Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Эллиптические по t решения нелинейного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 188–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:22:33

А. О. Смирнов

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПО t РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрено четыре различных анзаца кривых Кричевера, ассоциированных с эллиптическими по t конечнозонными решениями нелинейного уравнения Шредингера. Приведен пример.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера (НШ) наряду с уравнениями Кортевега–де Фриза (КдФ), цепочки Тоды и уравнением sine -Гордон играет большую роль при описании многочисленных нелинейных интегрируемых процессов и явлений в физике и математике [1–6]. Значительную часть из них занимают периодические процессы. Поэтому вполне очевидно, насколько важной является задача отыскания периодических решений интегрируемых нелинейных уравнений. И если для уравнения КдФ [1, 7–22], цепочки Тоды [1, 23–26] и уравнения sine -Гордон [1, 10–12, 18, 27–29] уже найдены периодические по x (по n) и/или по t конечнозонные решения, то в случае НШ – только по x [11, 12, 26].

Как обычно, мы будем рассматривать систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} ip_t + p_{xx} - 8p^2q = 0, \\ iq_t - q_{xx} + 8pq^2 = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

частным случаем которой (при $q = \pm p^*$) является НШ

$$ip_t + p_{xx} \mp 8|p|^2p = 0. \quad (0.2)$$

В данной работе описываются четыре новых класса двоякопериодических по t решений уравнения НШ (0.1).

Автор благодарит В.Б.Матвеева, А.Р.Итса и Л.А.Бордаг за внимание к работе и полезные обсуждения.

Автор также благодарен Академии естественных наук, Международному научному фонду и Фонду Сороса за поддержку проводимых им исследований.

1. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Общие конечнозонные решения уравнения НШ давно и хорошо известны [30–34, 26]. Они строятся по гиперэллиптической поверхности (ГП) рода g :

$$\Gamma: w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (E - E_j), \quad (1.1)$$

точки ветвления которой ($E = E_j$, $j = 1, \dots, 2g + 2$) являются краями зон спектра оператора Дирака

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \Psi_x + \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{pmatrix} \Psi = E \Psi. \quad (1.2)$$

Бесконечно удаленной точке спектра соответствуют две различные точки данной ГП.

Выберем на Γ базис циклов $\gamma^t = (a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ с матрицей пересечения $C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$. Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов $d\mathcal{U}_j$,

$$\oint_{a_k} d\mathcal{U}_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Хорошо известно, что матрица периодов

$$B_{jk} = \oint_{b_j} d\mathcal{U}_k, \quad j, k = 1, \dots, g,$$

есть симметрическая матрица с положительно-определенной мнимой частью.

По матрице периодов B построим тэта-функцию с характеристиками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$:

$$\begin{aligned} \Theta[\alpha; \beta](\mathbf{z}|B) &\equiv \Theta[\alpha; \beta](\mathbf{z}) = \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp\{\pi i \langle B(\mathbf{m} + \alpha), \mathbf{m} + \alpha \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{m} + \alpha, \mathbf{z} + \beta \rangle\}, \\ \Theta[0; 0](\mathbf{z}|B) &\equiv \Theta(\mathbf{z}|B) \equiv \Theta(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$, суммирование ведется по целочисленной g -мерной решетке, а угловые скобки $\langle, \rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение.

Введем на Γ нормированные абелевы интегралы второго $-\Omega_1(\mathcal{P}), \Omega_2(\mathcal{P})$, и третьего $-\omega(\mathcal{P})$ рода, $\mathcal{P} \in \Gamma$, $\mathcal{P} = (w, E)$, с асимптотикой в бесконечно удаленных точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$\begin{aligned} \oint_{a_k} d\Omega_1 &= \oint_{a_k} d\Omega_2 = \oint_{a_k} d\omega = 0, & k &= 1, \dots, g, \\ \Omega_1(\mathcal{P}) &= \pm i (E + K_1 + R_1 E^{-1} + O(E^{-2})), & \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \Omega_2(\mathcal{P}) &= \mp i (2E^2 - K_2 + O(E^{-1})), & \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ \omega(\mathcal{P}) &= \mp (\ln E - \ln K_0 + O(E^{-1})), & \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm, \\ w &= \pm (E^{g+1} + O(E^g)), & \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если мы теперь обозначим через $2\pi i\mathbf{U}$, $2\pi i\mathbf{V}$ векторы b -периодов абелевых интегралов второго рода $\Omega_1(\mathcal{P})$ и $\Omega_2(\mathcal{P})$, соответственно, то функции

