Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, Глобальный поток ренормализационной группы и термодинамический предел в фермионной иерархической модели, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 201–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:29:59

Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров

ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОТОК РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Преобразование ренормализационной группы в фермионной иерархической модели задается рациональным отображением в плоскости констант связи. Мы исследуем глобальную динамику этого отображения. Доказано существование термодинамического предела в исследуемых областях констант связи. Изучен вопрос об автомодельном пределе построенных полей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы продолжаем исследование свойств фермионной иерархической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели Дайсона, введенной в статье [1] (обобщение этой модели на случай произвольного числа компонент поля см. в [2]). В частности, там было показано, что преобразование ренормализационной группы (РГ) описывается как рациональное преобразование в пространстве констант связи. Особенно простой вид этого преобразования в четырехкомпонентной $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели позволил явно описать все ветви неподвижных точек РГ. В некотором смысле эта модель является точно решаемой и допускает исследование термодинамических свойств для произвольных значений констант связи. Она сочетает все преимущества иерархических моделей для [3–5] с комбинаторными свойствами гроссманово-значных спинных моделей типа Гросса–Неве [6, 7]. Отметим, что вырожденный случай иерархической фермионной модели при некотором выделенном значении параметра РГ был ранее изучен Дорласом [8].

Напомним основные определения. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $V_{k,s} = \{j : j \in \mathbb{N}, (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, и пусть $s(i, j) = \min\{s : \text{существует } k \text{ такое, что } i \in V_{k,s}, j \in V_{k,s}\}$. Иерархическое расстояние $d(i, j)$, $i, j \in \mathbb{N}$, определяется по формуле $d(i, j) = n^{s(i,j)}$, если $i \neq j$, $d(i, i) = 0$. Рассмотрим четырехкомпонентное фермионное поле $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, $i \in \mathbb{N}$, где компоненты суть образующие гроссмановой алгебры. Блок-спинное РГ-преобразование определяется по формуле

$$r_\alpha \psi^*(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi^*(j),$$

где α есть параметр РГ. Мы переобозначим $V_{1,N}$ через Λ_N , и пусть A_N будет гроссмановой подалгеброй, порожденной $4n^N$ генераторами, соответствующими этому подобъему.

Мы определим гиббсовское состояние (“математическое ожидание”) $\rho_N(r, g)$ на A_N как

$$(\rho_N(\alpha; r, g))(F) = Z_N^{-1}(r, g) \int F(\psi^*) \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} f(\psi^*(i); r, g) d\psi^*(i),$$

где $d\psi^* = d\psi_1 d\bar{\psi}_1 d\psi_2 d\bar{\psi}_2$, и мы используем обычные правила интегрирования по антикоммутирующим переменным [9], $F \in A_N$,

$$H_{0,N}(\psi^*; \alpha) = \sum_{i,j \in \Lambda_N} d_{0,N}(i, j) (\bar{\psi}_1(i) \psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i) \psi_2(j)),$$

$$d_{0,N}(i, j) = d_0(i, j) - c(N), \quad c(N) = \frac{(1 - n^{\alpha-1})^2}{(1 - n^{-\alpha})(1 - n^{-1})} n^{-\alpha(N+1)},$$

$$d_0(i, i) = \frac{1 - n^{-1}}{1 - n^{-\alpha}}, \quad d_0(i, j) = \frac{1 - n^{\alpha-1}}{1 - n^{-\alpha}} d^{-\alpha}(i, j), \quad i \neq j,$$

$$f(\psi^*(i); r, g) = \exp\{- (r(\bar{\psi}_1(i) \psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i) \psi_2(i)) + g(\bar{\psi}_1(i) \psi_1(i) \bar{\psi}_2(i) \psi_2(i)))\},$$

$$Z_N(r, g) = \int \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} f(\psi^*(i); r, g) d\psi^*(i).$$

Тогда для ренормированного состояния $\rho'(F) = \rho(F(r_\alpha \psi^*))$, $F \in A_{N-1}$, можно показать (см. [1]), что

$$\rho'_N(H_N(\psi^*; \alpha; r, g)) = \rho_{N-1}(H_{N-1}(\psi^*; \alpha; r', g')),$$

где

$$r' = n^{\alpha-1} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} (r+1) - 1 \right), \quad g' = n^{2\alpha-3} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g. \quad (1)$$

РГ-преобразование (1) имеет две ветви нетривиальных неподвижных точек $(r_\pm(\alpha), g_\pm(r_\pm(\alpha)))$, где

$$r_\pm(\alpha) = \frac{\pm\sqrt{n} - n^{\alpha-1}}{1 \mp \sqrt{n}}, \quad g_\pm(r) = \frac{r(1+r)^2}{1+r \pm 1/\sqrt{n}}, \quad \alpha \neq 1.$$

