Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, П. Б. Медведев, Пуассонова редукция решеточной алгебры
Каца–Муди, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 179–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:48:15

Г. Э. Арутюнов, П. Б. Медведев
**ПУАССОНОВА РЕДУКЦИЯ
РЕШЕТОЧНОЙ АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ**

Доказана возможность пуассоновой редукции $SL(N)$ -решеточной алгебры Каца–Муди по действию максимальной нильпотентной подгруппы группы $SL(N)$. Построены скобки Пуассона на редуцированном пространстве. Для $N = 2$ указана связь этих скобок с решеточным аналогом коцикла Гельфанда–Фукса.

Хорошо известно, что анализ двумерной квантовой конформной теории поля – модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ) – требует введения регуляризации, т.к. некоторые из наивно введенных операторных величин оказываются плохо определенными. Один из способов регуляризации состоит в перенесении теории на решетку с сохранением всех симметрий, имеющих место в непрерывном случае.

В серии работ [1–3] была предложена конструкция решеточной алгебры Каца–Муди, являющейся естественным решеточным аналогом алгебры симметрии модели ВЗНВ. Замечательной особенностью этой алгебры является явное присутствие в ней квантово-групповой симметрии (симметрии Пуассона–Ли на классическом уровне), остающейся скрытой в исходной модели. Основываясь на решеточной алгебре Каца–Муди, можно построить регуляризованную версию модели ВЗНВ и изучать ее состояния, пользуясь теми методами конформной теории, которые допускают перенос на решетку (например, представление свободных полей и т.д.) [4].

Модель ВЗНВ является в некотором смысле универсальной, поскольку при различных редукциях она порождает богатое семейство других конформных теорий [5, 6]. В связи с этим возникает важный вопрос об изучении различных редукций решеточной алгебры Каца–Муди и построении решеточных аналогов соответствующих конформных теорий.

В настоящей работе изучается пуассонова редукция $SL(N)$ -решеточной алгебры Каца–Муди, точнее ее пуассоновой структуры, по действию максимальной нильпотентной подгруппы группы $SL(N)$. Эта редукция весьма близка к редукции Дринфельда–Соколова (в смысле совпадения групп симметрии, по которым осуществляется редукция в том и в другом случаях). Имеются, однако, и существенные отличия. Дело в том, что в непрерывном случае действие группы симметрии G является гамильтоновым. Это, в свою очередь, позволяет наложить связи первого рода и построить редуцированное пространство как фактор-пространство поверхности выбранных связей по подгруппе G , сохраняющей эту поверхность. Пуассонову структуру на редуцированном пространстве можно найти, взяв скобку Пуассона G -инвариантных функций и

сузив ее на поверхность связей. Редукция Дринфельда–Соколова алгебры Каца–Муди отвечает специальному выбору связей, который приводит к классическим (квантовым) W -алгебрам в качестве редуцированного фазового пространства. В решеточном случае вместо гамильтонова мы имеем только пуассоново G -действие [2], характерной особенностью которого является тот факт, что связи *не образуют глобально алгебру Ли*. Сами связи определяются теперь как множество функций, коммутирующих со всеми G -инвариантами относительно скобки Пуассона на поверхности связей. Как будет видно из нашего рассмотрения, за исключением тривиальных случаев эти связи оказываются сильно нелокальными по решеточным переменным. Таким образом, пуассоново и гамильтоново действия приводят к различным типам связей.

Сделаем несколько замечаний по поводу получаемой нами в результате редукции скобки Пуассона. Во-первых, она допускает общее описание (см. формулу (20)) в терминах пуассоновой структуры на дубле Гейзенберга группы $G = SL(N)$. Во-вторых, хотя пуассонова структура решеточной алгебры Каца–Муди определяется с помощью классической r -матрицы, скобка Пуассона на редуцированном пространстве от нее *не зависит*. Наконец, в-третьих, для $G = SL(2)$ в определенном непрерывном пределе эта скобка переходит в коцикл Гельфанда–Фукса. Таким образом, в простейшем случае она может быть проинтерпретирована как решеточный аналог коцикла Гельфанда–Фукса.

Отметим, что в недавней работе [7], основанной на когомологической конструкции Фейгина и Френкеля [8], изучался гамильтонов аналог редукции Дринфельда–Соколова решеточной алгебры Каца–Муди, который отличается от рассматриваемого нами.