$$\begin{aligned} p(x, t) &= AK_0 \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t - \mathbf{Z} - \mathbf{D})}{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t - \mathbf{Z})} \exp\{i\Phi(x, t)\}, \\ q(x, t) &= \frac{K_0}{A} \frac{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t - \mathbf{Z} + \mathbf{D})}{\Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t - \mathbf{Z})} \exp\{-i\Phi(x, t)\}, \\ \Phi(x, t) &= 2K_1x + 2K_2t, \quad \mathbf{D} = \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^+) - \mathcal{U}(\mathcal{P}_\infty^-), \\ \mathbf{Z} &= \boldsymbol{\kappa} + \sum_{j=1}^g \mathcal{U}(\mathcal{P}^j) \end{aligned} \quad (1.4)$$

для любого $A \neq 0$ будут являться решением системы (0.1). Здесь $\boldsymbol{\kappa}$ – вектор римановых констант [33]; $\mathcal{P}^j$, $j = 1, \dots, g$, – неспециальный дивизор. При этом будет справедливым соотношение [30–33]

$$4pq = -\partial_x^2 \ln \Theta(\mathbf{U}x + \mathbf{V}t - \mathbf{Z}) - 2R_1,$$

которое обобщает на случай $g > 1$ известную формулу связи между эллиптическими функциями Якоби и Вейерштрасса.

2. БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим конечнозонное решение уравнения НШ, построенное по поверхности $\tilde{\Gamma}$, бирационально эквивалентной Γ и имеющей те же самые бесконечно удаленные точки:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}: \quad \tilde{w}^2 &= \prod_{j=1}^{2g+2} (\tilde{E} - \tilde{E}_j), \\ \tilde{w} &= \rho^{g+1}w, \quad \tilde{E} = \rho E + \delta, \quad \tilde{E}_j = \rho E_j + \delta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Легко видеть, что векторы b -периодов нормированных абелевых дифференциалов второго рода (1.3), определенных на поверхностях $\tilde{\Gamma}$ и Γ , связаны соотношениями

$$\tilde{\mathbf{U}} = \rho \mathbf{U}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \rho^2 \mathbf{V} - 4\delta \rho \mathbf{U}, \quad (2.2)$$

из которых нетрудно вывести закон преобразования решений уравнения НШ при растяжении и сдвиге спектра

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, t) &= \rho p(\rho x - 4\delta \rho t, \rho^2 t) \exp(2i\delta x + 4\delta^2 t), \\ \tilde{q}(x, t) &= \rho q(\rho x - 4\delta \rho t, \rho^2 t) \exp(-2i\delta x - 4\delta^2 t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Равенства (2.3) с очевидностью указывают на существенное различие между такими свойствами решений уравнения НШ, как периодичность по x и периодичность по t .

В самом деле, если какое-либо произведение решений $p(x, t)q(x, t)$ периодически по x , то и все остальные произведения решений $\tilde{p}\tilde{q}$, ассоциированные с бирационально эквивалентными ГП (2.1), будут так же периодическими по x . Таким образом, свойство

x -периодичности связано с целым классом бирационально эквивалентных гиперэллиптических поверхностей.

Напротив, если есть некоторое периодичное по t конечнозонное решение уравнения НШ, то в общем случае ни одно из новых решений $\tilde{p}\tilde{q}$ при $\delta \neq 0$ уже не будет обладать этим свойством. Исключение составляют лишь периодические и по x , и по t решения, для которых существует счетное множество так же периодических и по x , и по t решений $\tilde{p}\tilde{q}$, т.е. t -периодичность конечнозонного решения соответствует не всем бирационально эквивалентным ГП $\tilde{\Gamma}$, а только одной из них или счетному их множеству.