При $\alpha = 1$ эти ветви проходят через точку $(-1, 0)$, которую мы исключаем из нашего рассмотрения ввиду того, что $Z_N(-1, 0) = 0$. При $\alpha = 3/2$ “плюсовая” ветвь неподвижных точек пересекается с тривиальной (“гауссовой”) ветвью неподвижных точек $r \equiv 0, g \equiv 0$. При α , стремящемся к $1/2$, значения g_+ стремятся к плюс или минус бесконечности, но, уточняя [1], мы можем сказать, что при $\alpha = 1/2$ “плюсовая” ветвь проходит через состояние, задаваемое δ -функцией, которой соответствует грасманово-значная “плотность”

$$\delta(\psi^*(i)) = \bar{\psi}_1(i) \psi_1(i) \bar{\psi}_2(i) \psi_2(i).$$

Заметим, что это состояние является вырожденным в том смысле, что оно отлично от нуля только на подпространстве констант.

Верхняя полуплоскость $g > 0$ разбивается на 3 части:

часть, лежащую слева от устойчивой инвариантной кривой для “минусовой” неподвижной точки (r_-, g_-) ;

часть, лежащую справа от устойчивой инвариантной кривой для точки (r_+, g_+) (при $\alpha > 3/2$) или для точки $(0, 0)$ (при $1 < \alpha \leq 3/2$);

часть, лежащую между ними.

В этой работе мы опишем глобальную динамику РГ в первых двух частях. Вопрос о поведении РГ в последней части является более сложным и находится в стадии исследования. Мы также исследуем динамику РГ в нижней полуплоскости при $\alpha \geq 3/2$. При $\alpha < 3/2$ “плюсовая” неподвижная точка переходит в нижнюю полуплоскость и является при некоторых значениях α неустойчивым фокусом, и мы также не будем обсуждать этот случай в данной статье.

Эти результаты позволяют доказать существование термодинамического предела в рассматриваемых областях. Кроме того, из анализа динамики РГ следует, что все эти области являются зоной притяжения состояния, задаваемого δ -функцией. Если использовать аналогию с теорией случайных полей, можно сказать, что автомодельный предел фермионных полей является вырожденным полем с независимыми значениями.

2. ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОТОК РГ

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} g_1^\pm(r) &= \frac{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - n + n^{2-\alpha}}{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - 1 + n^{1-\alpha}}(r+1)^2, \\ g_2(r) &= \frac{(1 - n^{1-\alpha})r}{(1 - n^{-\alpha})r + 1 - n^{-1}}(r+1)^2, \\ g_3^\pm(r) &= \frac{n^{\alpha-1/2} \mp n}{n^{\alpha-1/2} \mp 1}(r+1)^2, \\ g_4(r) &= \frac{r(1 - n^{\alpha-2})}{r(1 - n^{\alpha-2}) + 1 - n^{-1}}(r+1)^2 \end{aligned}$$

(см. рисунок). Прямым вычислением легко проверить справедливость следующих формул:

$$\begin{aligned} \frac{(r'(r, g) + 1)^2}{g'(r, g)} - \frac{(r+1)^2}{g} &= \frac{n-1}{g(g - (r+1)^2)^2} \left(r+1 - \frac{1 - n^{1-\alpha}}{n - \sqrt{n}} \right) \times \\ &\times \left(r+1 - \frac{1 - n^{1-\alpha}}{n + \sqrt{n}} \right) (g - g_1^+(r))(g - g_1^-(r)), \end{aligned} \quad (2)$$

$$r'(r, g) - r = n^\alpha ((1 - n^{-\alpha})r + 1 - n^{-1})(g - g_2(r)), \quad (3)$$

$$g'(r, g) - g = \frac{g(n^{2\alpha-1} - 1)}{g - n(r+1)^2} (g - g_3^+(r))(g - g_3^-(r)). \quad (4)$$

Из формулы (2) следует, что кривые $g_1^\pm(r)$ характеризуются тем, что одна итерация отображения (1) сохраняет отношение $(r+1)^2/g$; знак плюс (минус) означает, что соответствующая кривая проходит через “плюсовую” (“минусовую”) неподвижную точку. Аналогично из формулы (3) (формулы (4)) следует, что кривая $g_2(r)$ (кривые $g_1^\pm(r)$ и

Взаимное расположение рассматриваемых кривых в первом квадранте при $\alpha > 3/2$

ось r) есть множество точек (r, g) , для которых одна итерация отображения (1) сохраняет значение r (соответственно значение g).