1. РЕШЕТОЧНЫЙ АНАЛОГ АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ И СКРУЧЕННЫЙ ДУБЛЬ

В этом разделе мы соберем некоторые понятия, относящиеся к решеточному аналогу алгебры Каца–Муди и дублю Гейзенберга. Детальное изложение приводимых ниже конструкций содержится в оригинальных работах [1–3, 9, 10].

Обозначим через Z_N периодическую решетку с шагом Δ , имеющую N звеньев. Со поставим каждому звену $k \in Z_N$ матрицу $L^k \in GL(N)$. Набор переменных L^k , $k \in Z_N$, со скобкой Пуассона

$$\begin{aligned} \{L_1^i, L_2^j\} = & -\frac{\gamma}{2}(rL_1^iL_2^j + L_1^iL_2^jr)\delta_{i,j} + \\ & + \gamma(L_2^jr^+L_1^i)\delta_{i+1,j} + \gamma(L_1^ir^-L_2^j)\delta_{i,j+1} \end{aligned} \quad (1)$$

задает так называемую решеточную алгебру Каца–Муди $\mathcal{K}_N$ [1–3]. Здесь r – классическая r -матрица (решение модифицированного уравнения Янга–Бакстера), $r_{\pm} = \frac{1}{2}(r \pm P)$, где P – матрица перестановки: $P_{ij}^{kl} = \delta_i^l\delta_j^k$. Поскольку $\det L^i$ является центральным элементом алгебры (1), мы полагаем $L^i \in SL(N)$.

В непрерывном пределе $L^i \approx 1 + \gamma\Delta J(x^i)$ соотношения (1) переходят в коммутационные соотношения центрально расширенной алгебры токов с центральным зарядом $\frac{1}{\gamma}$.

Группа $\mathbf{G} = G \times \dots \times G$ действует на $\mathcal{K}_N$ *решеточными калибровочными преобразованиями*

$$L^i \rightarrow \tilde{L}^i = T_{i+1}^{-1}L^iT_i, \quad T_i \in G. \quad (2)$$

Если снабдить $\mathbf{G}$ следующей ультралокальной скобкой Пуассона:

$$\{T_1, T_2\} = \gamma[r_+, T_1 T_2], \quad (3)$$

то действие (2) становится пуассоновым, т.е.

$$\{\widetilde{L^i}, \widetilde{L^j}\}_{\mathcal{K}_N} = \{\tilde{L}^i, \tilde{L}^j\}_{\mathcal{K}_N \times \mathbf{G}}, \quad (4)$$

где пространство $\mathcal{K}_N \times \mathbf{G}$ снабжено пуассоновой структурой прямого произведения пуассоновых многообразий.

Рассматриваемая нами редукция будет основана на другом описании $\mathcal{K}_N$, которое существенно использует понятие скрученного дубля [9, 10].

Пусть G – группа Пуассона–Ли, а $\mathcal{G}$ – ее бигалгебра Ли [11] с невырожденным инвариантным внутренним произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Предположим, что 1-коцикл $\mathcal{G} \rightarrow \wedge^2 \mathcal{G}$ задается классической r -матрицей $r \in \wedge^2 \mathcal{G}$ следующего вида:

$$r = \sum_{\alpha \in \Delta_+} (e_{-\alpha} \otimes e_{\alpha} - e_{\alpha} \otimes e_{-\alpha}), \quad (5)$$

где e_{α} – корневой базис в $\mathcal{G}$, а сумма ведется по набору Δ_+ всех положительных корней. Бигалгебра $\mathcal{G}$ представляет собой пример факторизуемой бигалгебры Ли [12]. Известно [11], что как группа Ли дубль D факторизуемой бигалгебры Ли $\mathcal{G}$ изоморфен прямому произведению $G \times G$. Очевидно, что его алгебра Ли d есть $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$. Невырожденное инвариантное внутреннее произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ на d задается следующим образом:

$$\langle (X', Y'), (X, Y) \rangle_d = \langle X', X \rangle - \langle Y', Y \rangle. \quad (6)$$