3. КРИВЫЕ КРИЧЕВЕРА. АНЗАЦ I

Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma = \{(k, \alpha)\}$ рода g , n -листно, $n \geq 3$, накрывающую тор Γ_0 :

$$\Gamma_0 : \{\wp'(\alpha)\}^2 = 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3 \equiv 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j), \quad (3.1)$$

и удовлетворяющую следующим требованиям: 1)

$$\Gamma : \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + \sum_{j=2}^n r_j(\alpha) k^{n-j} = 0, \quad (3.2)$$

где $r_j(\alpha)$ — эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma_0$ с полюсами в точках $\alpha = \pm\alpha_0$;

2) на Γ “над” $\alpha = \pm\alpha_0$ лежат две точки ветвления первого порядка — $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$, в окрестности которых функция $k(\alpha)$ имеет асимптотику

$$k = \mp \left(\frac{n-2}{\xi_{\pm}^2} + \frac{2n\kappa}{\xi_{\pm}} + O(1) \right), \quad \xi_{\pm}^2 = \alpha_0 \mp \alpha, \quad (3.3)$$

и других точек ветвления “над” $\alpha = \pm\alpha_0$ нет;

3) в остальных точках Γ “над” $\alpha = \pm\alpha_0$ имеем

$$k = \frac{2}{\alpha_0 \mp \alpha} + O(1); \quad (3.4)$$

4) на Γ существует голоморфная инволюция

$$\tau : (k, \alpha) \longrightarrow (-k, -\alpha), \quad \tau : \xi_+ \longrightarrow \xi_-, \quad (3.5)$$

имеющая $2g + 2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из п. 4 и 2 следует, что поверхность Γ является гиперэллиптической и что пара выделенных точек $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ переходят друг в друга при гиперэллиптической инволюции τ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя формулу Римана–Гурвица [35, 12], нетрудно получить, что род g поверхности Γ (3.1)–(3.5) равен $p + 2$, где $2p$ — число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = \pm\alpha_0$ и отличных от нулей функции $\partial_{\alpha} \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

ТЕОРЕМА 1. Решения $p(x, t)$ и $q(x, t)$ уравнения НШ (0.1), построенные по ГП Γ_g^n (3.1)–(3.5) и отмеченным точкам $\mathcal{P}_\infty^\pm$ “над” $\alpha = \pm\alpha_0$, могут быть выражены с точностью до экспоненциальных множителей через эллиптические σ -функции Вейерштрасса (с периодами накрываемой поверхности (3.1)) от $\frac{in}{8}t$. При этом произведение функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$ будет эллиптической функцией по $\frac{in}{8}t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве спектральной переменной функцию $E(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, инвариантную относительно инволюции τ (3.5) и имеющую пару простых полюсов в точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$ вида

$$E = \frac{1}{\xi_\pm} + \varkappa + O(\xi_\pm), \quad \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает, что нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_2$ будет иметь следующую асимптотику в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$

$$d\Omega_2 = \mp i (4E + O(E^{-2})) dE = \pm i \left(\frac{4}{\xi_\pm^3} + \frac{4\varkappa}{\xi_\pm^2} + O(1) \right) d\xi_\pm. \quad (3.7)$$

Применяя теорему Лиувилля, нетрудно показать, что нормированные абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega_2$ и

$$d\Omega^0 = -\frac{1}{2} (\wp(\alpha - \alpha_0) + \wp(\alpha + \alpha_0) + 2\eta/\omega) d\alpha, \quad (3.8)$$

определенные на Γ и Γ_0 , соответственно, связаны соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 \equiv -\frac{in}{8} d\Omega_2 - \frac{1}{4} dk \quad (3.9)$$

с точностью до голоморфных дифференциалов. Здесь σ есть накрывающее отображение, $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma_0$, $\sigma(k, \alpha) = \alpha$; $2\omega, 2\omega'$ – периоды тора (3.1); $\eta = \zeta(\omega)$, $\zeta(\alpha)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса.

Теперь легко видеть, что утверждение теоремы 1 является следствием теоремы о редукции многомерной τ -функции, накрывающей эллиптическую [18, 21, 22, 26, 28], равенства (3.9) и формул связи эллиптических функций Вейерштрасса с одномерными τ -функциями [36]. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Решение уравнения НШ, построенное по гиперэллиптической поверхности, удовлетворяющей условию теоремы 1 (или условию одной из теорем, доказанных ниже), мы будем называть эллиптическим по t решением уравнения НШ.