Можно показать (см. [1]), что в “плюсовой” неподвижной точке при $\alpha > 3/2$ старшее собственное число дифференциала РГ больше единицы, а младшее положительно и меньше единицы. В “минусовой” неподвижной точке при $\alpha > 1$ старшее собственное число дифференциала РГ больше единицы, а младшее отрицательно и больше чем -1 . Собственные числа дифференциала РГ в тривиальной неподвижной точке равны $n^{\alpha-1}$ и $n^{2\alpha-3}$. Из общей теории динамических систем (см. [10]) следует локальное существование и единственность устойчивых инвариантных кривых, проходящих через точку (r_+, g_+) при $\alpha > 3/2$, через тривиальную неподвижную точку при $1 < \alpha < 3/2$ и через точку (r_-, g_-) при $\alpha > 1$. Оказывается, что в нашем случае можно описать глобальное поведение этих инвариантных кривых.

Пусть

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(r, g) : 0 \leq r \leq r_+(\alpha), \max\{0, g_4(r), g_1^+(r)\} \leq g \leq g_+(r)\} \cup \\ &\quad \cup \{(r, g) : \max\{0, r_+(\alpha)\} \leq r, g_+(r) \leq g \leq g_1^+(r)\}, \\ G_2 &= \{(r, g) : r \leq r_-(\alpha), g_1^-(r) \leq g \leq g_-(r)\} \cup \\ &\quad \cup \{(r, g) : r_-(\alpha) < r < -1, g_-(r) < g < g_1^-(r)\}, \\ G_3 &= \left\{ (r, g) : -\frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\alpha}} < r \leq 0, g_2(r) \leq g \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Существует гладкая возрастающая функция $g = h_+(r; \alpha)$, $0 \leq r < \infty$, график которой лежит в области G_1 и является частью γ_1 устойчивой РГ-инвариантной кривой для “плюсовой” неподвижной точки при $\alpha > 3/2$ и для тривиальной неподвижной точки при $3/2 \geq \alpha > 1$. Существует гладкая убывающая функция $g = h_-(r; \alpha)$, $-\infty < r < -1$, график которой лежит в области G_2

и является частью γ_2 устойчивой РГ-инвариантной кривой для “минусовой” неподвижной точки при $\alpha > 1$. При $\alpha \geq 3/2$ для неподвижной точки $(0, 0)$ существует единственная неустойчивая РГ-инвариантная кривая γ_3 , принадлежащая области G_3 . Эта кривая уходит по g на $-\infty$ и делит нижнюю полуплоскость на две связанные части. Кроме того, все точки из множеств $G_i \setminus \gamma_i$ за конечное число итераций РГ выходят из областей G_i , $i = 1, 2, 3$. Образы кривых γ_1 и γ_2 после первой итерации РГ суть множества

$$\left\{ (r, g) : (r, g) \in \gamma_1, \quad \frac{g}{(r + n^{\alpha-1})^2} < \frac{1}{n} \right\}$$

и

$$\left\{ (r, g) : (r, g) \in \gamma_2, \quad \frac{1}{n} < \frac{g}{(r + n^{\alpha-1})^2} < 1 \right\},$$

соответственно. Образ кривой γ_3 совпадает с γ_3 .

Утверждения теоремы 1 принадлежат одному из авторов (М.Д.М.), и их доказательства будут опубликованы в отдельной работе.

Заметим, что кривая γ_1 проходит через $(0, 0)$; область правее этой кривой обозначим через Ω_1 :

$$\Omega_1 = \{ (r, g) : r > 0, \quad 0 \leq g < h_+(r; \alpha) \}.$$

Кривая γ_2 входит в $(-1, 0)$; область левее этой кривой обозначим через Ω_2 :

$$\Omega_2 = \{ (r, g) : r < -1, \quad 0 \leq g < h_-(r; \alpha) \}.$$

Часть нижней полуплоскости $g \leq 0$ справа (слева) от кривой γ_3 мы обозначим через Ω_3 (через Ω_4).