Пуассонова структура на D вводится с помощью операции твиста τ , который представляет собой автоморфизм $\mathcal{G}$, коммутирующий с r и сохраняющий внутреннее произведение. Эта пуассонова структура имеет вид [10]

$$2\{\phi, \psi\}_{\tau} = \gamma \left(\langle r_d(\nabla\phi), \nabla\psi \rangle_d + \langle r_d^{\tau}(\nabla'\phi), \nabla'\psi \rangle_d \right), \quad \phi, \psi \in C^{\infty}(D). \quad (7)$$

Здесь $\nabla\phi$ ($\nabla'\phi$) $\in d$ обозначает левый (правый) градиент функции ϕ :

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(x), \xi \rangle_d &= \left. \frac{d}{dt} \phi(e^{t\xi} x) \right|_{t=0}, \\ \langle \nabla'\phi(x), \xi \rangle_d &= \left. \frac{d}{dt} \phi(x e^{t\xi}) \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем мы полагаем $\nabla\phi \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla\phi^{(1)}, \nabla\phi^{(2)})$ и аналогично для $\nabla'\phi$. Матрицы r_d и r_d^{τ} , входящие в (7), определяются как

$$r_d = \begin{pmatrix} -r & 2r_+ \\ -2r_- & r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad r_d^{\tau} = \begin{pmatrix} -r & 2r_+ \cdot \tau^{-1} \\ -2\tau \cdot r_- & r \end{pmatrix} \quad (9)$$

с $r_{\pm} = \frac{1}{2}(r \pm \text{id})$, где r понимается как оператор $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. Группа $D = G \times G$, снабженная пуассоновой структурой (7), называется *скрученным дублем* и обозначается D_{τ} [10].

Опишем вкратце пуассонову редукцию D_{τ} по действию группы G . Пусть заданы пуассоново многообразие $(\mathcal{M}, \{, \})$ и действие G на $\mathcal{M}$. Если алгебра $\text{Fun}(\mathcal{M})^G$ G -инвариантных функций на $\mathcal{M}$ замкнута по отношению к скобке Пуассона, то на фактор-пространстве $\mathcal{M}/G$ возникает пуассонова структура, причем проекция $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/G$ является пуассоновым отображением. Пространство $\text{Fun}(\mathcal{M}/G)$ естественно отождествляется с $\text{Fun}(\mathcal{M})^G$. Групповое действие, для которого $\text{Fun}(\mathcal{M})^G$ образует пуассонову подалгебру, называется допустимым.

Группа G действует на $(x, y) \in D$ левыми и правыми сдвигами:

$$g(x, y) = (gx, gy), \quad (x, y)g = (xg, yg^{\tau}), \quad g \in G, \quad g^{\tau} = \tau(g). \quad (10)$$

Известно [10], что эти действия допустимы. Фактор $G \setminus D$ можно отождествить с группой G , задав проекцию $\pi(x, y) = y^{-1}x$.

Пусть $L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$ — точное матричное представление G . Используя генераторы L_{ij} , запишем скобку Пуассона на редуцированном пространстве $G \setminus D$:

$$\begin{aligned} 2\{L_{ij}, L_{kl}\} = & -\gamma \langle r(\nabla_r L_{ij} - \tau^{-1} \nabla_l L_{ij}), \nabla_r L_{kl} - \tau^{-1} \nabla_l L_{kl} \rangle + \\ & + \gamma \langle \tau^{-1} \nabla_l L_{ij}, \nabla_r L_{kl} \rangle - \langle \tau \nabla_r L_{ij}, \nabla_l L_{kl} \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

или в стандартных тензорных обозначениях [10]

$$\{L_1, L_2\} = -\frac{\gamma}{2}(rL_1L_2 + L_1L_2r) + \gamma L_2((\tau \otimes \text{id})r_+)L_1 + \gamma L_1((1 \otimes \tau)r_-)L_2, \quad (12)$$

где r берется в представлении $\mathcal{G}$, соответствующем L . Правое действие G на D_{τ} превращается при проекции π в следующее действие $G \rightarrow G$:

$$L \rightarrow (\tau(g))^{-1}Lg, \quad (13)$$

которое известно как одевающее преобразование.

