_\beta^R(Z_\phi \phi)$, где константы ренормировки

$$\begin{aligned} Z_{12} &= -\frac{u(d+2)(d-1)}{2(u+1)} \left(\frac{g_1}{\varepsilon} - \frac{g_2}{a\varepsilon} \right), \\ Z_{22} Z_\theta^2 &= 1 + \frac{(d-1)(d+2)}{2(u+1)} \left(\frac{g_1}{\varepsilon} - \frac{g_2}{a\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Используемые при исследовании скейлингового поведения в кинетической и магнитной фиксированных точках растяжения полей и переменных (14), (19) не меняют смысла констант $Z_{\alpha\alpha}$ (30) (меняются только канонические размерности операторов F_α и значение константы Z_θ). Воспользовавшись формулой (5) в кинетической фиксированной точке (10) по константам $Z_{\alpha\alpha}$ (30), для операторов (27) получаем в первом порядке по ε и при произвольном d критические размерности,

$$\Delta_1 = 2 - 4/3\varepsilon, \quad \Delta_2 = 2 - 2a\varepsilon, \quad \Delta_3 = 2 - (a + 1/3)\varepsilon \quad (31)$$

(мы учли также приведенные выше канонические размерности полей в теории (15)). Константа Z_{12} определяет примесь к F_1 оператора $g_2 F_2$, учитывая $g_2^* = 0$, можно утверждать, что именно операторы F_1, F_2, F_3 (а не их смеси) имеют размерности Δ_i .

Аналогично в магнитной точке, учитывая (21) и (25), получаем при $d = 3$

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 2 + 12a\varepsilon, \quad \Delta_3 = 2 + a\varepsilon. \quad (32)$$

Составные операторы являются ИК-несущественными, если их критические размерности превышают обратную суммарную критическую размерность пространства-времени, т.е. $3 - \Delta_t$ в рассматриваемых случаях. Следствием (31), (32) является ИК-существенность в обычном смысле операторов F_α (27). Однако эти операторы не содержат вспомогательных полей φ' , θ' и, следовательно, не могут появиться в действии теории (6) вследствие уточнения динамических уравнений (1), (2). Поэтому для нас будет важным положительность или отрицательность критических размерностей данных составных операторов, ибо этим определяется зависимость или независимость корреляторов в инерционном интервале от обратного интегрального масштаба турбулентности.

Действительно, модель (1)–(3) построена в предположении о существовании инерционного интервала, в котором реальная внешняя накачка энергии (корреляторы шумов) может быть заменена степенной (моделирующей δ -образную функцию по импульсам (3)). Обсуждая вопрос о поправках к использованному приближению аналогично [3] (где данная задача решается для обычной стохастической гидродинамики), введем ИК-массу m и учтем ее влияние с помощью операторного разложения Вильсона

$$\phi(\mathbf{x}_1, t)\phi(\mathbf{x}_2, t) \simeq \sum_i c_i(\mathbf{r})F_i(\mathbf{x}, t), \quad (33)$$

где $x \equiv (x_1 + x_2)/2$, $r \equiv x_1 - x_2$, F_i – всевозможные составные операторы в теории. Усредняя (33), получаем для парных корреляционных функций разложение при $mr \rightarrow 0$

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1, t)\phi(\mathbf{x}_2, t) \rangle \simeq \sum_i c_i(\mathbf{r})a_i m^{\Delta_{F_i}}, \quad (34)$$

где Δ_{F_i} – критические размерности составных операторов, a_i – некоторые константы. По разложению (34) заключаем, что с точки зрения возможности перехода к безмассовой теории ($m \rightarrow 0$) в инерционном интервале опасными являются операторы с отрицательной критической размерностью.

В работе [3], где, как и в нашем случае в кинетическом режиме (31), размерность оператора F_1 при физическом значении $\varepsilon = 2$ отрицательна, показано, что вследствие галилеевой инвариантности этот оператор не дает вклад в аналогичное (34) разложение для одновременных корреляционных функций (но является существенным при описании динамического поведения функций Грина, т.е. зависимости корреляторов от времени). Эти соображения справедливы также и в рассматриваемой теории не только для оператора F_1 , но и для галилеево-инвариантного оператора F_3 (27).

В кинетическом скейлинговом режиме при физическом значении ε оператор F_2 имеет отрицательную критическую размерность при $a > 1/2$. Этот оператор галилеево-инвариантен. Уже однопетлевые вычисления показывают, что он дает вклад в разложение (34) даже для одновременных функций Грина с внешними линиями θ -типа. Следовательно, для описания кинетического скейлингового режима в инерционном интервале модель в виде (1)–(3) недостаточна и требует конкретизации вида корреляторов внешних случайных сил.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-14515), а также Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации (ISF R-63300).

Список литературы

- [1] *Fournier J.-P., Frish U.* // Phys. Rev. 1983. V. A28. №2. P. 1000.
- [2] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М.* // ТМФ. 1985. Т. 64. №2. С. 196–207.
- [3] *Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. №4. С. 1272.
- [4] *De Dominicis C. Martin P. C.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 29. P. 419.
- [5] *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* // Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 423.
- [6] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М.* // ТМФ. 1983. Т. 57. №2. С. 268–281.
- [7] *Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М.* // ТМФ. 1988. Т. 74. №2. С. 180–191.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
29.VI.1995 г.

L. Ts. Adzhemyan, D. Yu. Volchenkov, M. Yu. Nalimov

THE RENORMALIZATION GROUP INVESTIGATION OF
CORRELATION FUNCTIONS AND COMPOSITE OPERATORS OF
THE MODEL OF STOCHASTIC MAGNETIC HYDRODYNAMICS

The scaling behaviour of correlation functions of the developed turbulence of stochastic magnetic hydrodynamics was studied by the method of renormalization group. The results known before were completed by the infrared asymptotics of Green functions with the arbitrary number of external fields both in "kinetic" and "magnetic" regimes. The problem of dynamical scaling behaviour of the magnetic regime is considered especially. The critical dimensions of composite operators of energy functional are calculated. By means of short distance expansion the problem of dependence of correlation functions beyond of integral turbulent scale within inertial range is investigated.