Обозначим через $(r^{(N)}, g^{(N)})$ образ точки $(r, g) = (r^{(0)}, g^{(0)})$ при N итерациях отображения (1). Пусть

$$\beta^{(N)} = \frac{g^{(N)}}{(r^{(N)} + 1)^2}, \quad \sigma^{(N)} = \frac{1 - \beta^{(N)}}{1 - \beta^{(N)}/n}.$$

Заметим, что если для некоторой точки (r, g) выполнено $g^{(N_0)} = 0$, то

$$g^{(N)} = 0, \quad r^{(N)} = r^{(N_0)} n^{(N-N_0)(\alpha-1)}$$

для всех $N \geq N_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 1$ и $(r, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ или $\alpha \geq 3/2$ и $(r, g) \in \Omega_3 \cup \Omega_4$. Тогда существуют константы $c_1(r^{(0)}, g^{(0)})$ и $c_2(r^{(0)}, g^{(0)})$, такие что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^{(N)}}{n^{N(\alpha-1)}} = c_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{g^{(N)}}{n^{N(2\alpha-3)}} = c_2.$$

При этом $c_1 > 0$, если $(r, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_3$; $c_1 < 0$, если $(r, g) \in \Omega_2 \cup \Omega_4$; константа c_2 равняется нулю тогда и только тогда, когда $g^{(N)} = 0$ для некоторого $N \geq 0$.

Прежде чем доказывать теорему, докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Области Ω_1 и Ω_2 при $\alpha > 1$ и области Ω_3, Ω_4 при $\alpha \geq 3/2$ переходят сами в себя при преобразовании РГ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение для области Ω_2 (доказательство для других областей проводится аналогично). Заметим сначала, что если

$$(r, g) \in \Omega'_2 \equiv \{(r, g) : r < -1, 0 < g < (r+1)^2\},$$

то $(r', g') \in \Omega'_2$, так как

$$r' + 1 < n^{\alpha-1} \sigma(r+1), \quad (5)$$

$$g' = n^{2\alpha-3} \sigma^2 g. \quad (6)$$

Докажем теперь, что образ области

$$\Omega''_2 \equiv \{(r, g) : (r, g) \in \Omega_2, g > (r+1)^2\}$$

содержится в Ω_2 . Допустим, что это не так, т.е. существует точка $(r_1, g_1) \in \Omega''_2$, такая что $(r'_1, g'_1) \notin \Omega_2$. Очевидно, что в области Ω''_2 имеется точка (r_2, g_2) , образ которой принадлежит Ω_2 . (Пусть, например, $(r_2, g_2) = (r, g_1^-(r))$, где $r < r_-(\alpha)$. Тогда $r'_2 = r_-(\alpha)$, $g'_2 < g_-(r_-)$.) Рассмотрим образ некоторой кривой γ , принадлежащей области Ω''_2 и имеющей два конца в точках (r_1, g_1) и (r_2, g_2) . Очевидно, что должна существовать точка $(r_3, g_3) \in \gamma$, такая что $(r'_3, g'_3) \in \gamma_2$. Из равенства

$$\frac{g'}{(r' + n^{\alpha-1})^2} = n^{-1} \frac{g}{(r+1)^2} \quad (7)$$

следует, что $n^{-1} < g'_3 / (r'_3 + n^{\alpha-1})^2 < 1$. По теореме 1 и в силу того что отображение (1) обратимо в области G_2 , $(r_3, g_3) \in \gamma_2$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha \geq 3/2$. Тогда, если $(r, g) \in \Omega'_3 = \Omega_3 \setminus G_3$, то $r^{(N)} \rightarrow +\infty$. Если же $(r, g) \in \Omega'_4 = \Omega_4 \setminus G_3$, то $r^{(N)} \rightarrow -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(r, g) \in \Omega'_4$, т.е. $r < -\frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\alpha}}$, $g < 0$. Тогда легко доказать неравенство

$$r' + \frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\alpha}} < n^{\alpha-1} \left(r + \frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\alpha}} \right).$$

Отсюда $r^{(N)} \rightarrow -\infty$.

Пусть теперь $(r, g) \in \Omega'_3$. Докажем, что $(r', g') \in \Omega'_3$. Действительно, нетрудно проверить, что образ кривой $g = g_2(r)$ задается как $g = g'_2(r)$, где

$$g'_2(r) = \frac{n^{-1}(1-n^{1-\alpha})r}{(1-n^{-\alpha})r + 1 - n^{-1}} (r + n^{\alpha-1})^2$$

— возрастающая функция при $-\frac{1-n^{-1}}{1-n^{-\alpha}} < r < 0$, при этом $g'_2(r) < g_2(r)$. Область Ω'_3 при преобразовании РГ отображается во множество точек нижней полуплоскости, лежащих правее кривой $g = g'_2(r)$ и, следовательно, принадлежащих Ω'_3 .