Важным примером рассмотренной выше конструкции является дубль группы $\mathbf{G}$. Выбирая следующий твист

$$\tau(L_1, L_2, \dots, L_N) = (L_2, \dots, L_N, L_1), \quad L_i \in G, \quad (14)$$

т.е. $\tau(L_i) = L_{i+1}$, можно видеть, что (12) совпадает с (1), а действие (13) превращается в решеточное калибровочное преобразование (2).

Таким образом, решеточная алгебра Каца–Мули может рассматриваться как редукция скрученного дубля группы $\mathbf{G}$ по левому действию $\mathbf{G}$.

2. ПУАССОНОВА РЕДУКЦИЯ РЕШЕТОЧНОЙ АЛГЕБРЫ КАЦА–МУДИ

Как было отмечено выше, группа $\mathbf{G}$ действует на $\mathcal{K}_N$ решеточными калибровочными преобразованиями (2). В этом разделе мы изучим редукцию $\mathcal{K}_N$ по действию подгруппы $\mathbf{H} = H \times \dots \times H \subset \mathbf{G}$, где H — подгруппа G , полученная экспоненцированием нильпотентной алгебры n_+ строго верхнетреугольных матриц.

Напомним, что в непрерывном пределе (1) определяет фазовое пространство, обладающее некоторой симметрией. В частности, непрерывный аналог $\mathbf{H}$, т.е. $C^\infty(S^1, H)$, действует на этом пространстве гамильтоновым образом. Гамильтонова редукция по действию $\mathbf{H}$ приводит к пуассоновым структурам Гельфанда–Дикого, которые представляют собой классические аналоги W -алгебр [6].

В решеточной ситуации $\mathbf{G}$ действует на $\mathcal{K}_N$ пуассоновым образом. Это действие представляет собой аналог гамильтонова действия, имеющего место в непрерывном случае. Заметим, однако, что $\mathbf{H}$ не является подгруппой Пуассона–Ли группы $\mathbf{G}$. Тем не менее действие $\mathbf{H}$ на $\mathcal{K}_N$ допустимо, т.е. пространство $\mathcal{K}_N/\mathbf{H}$ снабжается структурой пуассонова многообразия. Для доказательства этого факта мы воспользуемся известной теоремой [9], составляющей основу метода пуассоновой редукции.

Предположим, что группа Пуассона–Ли G действует на пуассоновом многообразии $(M, \{, \})$ пуассоновым образом и дуальное пространство $\mathcal{G}^*$ к $\mathcal{G}$ снабжается структурой алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_*$, которая получается линеаризацией скобки Пуассона в единице G . Пусть H – подгруппа G с алгеброй Ли h . Действие $H \times M \rightarrow M$ допустимо, если $h^\perp$ является подалгеброй Ли в $\mathcal{G}^*$.

Вернемся к $\mathbf{G}$. Это ультралокальная решеточная группа Пуассона–Ли (3) с алгеброй Ли $\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{G}$. На $\mathcal{J}$ имеется естественное скалярное произведение

$$(X, Y) = \sum_n (X_n, Y_n), \quad (15)$$

которое мы используем, чтобы отождествить $\mathcal{J}^*$ с $\mathcal{J}$. При этом отождествлении коммутатор, задающий структуру алгебры Ли на $\mathcal{J}^*$, принимает вид

$$[X^k, Y^l]_* = \frac{\gamma}{2} ([r(X^k), Y^l] + [X^k, r(Y^l)]) \delta_{kl}, \quad (16)$$

где r дается формулой (5). Легко проверить, что $\mathbf{h}^\perp$ образует подалгебру Ли относительно (16). Следовательно, согласно приведенной выше теореме инварианты $\mathbf{H}$ -действия образуют пуассонову подалгебру решеточной алгебры Каца–Мути (1). В следующем разделе мы приведем простейший пример алгебры инвариантов.

Теперь мы представим процедуру редукции с другой точки зрения, что позволит нам вывести общую формулу для скобки Пуассона на редуцированном пространстве. А именно, мы получим фактор-пространство $\mathcal{K}_N/\mathbf{H}$ как редукцию скрученного дубля группы $\mathbf{G}$ по действию $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$. Отметим, что дальнейшее рассмотрение никак не связано с решеткой и, кроме того, не зависит от конкретного выбора твиста. Поэтому рассмотрим D_τ группы G и следующее действие $G \times H$:

$$(g, h)(x, y) = (gxh, gyh^\tau), \quad (g, h) \in G \times H. \quad (17)$$

Отождествление G и H с $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ и выбор в качестве τ решеточного сдвига можно легко осуществить в конце рассмотрения.