СЛЕДСТВИЕ 1. Сумма краев зон ГП, ассоциированной с эллиптическим по t решением уравнения НШ (анзац I), равна

$$c_0 = \sum_{j=1}^6 E_j = 6\varkappa. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.6), (1.1) и (1.3) вытекает, что функция $w(\mathcal{P})$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ имеет асимптотику

$$w = \pm \left\{ \frac{1}{\xi_\pm^{g+1}} + \frac{2(g+1)\varkappa - c_0}{2\xi_\pm^g} + O\left(\frac{1}{\xi_\pm^{g-1}}\right) \right\}, \quad (3.11)$$

следовательно,

$$\sigma^* d\alpha = \left\{ 2E^{g-2} + (6\varkappa - c_0)E^{g-3} + \sum_{k=4}^g d_k E^{g-k} \right\} \frac{dE}{w}. \quad (3.12)$$

Полагая $g = 2$, получаем равенство

$$\sigma^* d\alpha = 2 \frac{dE}{w} \quad (3.13)$$

и соотношение (3.10). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно доказать, что кривые данного типа (для рода $g = 2$) ассоциированы с двухзонными эллиптическими и по x [26], и по t решениями уравнения НШ. Иначе говоря, анзац I кривых Кривевера, ассоциированных с эллиптическими по t решениями уравнения НШ, является аналогом анзаца I кривых Кривевера, ассоциированных с эллиптическими по t решениями уравнения КдФ [21, 22].

4. АНЗАЦ II. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ

Рассмотрим риманову поверхность Γ рода g , n -листно накрывающую эллиптическую поверхность Γ_0 (3.1) и удовлетворяющую следующим требованиям: 1)

$$\Gamma : \quad \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + A\{\wp(\alpha + \alpha_0) - \wp(\alpha - \alpha_0)\}k^{n-1} + \sum_{i=2}^n r_i(\alpha)k^{n-i} = 0, \quad (4.1)$$

где $A \neq 0$ – параметр, $r_i(\alpha)$ – эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma_0$ с полюсами в точках $\alpha = \pm\alpha_0$;

2) в окрестности $\alpha = \pm\alpha_0$ функция $\mathcal{R}(k, \alpha)$ представима в виде

$$\mathcal{R}(k, \alpha) = \left(k \mp \frac{A}{(\alpha \mp \alpha_0)^2} + \frac{n-1}{\alpha \mp \alpha_0} + b_n^\pm(\alpha \mp \alpha_0) \right) \prod_{j=1}^{n-1} \left(k - \frac{1}{\alpha \mp \alpha_0} + b_j^\pm(\alpha \mp \alpha_0) \right), \quad (4.2)$$

где $b_j^\pm(\alpha \mp \alpha_0)$ – регулярные функции $\alpha \mp \alpha_0$;

3) на Γ существует инволюция

$$\tau : (k, \alpha) \longrightarrow (-k, -\alpha), \quad (4.3)$$

имеющая $2g + 2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Род g поверхности Γ (3.1), (4.1)–(4.3) равен $p+1$, где $2p$ – число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = \pm\alpha_0$ и отличных от нулей функции $\partial_\alpha \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

ТЕОРЕМА 2. Решения $p(x, t)$ и $q(x, t)$ уравнения НШ (0.1), построенные по ГП Γ_g^n (3.1), (4.1)–(4.3) и отмеченным точкам $\mathcal{P}_\infty^\pm$ “над” $\alpha = \pm\alpha_0$, могут быть выражены с точностью до экспоненциальных множителей через эллиптические σ -функции Вейерштрасса (с периодами накрываемой поверхности (3.1)) от $\frac{iA}{4}t$. При этом произведение функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$ будет эллиптической функцией по $\frac{iA}{4}t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, выберем в качестве спектральной переменной функцию $E(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, инвариантную относительно инволюции τ (4.3) и имеющую пару простых полюсов в точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$E = \frac{1}{\alpha_0 \mp \alpha} + \frac{n}{2A} + O(\alpha_0 \mp \alpha), \quad \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \quad (4.4)$$

Такой выбор функции $E(\mathcal{P})$ приводит к тому, что нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_2$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ будет иметь следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} d\Omega_2 &= \mp i (4E + O(E^{-2})) dE = \\ &= -i \left(\frac{4}{(\alpha_0 \mp \alpha)^3} + \frac{2n}{A(\alpha_0 \mp \alpha)^2} + O(1) \right) d\alpha. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Легко видеть, что нормированные абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega_2$ и $d\Omega^0$ (3.8), определенные на Γ и Γ_0 , соответственно, связаны с точностью до голоморфных дифференциалов соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 \equiv -\frac{iA}{4} d\Omega_2 + \frac{1}{2} dk, \quad (4.6)$$