В силу формулы (3) из доказанного следует, что если $(r, g) \in \Omega'_3$, то последовательность $r^{(N)}$ возрастающая. Допустим, что существует конечный предел $r^{(\infty)}$ последовательности $r^{(N)}$. Очевидно, что $r^{(\infty)} > -\frac{1-1/n}{1-n^{-\alpha}}$ и $g^{(N)} \rightarrow \infty$ (в противном случае мы бы имели неподвижную точку в нижней полуплоскости, что при $\alpha \geq 3/2$ неверно). Переходя в тождестве

$$r^{(N+1)} = n^{\alpha-1} \left(\frac{(r^{(N)} + 1)^2 - g}{(r^{(N)} + 1)^2 - g/n} (r^{(N)} + 1) - 1 \right)$$

к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим соотношение

$$r^{(\infty)} = n^{\alpha-1} (n(r^{(\infty)} + 1) - 1),$$

которое не может быть выполнено при $r^{(\infty)} > -\frac{1-1/n}{1-n^{-\alpha}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha > 1$; $g^{(N)} \neq 0$ при всех N ; $\beta^{(N)} < d < 1$ при всех $N > N_0$ и $r^{(N)} \rightarrow +\infty$ или $r^{(N)} \rightarrow -\infty$. Тогда существуют константы $c_1(r^{(0)}, g^{(0)}) \neq 0$ и $c_2(r^{(0)}, g^{(0)}) \neq 0$, такие что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^{(N)}}{n^{N(\alpha-1)}} = c_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{g^{(N)}}{n^{N(2\alpha-3)}} = c_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что

$$\beta^{(N)} = o(n^{-N/2}). \quad (8)$$

Пусть $D = \frac{1-d}{1-d/n}$. Очевидно, что $D > 0$ и $\sigma^{(N)} > D$ при всех $N > N_0$. Имеем

$$\frac{\beta^{(N)}}{\beta^{(N+1)}} = n \left(1 - \frac{n^{\alpha-1} - 1}{n^{\alpha-1} \sigma^{(N)} (r^{(N)} + 1)} \right)^2 \rightarrow n,$$

откуда следует (8).

Из (8) вытекает, что

$$1 - \sigma^{(N)} = o(n^{-N/2}). \quad (9)$$

Так как $\sigma^{(N)} \neq 0$ для всех N (по условию леммы $g^{(N+1)} \neq 0$), то из последнего равенства вытекает существование предела L бесконечного произведения $\prod_{N=0}^{\infty} \sigma^{(N)}$. Из формулы (6) следует, что $c_2 = L^2 g^{(0)}$.

Нам осталось доказать существование константы c_1 . Рассмотрим последовательности

$$a_{\pm}^{(N)} = \frac{r^{(N)} \pm 1}{n^{N(\alpha-1)}}.$$

Из соотношения (5) вытекает неравенство

$$a_+^{(N+1)} < \sigma^{(N)} a_+^{(N)}. \quad (10)$$

Кроме того, из (9) следует, что

$$\sigma^{(N)} > \frac{n^{\alpha-1} + 1}{2n^{\alpha-1}} \quad (11)$$

при всех $N \geq N'_0$. Легко проверить, что неравенство (11) равносильно неравенству

$$a_{-}^{(N+1)} > \sigma^{(N)} a_{-}^{(N)}. \quad (12)$$

Докажем, что из неравенств (10), (12) следует утверждение леммы. Рассмотрим случай $r^{(N)} \rightarrow \infty$, $g^{(0)} > 0$ (все остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда $0 < \sigma^{(N)} < 1$ при всех $N > N_0$. Из неравенства (10) вытекает существование предела (возможно, равного нулю) последовательности $a_{+}^{(N)}$. Однако последовательности $a_{\pm}^{(N)}$ имеют один и тот же предел c_1 . Из неравенства (12) и того, что $L \neq 0$, следует, что $c_1 > 0$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим сначала случай $\alpha > 3/2$, $(r, g) \in \Omega_1$. Область Ω_1 в этом случае представляется в виде объединения следующих непересекающихся частей:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(r, g) : 0 < r \leq r_+(\alpha), 0 < g < h_+(r; \alpha)\}, \\ H_2 &= \{(r, g) : r_+(\alpha) < r, g_2(r) < g < h_+(r; \alpha)\}, \\ H_3 &= \{(r, g) : r_+(\alpha) < r, g_3^+(r) \leq g \leq g_2(r)\}, \\ H_4 &= \{(r, g) : r_+(\alpha) < r, g_5^+(r) \leq g < g_3^+(r)\}, \\ H_5 &= \{(r, g) : r_+(\alpha) < r, 0 \leq g < g_5^+(r)\}, \end{aligned}$$