Пусть $\phi \in {}^G \text{Fun}(D)^H$, где ${}^G \text{Fun}(D)^H$ есть пространство левоинвариантных (относительно G) и правоинвариантных (относительно H) функций на D . Тогда для любой такой ϕ имеем

$$0 = \langle \nabla' \phi(x), (\xi, \tau(\xi)) \rangle_d = \langle \nabla' \phi^{(1)}, \xi \rangle - \langle \nabla' \phi^{(2)}, \tau(\xi) \rangle = \langle \nabla' \phi^{(1)} - \tau^{-1} \nabla' \phi^{(2)}, \xi \rangle, \quad (18)$$

где $\xi \in h$. Это означает, что $\nabla' \phi^{(1)} - \tau^{-1} \nabla' \phi^{(2)} \in h^\perp$. Так же, если $\phi, \psi \in {}^G \text{Fun}(D)^H$, то $\langle r_d(\nabla \phi), \nabla \psi \rangle_d = 0$, поскольку $r_d(\nabla \phi) = \nabla \phi$.

Рассмотрим скобку Пуассона функций $\phi, \psi \in {}^G \text{Fun}(D)^H$:

$$\begin{aligned} 2\{\phi, \psi\}_\tau &= \gamma \left\langle \begin{pmatrix} -r & 2r_+ \cdot \tau^{-1} \\ -2\tau \cdot r_- & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla' \phi^{(1)} \\ \nabla' \phi^{(2)} \end{pmatrix}, (\nabla' \psi^{(1)}, \nabla' \psi^{(2)}) \right\rangle_d = \\ &= -\gamma \langle r(\nabla' \phi^{(1)} - \tau^{-1} \nabla' \phi^{(2)}), (\nabla' \psi^{(1)} - \tau^{-1} \nabla' \psi^{(2)}) \rangle + \\ &\quad + \gamma \langle \tau^{-1} \nabla' \phi^{(2)}, \nabla' \psi^{(1)} \rangle - \gamma \langle \tau \nabla' \phi^{(1)}, \nabla' \psi^{(2)} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку, r -матрица (5) как оператор $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, имеет вид разности двух проекторов $r = P_{n_+} - P_{n_-}$, где $P_{n_\pm}$ — проекторы на нильпотентные подалгебры $n_\pm$, и $r(h^\perp) \subset h$, то слагаемое в (19), содержащее r -матрицу, обращается в нуль.

Таким образом, мы находим

$$2\{\phi, \psi\}_\tau = \gamma \langle \tau^{-1} \nabla' \phi^{(2)}, \nabla' \psi^{(1)} \rangle - \gamma \langle \tau \nabla' \phi^{(1)}, \nabla' \psi^{(2)} \rangle. \quad (20)$$

Если $\phi \in {}^G \text{Fun}(D)^H$, то ϕ является функцией одной G -левоинвариантной переменной $L = y^{-1}x$, т.е. $\phi(x, y) = \phi(L)$. Для правого градиента ϕ имеем

$$\langle \nabla' \phi(L), (\xi, \eta) \rangle_d = \langle \nabla' \phi^{(1)}, \xi \rangle - \langle \nabla' \phi^{(2)}, \eta \rangle = \frac{d}{dt} \phi(xe^{t\xi}, ye^{t\eta}) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi(e^{-t\eta} L e^{t\xi}) \Big|_{t=0}.$$

В том случае, когда ϕ — функция одной переменной L , последняя формула позволяет сделать следующие отождествления:

$$\nabla' \phi^{(1)} = \nabla_r \phi, \quad \nabla' \phi^{(2)} = \nabla_l \psi.$$

При этом для скобки Пуассона (20) получаем

$$\{\phi, \psi\}_\tau = \frac{\gamma}{2} \langle \tau^{-1} (\nabla_l \phi), \nabla_r \psi \rangle - \frac{\gamma}{2} \langle \tau (\nabla_r \phi), \nabla_l \psi \rangle. \quad (21)$$