которое и доказывает утверждение теоремы 2. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При указанном выше выборе мероморфной функции $E(\mathcal{P})$ функция $w(\mathcal{P})$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ имеет асимптотику

$$w = \pm \left\{ \frac{1}{(\alpha_0 \mp \alpha)^{g+1}} + \frac{n(g+1) - Ac_0}{2A(\alpha_0 \mp \alpha)^g} + O\left(\frac{1}{(\alpha_0 \mp \alpha)^{g-1}}\right) \right\}. \quad (4.7)$$

Следовательно, накрытия, удовлетворяющие теореме 2, соответствуют редукции голоморфного гиперэллиптического интеграла вида

$$\sigma^* d\alpha = \left\{ E^{g-1} + \frac{2n - Ac_0}{2A} E^{g-2} + \sum_{k=3}^g f_k E^{g-k} \right\} \frac{dE}{w}. \quad (4.8)$$

Сравнивая (3.12) и (4.8), мы видим, что анзацы I и II отличаются друг от друга редуцируемыми интегралами.

5. ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ. АНЗАЦ III

Легко видеть, что при определении анзаца I значение параметра $\alpha_0 \notin \{0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Поэтому случай $\alpha_0 = 0$ надо рассматривать отдельно.

Пусть риманова поверхность Γ рода g n -листно ($n \geq 5$) покрывает эллиптическую Γ_0 (3.1) и удовлетворяет следующим требованиям: 1)

$$\Gamma: \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + \sum_{j=2}^n r_j(\alpha) k^{n-j} = 0, \quad (5.1)$$

где $r_j(\alpha)$ – эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma_0$ с полюсами в точке $\alpha = 0$;

2) на Γ “над” $\alpha = 0$ лежат две точки ветвления первого порядка $-\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$, в окрестности которых функция $k(\alpha)$ имеет асимптотику

$$k = \mp \left(\frac{n-4}{\xi_{\pm}^2} + \frac{2n\kappa}{\xi_{\pm}} + O(1) \right), \quad \xi_{\pm}^2 = \mp \alpha, \quad (5.2)$$

и других точек ветвления “над” $\alpha = 0$ нет;

3) в остальных точках Γ “над” $\alpha = 0$

$$k = -\frac{4}{\alpha} + O(1); \quad (5.3)$$

4) на Γ существует голоморфная инволюция

$$\tau: (k, \alpha) \longrightarrow (-k, -\alpha), \quad \tau: \xi_+ \longrightarrow \xi_-, \quad (5.4)$$

имеющая $2g + 2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Род g поверхности Γ (3.1), (5.1)–(5.4) равен $p+2$, где $2p$ – число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = 0$ и отличных от нулей функции $\partial_{\alpha} \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

ТЕОРЕМА 3. Решения $p(x, t)$ и $q(x, t)$ уравнения НШ (0.1), построенные по ГП Γ_g^n (3.1), (5.1)–(5.4) и отмеченным точкам $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ “над” $\alpha = 0$, могут быть выражены с точностью до экспоненциальных множителей через эллиптические σ -функции Вейерштрасса (с периодами покрываемой поверхности (3.1)) от $\frac{in}{8}t$. При этом произведение функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$ будет эллиптической функцией по $\frac{in}{8}t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве спектральной переменной функцию $E(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, инвариантную относительно инволюции τ (5.4) и имеющую пару простых полюсов в точках $\mathcal{P}_{\infty}^{\pm}$ вида

$$E = \frac{1}{\xi_{\pm}} + \kappa + O(\xi_{\pm}), \quad \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_{\infty}^{\pm}. \quad (5.5)$$

Из (5.5) вытекает, что нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_2$ будет иметь следующую асимптотику в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$:

$$d\Omega_2 = \mp i (4E + O(E^{-2})) dE = \pm i \left(\frac{4}{\xi_\pm^3} + \frac{4\kappa}{\xi_\pm^2} + O(1) \right) d\xi_\pm. \quad (5.6)$$

Нормированные абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega_2$ и

$$d\Omega^0 = -(\wp(\alpha) + \eta/\omega) d\alpha, \quad (5.7)$$

определенные на Γ и Γ_0 , соответственно, связаны соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 \equiv -\frac{in}{8} d\Omega_2 - \frac{1}{4} dk \quad (5.8)$$