где

$$g_5^{\pm}(r) = n^{-1} \frac{n^{\alpha-1/2} \mp n}{n^{\alpha-1/2} \mp 1} (r + n^{\alpha-1})^2.$$

Заметим, что парабола $g_5^+(r)$ проходит через точку (r^+, g^+) , а парабола $g_5^-(r)$ — через “минусовую” неподвижную точку. Из соотношения (7) и леммы 1 следует, что

$$(r', g') \in H_1 \cup H_5, \quad \text{если } (r, g) \in H_1 \cup H_4 \cup H_5, \quad (13)$$

$$(r', g') \in H_2 \cup H_3 \cup H_4, \quad \text{если } (r, g) \in H_2 \cup H_3. \quad (14)$$

Легко проверить, что $g_+(r) < g_2(r) < g_3^+(r)$ при $0 < r < r_+(\alpha)$. Из формул (3), (4) следует, что если $(r, g) \in H_1 \cup H_4 \cup H_5$, то $r' > r$ и $g' > g$; если $(r, g) \in H_2$, то $r' < r$ и $g' < g$; если $(r, g) \in H_3$, то $r' \geq r$ и $g' \leq g$. Таким образом, дополняя (13), (14), можно написать, что

$$(r', g') \in H_3 \cup H_4, \quad \text{если } (r, g) \in H_3, \quad (15)$$

$$(r', g') \in H_5, \quad \text{если } (r, g) \in H_4 \cup H_5. \quad (16)$$

Если для всех $N \geq N_0$ выполнено $(r^{(N)}, g^{(N)}) \in H_i$, где i фиксировано и равно 1, 2 или 3, то в силу монотонности последовательностей $(r^{(N)})$ и $(g^{(N)})$ существует конечный предел $\lim_{N \rightarrow \infty} (r^{(N)}, g^{(N)}) = (r^{(\infty)}, g^{(\infty)})$. Этот предел должен являться неподвижной точкой отображения (1), поэтому $(r^{(\infty)}, g^{(\infty)}) = (r_+, g_+)$. Однако этот факт противоречит единственности устойчивой инвариантной кривой в окрестности “плюсовой” неподвижной точки.

Поэтому из (13)–(16) следует, что если $(r, g) \in \Omega_1$, то $(r^{(N)}, g^{(N)}) \in H_5$ для всех $N > N_0$. При этом последовательность $r^{(N)}$ при $N > N_0$ возрастающая и неограниченная (в противном случае мы бы имели неподвижную точку в области Ω_1 , что неверно). Применяя лемму 3, получаем утверждение теоремы.

Случай $3/2 \geq \alpha > 1$, $(r, g) \in \Omega_1$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\alpha > 1$, $(r, g) \in \Omega_2$. Область Ω_2 разбивается на следующие непересекающиеся части:

$$\begin{aligned} H'_1 &= \{(r, g) : r_-(\alpha) < r < -1, (r, g) \in \Omega_2 \cap G_2\}, \\ H'_2 &= \{(r, g) : r_-(\alpha) < r < -1, g_3^-(r) < g \leq g_-(r)\}, \\ H'_3 &= \{(r, g) : -\infty < r < r_-(\alpha), g_2(r) < g \leq g_1^-(r)\}, \\ H'_4 &= \{(r, g) : -\infty < r < -1, \max(0, g_3^+(r)) \leq g \leq \min(g_2(r), g_3^-(r))\}, \\ H'_5 &= \{(r, g) : -\infty < r < -1, 0 \leq g < g_3^+(r)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $H'_5 = \emptyset$, если $\alpha \leq 3/2$.

Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что для любой точки $(r, g) \in H'_1$ существует такое N , что $(r^{(N)}, g^{(N)}) \in H'_2 \cup H'_3 \cup H'_4 \cup H'_5$.

Легко видеть, что область H'_2 при преобразовании РГ перейдет в область

$$\{(r, g) : -n^{\alpha-1} < r < r_-(\alpha), g_5^-(r) < g \leq g'_-(r)\},$$

где

$$g'_-(r) = \frac{r(r + n^{\alpha-1})}{r + n^{\alpha-1}(1 - \sqrt{n})}$$

— образ кривой $g_-(r)$. Можно показать, что $g'_-(r) < g_1^-(r)$ при $r < r_-(\alpha)$. Следовательно, если $(r, g) \in H'_2$, то $(r', g') \in H'_3 \cup H'_4 \cup H'_5$.