Из этого выражения можно легко видеть, что $\{\phi, \psi\}_\tau \in {}^G \text{Fun}(D)^H$. В самом деле, при правом действии $L \rightarrow \tilde{L} = (h^\tau)^{-1} L h$ градиенты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_r \phi(\tilde{L}) &= h^{-1} \nabla_r \phi(L) h, \\ \nabla_l \phi(\tilde{L}) &= (h^\tau)^{-1} \nabla_l \phi(L) h^\tau, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \{\phi, \psi\}_\tau(\tilde{L}) &= \frac{\gamma}{2} \langle \tau^{-1} ((h^\tau)^{-1} \nabla_l \phi h^\tau), h^{-1} \nabla_r \psi h \rangle - \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \langle \tau (h^{-1} \nabla_r \phi h), (h^\tau)^{-1} \nabla_l \psi h^\tau \rangle = \{\phi, \psi\}_\tau(L). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что действие $G \times H$ на D_τ является допустимым. Скобку Пуассона (21), ограниченную на множество функций, инвариантных относительно одевающих преобразований $L \rightarrow (h^\tau)^{-1} L h$, можно рассматривать как пуассонову структуру на редуцированном фазовом пространстве $D_\tau / (G \times H)$.

3. ПРИМЕР

В качестве простейшего примера описанной выше конструкции рассмотрим пуассонову структуру, которая возникает при редукции $SL(2)$ -решеточной алгебры Каца–Мути по действию $\mathbf{H}$.

Параметризуем матрицу L_k следующим образом: $L_k = \begin{pmatrix} l_{11}^k & l_{11}^k \\ l_{21}^k & l_{22}^k \end{pmatrix}$. Решеточные калибровочные преобразования с матрицей

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & a_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad (22)$$

принимают вид

$$L_k \rightarrow \begin{pmatrix} l_{11}^k - a_{k+1} l_{21}^k & a_k (l_{11}^k - a_{k+1} l_{21}^k) + l_{12}^k - a_{k+1} l_{22}^k \\ l_{21}^k & l_{22}^k + a_k l_{21}^k \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Эта формула описывает действие $\mathbf{H}$ на $SL(2)$ -решеточной алгебре Каца–Мути. Если $l_{21}^k \neq 0$, то, выбирая $a_{k+1} = l_{11}^k / l_{21}^k$, каждую матрицу L^k можно привести к виду

$$L^k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l_{21}^k} \det L^k \\ l_{21}^k & \frac{u_k}{l_{21}^{k-1}} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где введено обозначение $u_k = l_{11}^{k-1} l_{21}^k + l_{22}^k l_{21}^{k-1}$. Легко проверить, что переменные $v_k = l_{21}^k$, $c_k = \det L^k$ и u_k , $k = 1, \dots, N$, являются инвариантами действия (2) с матрицами T_k вида (22). Пусть L будет $\mathbf{H}$ -инвариантной функцией на Z_N : $F = F(L^1, \dots, L^N)$. Так как при (2) любая L^k сводится к (23), а F калибровочно-инвариантна, мы заключаем, что F является функцией переменных (v_k, c_k, u_k) . Другими словами, (v_k, c_k, u_k) генерируют алгебру калибровочных инвариантов.

Используя (21), подсчитаем скобки Пуассона генераторов (v_k, c_k, u_k) . Прежде всего заметим, что каждый c_k является центральным элементом (1), и потому он также централен в пуассоновой алгебре калибровочных инвариантов. Рассмотрим скобку $\{u_k, u_{k-1}\}$. Находим правые и левые градиенты:

$$\begin{aligned} \nabla_r u_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} u_k & l_{21}^k l_{12}^{k-1} + l_{22}^k l_{22}^{k-1} \\ 0 & -\frac{1}{2} u_k \end{pmatrix}}_{k-1} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} l_{11}^{k-1} l_{21}^k - \frac{1}{2} l_{21}^{k-1} l_{22}^k & l_{11}^{k-1} l_{22}^k \\ l_{21}^{k-1} l_{21}^k & -\frac{1}{2} l_{11}^{k-1} l_{21}^k + \frac{1}{2} l_{21}^{k-1} l_{22}^k \end{pmatrix}}_k, \\ \nabla_l u_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} l_{11}^{k-1} l_{21}^k - \frac{1}{2} l_{21}^{k-1} l_{22}^k & l_{11}^{k-1} l_{22}^k \\ l_{21}^{k-1} l_{21}^k & -\frac{1}{2} l_{11}^{k-1} l_{21}^k + \frac{1}{2} l_{21}^{k-1} l_{22}^k \end{pmatrix}}_{k-1} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} u_k & l_{11}^k l_{11}^{k-1} + l_{12}^k l_{21}^{k-1} \\ 0 & \frac{1}{2} u_k \end{pmatrix}}_k, \end{aligned}$$

и аналогично для $\nabla_r u_{k-1}$ ($\nabla_l u_{k-1}$). В последних формулах выписаны только ненулевые компоненты градиентов, являющиеся $k-1$ -м и k -м факторами $\mathcal{J}$. Подставляя их в (21) и учитывая определение τ , находим

$$\begin{aligned} \{u_k, u_{k-1}\} &= -\frac{\gamma}{2} \langle \tau(\nabla_r \phi), \nabla_l \psi \rangle = \\ &= -\frac{\gamma}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_k & l_{21}^{k-1}l_{12}^k + l_{22}^k l_{22}^{k-1} \\ 0 & -\frac{1}{2}u_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l_{11}^{k-2}l_{21}^{k-1} - \frac{1}{2}l_{21}^{k-2}l_{22}^{k-1} & l_{11}^{k-2}l_{22}^{k-1} \\ l_{21}^{k-2}l_{21}^{k-1} & -\frac{1}{2}l_{11}^{k-2}l_{21}^{k-1} + \frac{1}{2}l_{21}^{k-2}l_{22}^{k-1} \end{pmatrix} \right\rangle - \\ &- \frac{\gamma}{2} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l_{11}^{k-1}l_{21}^k - \frac{1}{2}l_{21}^{k-1}l_{22}^k & l_{11}^{k-1}l_{22}^k \\ l_{21}^{k-1}l_{21}^k & -\frac{1}{2}l_{11}^{k-1}l_{21}^k + \frac{1}{2}l_{21}^{k-1}l_{22}^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_{k-1} & l_{11}^{k-1}l_{11}^{k-2} + l_{12}^{k-1}l_{21}^{k-2} \\ 0 & \frac{1}{2}u_{k-1} \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -\frac{\gamma}{2} u_k u_{k-1} + \gamma v_k v_{k-2} c_{k-1}. \end{aligned}$$

Повторяя те же шаги, можно вычислить остальные скобки Пуассона. Мы приведем здесь результат:

$$\begin{aligned} \{u_k, u_{k-2}\} &= \frac{\gamma}{4} u_k u_{k-2}, \\ \{v_{k-2}, u_k\} &= -\frac{\gamma}{4} v_{k-2} u_k, \quad \{v_{k-1}, u_k\} = \frac{\gamma}{4} v_{k-1} u_k, \\ \{v_k, u_k\} &= -\frac{\gamma}{4} v_k u_k, \quad \{v_{k+1}, u_k\} = \frac{\gamma}{4} v_{k+1} u_k. \end{aligned} \quad (25)$$

Скобки (25) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \{u_i, u_j\} &= \frac{\gamma}{4} u_i u_j (\delta_{i,j+2} - \delta_{i+2,j} + 2\delta_{i+1,j} - 2\delta_{i,j+1}) + \\ &+ \gamma (v_i v_{j-1} \delta_{i,j+1} - v_{i-1} v_j \delta_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\{v_i, u_j\} = \frac{\gamma}{4} v_i u_j (-\delta_{i+2,j} + \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j} + \delta_{i,j+1}), \quad (27)$$

$$\{v_i, v_j\} = \frac{\gamma}{4} v_i v_j (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}). \quad (28)$$

Укажем следующую интересную интерпретацию скобок (26). Заметим, что пуассонова структура (26), (27), (28) сужается на поверхность $v_i = 0$. При этом для (26) получаем

$$\{u_i, u_j\} = \frac{\gamma}{4} u_i u_j (\delta_{i,j+2} - \delta_{i+2,j} + 2\delta_{i+1,j} - 2\delta_{i,j+1}). \quad (29)$$