с точностью до голоморфных дифференциалов, и, таким образом, утверждение теоремы 3 также является доказанным. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Сумма краев зон ГП, ассоциированной с эллиптическим по t решением уравнения НШ (анзац III), равна

$$c_0 = \sum_{j=1}^6 E_j = 6\kappa. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.5), (1.1) и (1.3) вытекает, что функция $w(\mathcal{P})$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ имеет асимптотику

$$w = \pm \left\{ \frac{1}{\xi_\pm^{g+1}} + \frac{2(g+1)\kappa - c_0}{2\xi_\pm^g} + O\left(\frac{1}{\xi_\pm^{g-1}}\right) \right\}, \quad (5.10)$$

следовательно,

$$\sigma^* d\alpha = \left\{ 2E^{g-2} + (6\kappa - c_0)E^{g-3} + \sum_{k=4}^g d_k E^{g-k} \right\} \frac{dE}{w}. \quad (5.11)$$

Полагая $g = 2$, получаем равенство

$$\sigma^* d\alpha = 2 \frac{dE}{w} \quad (5.12)$$

и соотношение (5.9). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Нетрудно доказать, что кривые рода $g = 2$ ассоциированы с двухзонными эллиптическими и по x ([26], анзац I), и по t решениями уравнения НШ. Поскольку оба накрытия для кривой рода 2 имеют одинаковое число листов [35], минимальное число листов для кривой Кричевера, по которой может быть построено двухзонное эллиптическое по x решение уравнения НШ (анзац I), так же должно быть равно $n = 5$, что объясняет соответствующие результаты работы [26].

6. АНЗАЦ IV. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ. ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим риманову поверхность Γ рода g , n -листно накрывающую ($n \geq 3$) эллиптическую поверхность Γ_0 (3.1) и удовлетворяющую следующим требованиям: 1)

$$\Gamma: \mathcal{R}(k, \alpha) \equiv k^n + \sum_{i=2}^n r_i(\alpha) k^{n-i} = 0, \quad (6.1)$$

где $r_i(\alpha)$ – эллиптические функции от $\alpha \in \Gamma_0$ с полюсами в точке $\alpha = 0$;

2) в окрестности $\alpha = 0$ функция $\mathcal{R}(k, \alpha)$ представима в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k, \alpha) = & \left(k - \frac{A}{\alpha^2} + \frac{n-2}{\alpha} + b_n(\alpha) \right) \times \\ & \times \left(k + \frac{A}{\alpha^2} + \frac{n-2}{\alpha} - b_n(-\alpha) \right) \prod_{j=1}^{n-2} \left(k - \frac{2}{\alpha} + b_j(\alpha) \right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $b_j(\alpha)$ – регулярные функции α ;

3) на Γ существует инволюция

$$\tau: (k, \alpha) \longrightarrow (-k, -\alpha), \quad (6.3)$$

имеющая $2g + 2$ неподвижные точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Род g поверхности Γ (3.1), (6.1)–(6.3) равен $p+1$, где $2p$ – число нулей функции $\partial_k \mathcal{R}(k, \alpha)$, не лежащих “над” $\alpha = 0$ и отличных от нулей функции $\partial_\alpha \mathcal{R}(k, \alpha)$ (с учетом кратности).

ТЕОРЕМА 4. Решения $p(x, t)$ и $q(x, t)$ уравнения НШ (0.1), построенные по ГП Γ_g^n (3.1), (6.1)–(6.3) и отмеченным точкам $\mathcal{P}_\infty^\pm$ “над” $\alpha = 0$, могут быть выражены с точностью до экспоненциальных множителей через эллиптические σ -функции Вейерштрасса (с периодами накрываемой поверхности (3.1)) от $\frac{iA}{4}t$. При этом произведение функций $p(x, t)$ и $q(x, t)$ будет эллиптической функцией по $\frac{iA}{4}t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, выберем в качестве спектральной переменной функцию $E(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, инвариантную относительно инволюции τ (6.3) и имеющую пару простых полюсов в точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$,

$$E = \mp \frac{1}{\alpha} + \frac{n}{2A} + O(\alpha), \quad \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_\infty^\pm. \quad (6.4)$$

Такой выбор функции $E(\mathcal{P})$ приводит к тому, что нормированный абелев дифференциал второго рода $d\Omega_2$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ будет иметь следующую асимптотику:

$$d\Omega_2 = \mp i (4E + O(E^{-2})) dE = i \left(\pm \frac{4}{\alpha^3} - \frac{2n}{A\alpha^2} + O(1) \right) d\alpha. \quad (6.5)$$