Из формул (2)–(4) следует, что если $(r, g) \in H'_3$, то $r' > r$, $g' < g$ и $\beta' \leq \beta$; если $(r, g) \in H'_4$, то $r' \leq r$, $g' \leq g$ и $\beta' < \beta$; если $(r, g) \in H'_5$, то $r' < r$, $g' \geq g$ и $\beta' \leq \beta$.

Отсюда если $(r, g) \in H'_3$, то $(r', g') \in H'_3 \cup H'_4 \cup H'_5$; если $(r, g) \in H'_4$, то $(r', g') \in H'_4 \cup H'_5$; если $(r, g) \in H'_5$, то $(r', g') \in H'_5$.

Рассуждая так же, как и в случае области Ω_1 , можно показать, что для всех точек $(r, g) \in \Omega_2$, для которых $g^{(N)} \neq 0$, выполнены условия леммы 3. Отсюда вытекает справедливость доказываемой теоремы.

Утверждение теоремы 2 для областей Ω_3 и Ω_4 легко следует из теоремы 1 и лемм 1, 2, 3.

Заметим, что из доказанной теоремы следует, что при выполнении ее условий

$$\beta^{(N)} = O(n^{-N}). \quad (17)$$

Поскольку все грассманово-значные плотности вида

$$f(\psi^*) = a + b(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + c(\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2),$$

отличающиеся друг от друга константным множителем, задают одно и то же состояние, мы можем рассматривать набор констант (a, b, c) как точку двумерного проективного пространства. При этом δ -функции соответствует набор $(0, 0, 1)$, а плотности $f(\psi^*; r, g)$ — набор

$$(1, -r, r^2 - g) \equiv \left(r^{-2}, -r^{-1}, 1 - \frac{g}{r^2}\right).$$

Если точка (r, g) удовлетворяет условиям теоремы 1, то из (17) и того, что $|r^{(N)}| \rightarrow \infty$, следует, что области $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ при соответствующих значениях α лежат в зоне притяжения неподвижной точки $(0, 0, 1)$.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Напомним, что термодинамический предел фермионной модели существует, если существует предел всех корреляционных функций при $N \rightarrow \infty$.

Прежде всего опишем множество S_N нулей статсуммы $Z_N(r, g)$, лежащих в областях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$. Из доказанной в [1] рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} Z_N(r, g) &= \text{const } C(r, g)^{n^{N-1}} Z_{N-1}(r', g'), \\ C(r, g) &= (r+1)^2 - g)^{n-2} ((r+1)^2 - g/n), \\ Z_0(r, g) &= \left(\left(r + \frac{1 - n^{\alpha-2}}{1 - n^{-1}} \right)^2 - g \right), \end{aligned}$$

следует, что все точки из S_N должны удовлетворять соотношениям

$$g^{(N)} = \left(r^{(N)} + \frac{1 - n^{\alpha-2}}{1 - n^{-1}} \right)^2, \quad (18)$$

или

$$g^{(i)} = (r^{(i)} + 1)^2 \quad \text{для некоторого } i \leq N-1$$

при $n > 2$. Заметим, что парабола $g = n(r+1)^2$ не лежит в рассматриваемых областях. Из (17) следует, что для любой точки (r, g) из этих областей соотношение (18) не может быть выполнено при достаточно больших N . Пусть

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{N \geq 0} \{ (r, g) \in \Omega_2 : g^{(N)} = (r^{(N)} + 1)^2 \}, \quad \text{если } n > 2; \\ S &= \emptyset, \quad \text{если } n = 2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $2 > \alpha > 1$ и $(r, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \setminus S$ или $2 > \alpha \geq 3/2$ и $(r, g) \in \Omega_3 \cup \Omega_4$. Тогда модели, описываемые гамильтонианом $H_{0,N}(\bar{\psi}, \psi, \alpha) + H_N(\bar{\psi}, \psi; r, g)$, имеют термодинамический предел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать существование предела одноточечных корреляционных функций (см., например, [2])

$$\begin{aligned} u_N^1(r, g) &= \rho_N(r, g) (\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) + \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)), \\ u_N^2(r, g) &= \rho_N(r, g) (-\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)), \quad i \in \Lambda_N, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. По лемме 1 работы [1] вектор $u_N(r, g)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} u_N(r, g) &= A(r, g) u_{N-1}(r', g') + s(r, g), \\ A(r, g) &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial g'}{\partial r} \\ \frac{\partial r'}{\partial g} & \frac{\partial g'}{\partial g} \end{pmatrix}, \quad s(r, g) = \frac{1}{nC(r, g)} \begin{pmatrix} \frac{\partial C(r, g)}{\partial r} \\ \frac{\partial C(r, g)}{\partial g} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$u_0(r, g) = \frac{1}{Z_0(r, g)} \left(\frac{\partial Z_0(r, g)}{\partial r} \right).$$