Эта формула представляет собой не что иное, как решеточный аналог коцикла Гельфанда-Фукса. Чтобы понять это, рассмотрим непрерывный предел (29). Используя следующие решеточные аппроксимации δ -функции и ее производных:

$$\begin{aligned} \delta_{x_i}(x_i - x_j) &= \frac{\delta_{i,j}}{\Delta}, \\ \delta'_{x_i}(x_i - x_j) &= \frac{\delta_{i+1,j} - \delta_{i,j}}{\Delta^2}, \\ \delta'''_{x_i}(x_i - x_j) &= \frac{\delta_{i+2,j} - \delta_{i-2,j} - 2\delta_{i+1,j} + 2\delta_{i-1,j}}{2\Delta^4}, \end{aligned} \quad (30)$$

и полагая, что переменная u_i ведет себя как $u_i = 1 + \Delta^2 u(x_i)$, находим, что в непрерывном пределе $\Delta \rightarrow 0$ формула (30) превращается в коцикл Гельфанда–Фукса:

$$\{u(x), u(y)\} = -\frac{\gamma}{2} \delta'''(x - y).$$

Представляется интересным найти сходную интерпретацию скобок Пуассона на редуцированных пространствах для $SL(N)$ -решеточных алгебр Каца–Муди при $N > 2$.

В указанном примере выбор нулевого значения связей $v_i = 0$ привел к решеточному коциклу Гельфанда–Фукса. Возникает вопрос, можно ли построить “решеточную” алгебру Вирасоро, задав ненулевые значения связей $v_i = \text{const}$. Для этого, по-видимому, необходимо найти набор решеточных переменных f_k как функций от решеточных инвариантов u_i, v_i такой, что каждая f_k коммутировала бы со всеми v_i на поверхности связи $v_i = \text{const}$ для всех i . Скобка $\{f_k, f_m\}$ и должна быть “решеточной алгеброй Вирасоро”. Авторам указанный набор f_k пока неизвестен, и его поиск ведется.

Авторы выражают благодарность И.Я.Арефьевой и С.А.Фролову за ряд полезных обсуждений. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 93-011-147, а также ISF, грант M1L-300.

Список литературы

- [1] *Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 133.
- [2] *Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M.A., Volkov A.Yu.* The unravelling of the quantum group structure in the WZNW theory: CERN Preprint TH-5981/91, 1991.
- [3] *Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Comm. Math. Phys. 1992. V. 149. P. 335.
- [4] *Falceto F., Gawedzki K.J.* // Geom. Phys. 1993. V. 11. P. 251.
- [5] *Goddard P., Kent A., Olive D.* // Comm. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 105–119.
- [6] *Дринфельд В.Г., Соколов В.В.* // ДАН СССР. 1985. Т. 284. №1. С. 11–16.
- [7] *Antonov A.V., Belov A.A., Chaltikian K.D.* Lattice conformal theories and their integrable perturbations: Preprint LANDAU-TMP-95-02, hep-th/9505155, 1995.
- [8] *Feigin B., Frenkel E.* // Phys. Lett. 1992. V. B276. P. 79.
- [9] *Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Publ.RIMS Kyoto Univ. 1985. V. 21. №6. P. 1237.
- [10] *Семенов-Тянь-Шанский М.А.* // ТМФ. 1992. Т. 93. №2. С. 302–329.
- [11] *Drinfel'd V.G.* // Proc. Int. Congr. Math. (Berkley, 1986), Vol. 1. P. 798.
- [12] *Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Geometry and Physics. 1988. V. 5. №4. P. 533.

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
ул.Вавилова, 42, ГСП-1, 117966, Москва, Россия;
Институт теоретической и экспериментальной физики,
117259, Москва, Россия.

Поступила в редакцию
17.IX.1995

G. E. Arutyunov, P. B. Medvedev

POISSON REDUCTION OF THE LATTICE KAC–MOODY ALGEBRA

The poisson reduction of the $SL(N)$ lattice Kac-Moody algebra under the action of the maximal nilpotent subgroup of $SL(N)$ is considered. Poisson brackets on the reduced phase space are constructed. For $N = 2$ in the continuous limit they comprise with the Gelfand-Fuchs cocycle.