Легко видеть, что нормированные абелевы дифференциалы второго рода $d\Omega_2$ и $d\Omega^0$ (5.7), определенные на Γ и Γ_0 , соответственно, связаны с точностью до голоморфных дифференциалов соотношением

$$\sigma^* d\Omega^0 \equiv -\frac{iA}{4} d\Omega_2 + \frac{1}{2} dk, \quad (6.6)$$

которое и доказывает утверждение теоремы 4. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. При указанном выше выборе мероморфной функции $E(\mathcal{P})$ функция $w(\mathcal{P})$ в окрестности точек $\mathcal{P}_\infty^\pm$ имеет асимптотику

$$w = (\mp 1)^g \left\{ -\frac{1}{\alpha^{g+1}} \pm \frac{n(g+1) - Ac_0}{2A\alpha^g} + O\left(\frac{1}{\alpha^{g-1}}\right) \right\}. \quad (6.7)$$

Таким образом, накрытия, удовлетворяющие теореме 4, соответствуют редукции гиперэллиптического интеграла

$$\sigma^* d\alpha = \left\{ E^{g-1} + \frac{2n - Ac_0}{2A} E^{g-2} + \sum_{k=3}^g f_k E^{g-k} \right\} \frac{dE}{w}. \quad (6.8)$$

7. ПРИМЕР

Кривая $\Gamma_2^3 = \{(k, \alpha)\}$ (анзац IV) определяется уравнением

$$k^3 - A^2(\wp(\alpha) - e_j)(\wp(\alpha) + B)k - A^2(\wp(\alpha) - e_j)\wp'(\alpha) = 0, \quad (7.1)$$

где $e_j = 4r^2t^2$,

$$A^{-1} = 2ts(1-s), \quad B = 2r^2t^2 + 2t^2(2s-1)^2(2s^2-2s-1),$$

r, s, t – вспомогательные параметры решения,

$$e_k = 2t^2(1-2s)^3 - 2t^2r^2, \quad e_l = 2t^2(2s-1)^3 - 2t^2r^2.$$

Каноническая форма гиперэллиптической кривой Γ_2^3 (6.1), (3.1) имеет вид

$$w^2 = (E - E_1)(E - E_2)(E - E_3)(E^3 + A_1E^2 + B_1E + C_1), \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= -t(s^2 + 3s - 2), & E_2 &= -t(s^2 - 5s + 2), \\ E_3 &= -t(5s^2 - 5s + 2), & A_1 &= t(11s^2 - 11s + 2), \\ B_1 &= -6t^2r^2 + t^2(35s^4 - 70s^3 + 35s^2 - 2), \\ C_1 &= -6t^3r^2(5s^2 - 5s + 2) + \\ &\quad + t^3(5s^3 + s^2 - 6s + 2)(5s^3 - 16s^2 + 11s - 2). \end{aligned}$$

Связь между различными представлениями кривой Γ_2^3 осуществляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \wp'(\alpha) &= \frac{2w(E - H_1)(E - H_2)}{(E - E_3)^2}, & k &= \frac{Aw}{E - E_3}, \\ \wp(\alpha) &= \frac{E^3 + A_2E^2 + B_2E + C_2}{E - E_3}, \end{aligned}$$

где $A_2 = A_1$, $B_2 = B_1 + e_j$,

$$\begin{aligned} H_1 &= -t(s-1)(5s-2), \quad H_2 = -ts(5s-3), \\ C_2 &= -2t^3r^2(5s^2-5s+2) + \\ &\quad + t^3(5s^3+s^2-6s+2)(5s^3-16s^2+11s-2). \end{aligned}$$