Таким образом,

$$u_N(r, g) = \sum_{i=1}^{N-1} h_i(r, g) + v_N(r, g), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} h_i(r, g) &= A(r, g) \times \cdots \times A(r^{(i-1)}, g^{(i-1)}) s(r^{(i)}, g^{(i)}), \\ v_N(r, g) &= A(r, g) \times \cdots \times A(r^{(N-1)}, g^{(N-1)}) u_0(r^{(N)}, g^{(N)}). \end{aligned}$$

Используя (17) и то, что $|r^{(N)}| \rightarrow \infty$, легко показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s(r^{(N)}, g^{(N)}) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} u_0(r^{(N)}, g^{(N)}) = 0$$

для всех точек из рассматриваемой области. Кроме того, можно проверить, что для любых точек (r, g)

$$\begin{aligned} \det A(r, g) &= n^{3\alpha-6} \sigma^3, \\ \text{Sp } A(r, g) &= \frac{2}{n-1} \left(n^{\alpha-2} \left(\sigma^2 - \sigma \frac{n+3}{2} + n \right) - n^{2\alpha-4} \sigma \left(\sigma^2 - \sigma \frac{3n+1}{2} + n \right) \right), \end{aligned}$$

так что при $\sigma = 1$ собственные числа матрицы $A(r, g)$ суть $n^{\alpha-2}$ и $n^{2\alpha-4}$. Так как $\sigma_N \rightarrow 1$, то начиная с некоторого номера N спектральная норма матрицы $A(r^{(N)}, g^{(N)})$ будет меньше некоторого числа $t < 1$. Отсюда нормы векторов $h_i(r, g)$ и $v_N(r, g)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|h_i(r, g)\| < \text{const } t^i, \quad \|v_N(r, g)\| < \text{const } t^N. \quad (20)$$

Сходимость ряда (19) следует из оценок (20). Теорема доказана.

Пусть $u_\infty(r, g) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, g)$ суть корреляционные функции поля на всей решетке. Из того факта, что $s(r^{(N)}, g^{(N)}) \rightarrow 0$, и того, что $\|A(r^{(N)}, g^{(N)})\| < t < 1$ для всех достаточно больших N , следует, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_\infty(r^{(m)}, g^{(m)}) = 0.$$

Это и означает, что автомодельный предел фермионного поля на всей решетке с потенциалом $f(\psi^*; r, g)$ является вырожденным полем с потенциалом $\delta(\psi^*)$ для всех (r, g) , удовлетворяющих условиям последней теоремы.

Автомодельные пределы для точек (r, g) , лежащих на инвариантных кривых γ_1 и γ_2 при $\alpha > 3/2$ задаются потенциалами, отвечающими “плюсовой” и “минусовой” неподвижным точкам, соответственно. Динамика преобразования РГ в области между γ_1 и γ_2 будет исследована в следующей работе. Результаты, описанные в этой статье, будут использованы при классификации критических явлений и вычислении критических индексов в данной модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00270) и Международного научного фонда (код гранта РНА300).

Список литературы

- [1] *Lerner E.Yu., Missarov M.D.* // J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817.
- [2] *Лернер Э.Ю., Миссаров М.Д.* // ТМФ. 1994. Т. 101. С. 282–293.
- [3] *Bleher P.M., Sinai Ya.G.* // Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 23–42.
- [4] *Collet P., Eckmann J.-P.* A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics. Lect. Notes in Phys. V. 74. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1978.
- [5] *Синай Я.Г.* Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [6] *Gawedzki K., Kupiainen A.* // Commun. Math. Phys. 1985. V. 1. P. 102.
- [7] *Ydman J., Magnen J., Rivasseu V., Seneor R.* // Commun. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 67.
- [8] *Dorlas T.C.* // Commun. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 169.
- [9] *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [10] *Марседен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
16.VIII.1995 г.

E. Yu. Lerner, M.D. Missarov

**GLOBAL FLOW OF RENORMALIZATION
GROUP AND THERMODYNAMIC LIMIT FOR
THE HIERARCHICAL FERMIONIC MODEL**

The renormalization group transformation for the hierarchical fermionic model is given as a rational map in the plane of the coupling constants. We investigate the global flow of this transformation. The existence of the thermodynamic limit in the domain under investigation is proved. The automodel limit of the constructed fields is described.