Накрытие (6.1), (3.1) соответствует редукции ненормированного голоморфного дифференциала

$$d\alpha = \frac{E - H_3}{w} dE \quad (7.3)$$

и ненормированного абелева дифференциала второго рода с полюсами второго порядка в точках $\mathcal{P}_\infty^\pm$

$$\begin{aligned} d\Omega_2 &= -\frac{2i}{A}(2\wp(\alpha)d\alpha + dk) = \\ &= -4i\{E^4 + A_3E^3 + B_3E^2 + C_3E + D_3\} \frac{dE}{w}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_3 &= -t(3s^2-3s+2), \quad A_3 = t(3s-1)(3s-2), \\ B_3 &= -3t^2r^2 + 3t^2(7s^4-14s^3+5s^2+2s-1), \\ C_3 &= -2t^3r^2(7s^2-7s+3) + \\ &\quad + t^3(3s^6-9s^5-77s^4+169s^3-132s^2+46s-6), \\ D_3 &= t^4r^2s(1-s)(3s^2-3s-2) + \\ &\quad + t^4s(1-s)(10s^6-30s^5+108s^4-166s^3+121s^2-43s+6). \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [3] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
- [4] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [5] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
- [6] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
- [7] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. №12. С. 2131–2143.
- [8] Airault H., McKean H. P., Moser J. // Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 95–148.
- [9] Кричевер И. М. // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. №4. С. 45–54.
- [10] Белокопос Е. Д., Энольский В. З. // ТМФ. 1982. Т. 53. №2. С. 271–282.
- [11] Бабиш М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1985. Т. 49. №3. С. 511–529.
- [12] Белокопос Е. Д., Бобенко А. И., Матвеев В. Б., Энольский В. З. // УМН. 1986. Т. 41. №2. С. 3–42.
- [13] Verdier J. -L. // Algebraic Analysis. Vol. II (Micio Sato Sixtieth Birthday Vol.): Academic Press, 1988. P. 901–910.
- [14] Treibich A. // Duke Math. J. 1989. V. 59. №3. P. 611–627.

- [15] *Treibich A., Verdier J. -L.* Solitons elliptiques (Volume en l'honneur du 60^e anniversaire du prof. A. Grothendieck). Boston: Birkhäuser, 1990.
- [16] *Белоколов Е. Д., Энольский В. З.* // УМН. 1989. Т. 44. №5. С. 155–156.
- [17] *Белоколов Е. Д., Энольский В. З.* // Функци. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. №1. С. 57–58.
- [18] *Смирнов А. О.* // Мат. заметки. 1989. Т. 46. №5. С. 100–102.
- [19] *Смирнов А. О.* // Мат. заметки. 1989. Т. 45. №6. С. 66–73.
- [20] *Тайманов И. А.* // ТМФ. 1990. Т. 84. №1. С. 38–45.
- [21] *Смирнов А. О.* // ТМФ. 1994. Т. 100. №2. С. 183–198.
- [22] *Smirnov A. O.* // Acta Appl. Math. 1994. V. 36. P. 125–166.
- [23] *Кричевер И. М.* // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216.
- [24] *Кричевер И. М.* // УМН. 1981. Т. 36. №2. С. 79–80.
- [25] *Смирнов А. О.* // ТМФ. 1989. Т. 78. №1. С. 11–21.
- [26] *Смирнов А. О.* // Мат. сборник. 1994. Т. 185. №8. С. 103–114.
- [27] *Бобенко А. И.* // Функци. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. №3. С. 74–75.
- [28] *Смирнов А. О.* // Мат. сборник. 1990. Т. 181. №6. С. 804–812.
- [29] *Смирнов А. О.* // Вопросы квантовой теории поля и статистической физики (Зап. научн. семин. ПОМИ. Т. 205). С.-Пб.: Наука, 1993.
- [30] *Итс А. Р.* // Вестн. ЛГУ, сер. мат.-мех.-астр. 1976. №7. Вып. 2. С. 39–46.
- [31] *Итс А. Р.* Точное интегрирование в римановых Θ -функциях нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза: Дис. канд. физ.-матем. наук. Л.: ЛГУ, 1977.
- [32] *Итс А. Р., Котляров В. П.* // ДАН УССР, сер. А. 1976. №11. С. 965–968.
- [33] *Matveev V. B.* Abelian functions and solitons: Preprint № 373. Univ. of Wrocław, 1976.
- [34] *Итс А. Р.* // Изв. АН СССР, сер. матем. 1985. Т. 49. №3. С. 530–565.
- [35] *Krazer A.* Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903.
- [36] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.

Санкт-Петербургская государственная академия
аэрокосмического приборостроения

Поступила в редакцию
27.III.1995 г.

A. O. Smirnov

ELLIPTIC IN t SOLUTIONS OF THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

Four various ansatz of the Krichever curves for the elliptic in t solutions of the nonlinear Schrödinger equation are considered. An example is given.