Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Немировский, Термодинамическое равновесие в системе хаотических квантованных вихрей в слабо неидеальном бозе-газе, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 141–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:28:28

© 2004 г.

С. К. Немировский*

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ В СИСТЕМЕ ХАОТИЧЕСКИХ КВАНТОВАННЫХ ВИХРЕЙ В СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОМ БОЗЕ-ГАЗЕ

На примере слабо неидеального бозе-газа обсуждается механизм установления термодинамического равновесия для хаотического набора квантовых вихревых нитей. Предполагается, что динамика бозе-конденсата описывается уравнением Гросса–Питаевского с добавочным шумом, удовлетворяющим флуктуационно-диссипативной теореме. При рассмотрении вихревой нити как линии пересечения поверхностей, на которых реальная и мнимая части параметра порядка $\psi(\mathbf{x}, t)$ обращаются в нуль, получается уравнение ланжевеновского типа для элементов вихревой нити с соответственно преобразованной случайной силой. При этом уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности имеет решение в форме распределения Гиббса с температурой бозе-конденсата. Другими словами, когда бозе-конденсат находится в тепловом равновесии и нет никаких других случайных воздействий, система вихрей также находится в тепловом равновесии.

Ключевые слова: квантовые вихревые нити, бозе-газ, термодинамическое равновесие, сверхтекучая турбулентность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантованные вихри играют фундаментальную роль при описании квантовых жидкостей, сверхпроводников и других систем. Фазовые превращения, кинетические свойства, а также множество других физических явлений связаны с появлением в системах квантованных вихрей и с их динамикой. По этой причине квантованные вихри являются объектом интенсивного изучения в течение многих лет. Подробный обзор и библиографию можно найти в монографии [1]. Из-за сложной динамики вихревые нити могут развиваться в запутанные хаотические структуры, называемые вихревыми клубками (vortex tangle). Известно, что система хаотических вихревых нитей может находиться как в состоянии термодинамического равновесия, что является объектом многочисленных исследований, особенно в космологическом контексте (см., например, [2]), так и в сильно неравновесном турбулентном состоянии (см., например, [1] и обзор [3]). Естественно возникает вопрос: какого рода состояние реализуется в каждом конкретном

*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: nemir@itp.nsc.ru

эксперименте, и какого рода теорию следует использовать при описании тех или иных явлений? Ответ на такой вопрос может дать исследование, посвященное изучению конкретных механизмов, ответственных за установление термодинамического равновесия, и механизмов, описывающих переход в турбулентное состояние.

Предположение о тепловом равновесии может быть основано на фундаментальных физических принципах, если рассматривать квантованные вихри как подсистему, погруженную в термостат, с которым вихри обмениваются энергией. Роль термостата в данном случае играет соответствующее физическое поле, образующее сверхтекучую компоненту. В случае бозе-конденсата, который мы рассматриваем в данной статье, роль такого поля играет параметр порядка $\psi(\mathbf{x}, t)$. Возбуждения параметра порядка (фононы, а в случае реального гелия также и ротонны) взаимодействуют с ансамблем вихревых петель, приводя последний к статистическому распределению, которое в соответствии с общим принципом максимальной энтропии должно быть распределением Гиббса. Приведенное рассуждение, однако, не раскрывает никаких деталей динамики системы. Иными словами, оно не отвечает на вопрос, каким образом система вихрей приводится к термодинамическому равновесию. Между тем, понимая, какие конкретно механизмы ответственны за установление термодинамического равновесия, мы могли бы дать ответ и на другой интересующий нас вопрос: каким образом система вихрей переходит в сильно неравновесное (турбулентное) состояние?

В предлагаемой работе мы сосредоточимся на первом вопросе, касающемся термодинамического равновесия. С целью проследить динамические детали установления равновесия мы в рамках ланжевеновского подхода изучим, каким образом набор хаотических вихревых петель в равновесном бозе-конденсате приводится в тепловое равновесие.

Поставленная проблема решается в два этапа. На первом этапе (в разделе 2) мы, исходя из ланжевеновского описания стохастической динамики для параметра порядка $\psi(\mathbf{x}, t)$ слабо неидеального бозе-газа, выводим уравнения движения для вихревых линий, рассматривая последние как линии обращения в нуль величины $\psi(\mathbf{x}, t)$, т.е. топологические дефекты. Полученное уравнение для динамики элементов вихревой нити $\mathbf{s}(\xi, t)$ является также уравнением ланжевеновского типа с соответственно преобразованной случайной силой и диссипативным членом. На основании этого уравнения мы выводим (в разделе 3) уравнение Фоккера–Планка для функционала вероятности $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$, описывающего вероятность того, что система вихревых петель составляет некоторую конфигурацию $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$. Далее мы показываем, что уравнение Фоккера–Планка имеет решение в виде распределения Гиббса $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) \propto \exp(-H\{\mathbf{s}\}/T)$, где $H\{\mathbf{s}\}$ – функционал энергии данной конфигурации вихревых линий.

2. УРАВНЕНИЕ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

В этом разделе мы получаем уравнение движения квантованных вихрей в бозе-газе, динамика которого описывается уравнением Гросса–Питаевского [4], [5] с добавленной случайной (ланжевеновской) силой. В системе, где нормальная скорость отсутствует,

это уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -(\Lambda + i) \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*} + f(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где $H\{\psi\}$ – функционал свободной энергии Гинзбурга–Ландау

$$H\{\psi\} = \int d^3x \left[\frac{\hbar^2}{2m^2} |\nabla \psi|^2 - \frac{\mu}{m} |\psi|^2 + \frac{V_0}{2m} |\psi|^4 \right]. \quad (2)$$

В выписанных соотношениях приняты следующие обозначения: Λ – безразмерный кинетический коэффициент, μ – химический потенциал, V_0 – потенциал, описывающий взаимодействие частиц, m – масса частицы. Параметр порядка $\psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\phi}$, где ρ_s – плотность бозе-конденсата, а фаза ϕ определена таким образом, что скорость потока $\mathbf{v} = (\hbar/m) \nabla \psi$. Масштаб времени в уравнении (1) изменен по правилу $t \rightarrow t(\hbar/m)$. Тепловой шум $f(\mathbf{x}, t)$ подчиняется флуктуационно-диссипативной теореме

$$\langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f^*(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = 2k_B T \Lambda \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (3)$$

Сформулированная стохастическая проблема имеет решение, описывающее тепловое равновесие, где вероятность некоторой конфигурации поля $\{\psi(\mathbf{x})\}$ удовлетворяет закону Гиббса. Это следует из решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка [6].

Перейдем к проблеме получения динамики вихрей, появляющихся в бозе-конденсате, эволюция которого описывается уравнением Гросса–Питаевского (1). Эта проблема относится к числу общих проблем получения уравнения движения топологических дефектов (доменных стенок, дислокаций, космических струн и т. д.) на основе нелинейной динамики полей, порождающих эти дефекты. В контексте движения вихревых нитей в квантовых жидкостях такая задача исследовалась ранее, начиная с работы [7] (см. также монографию [8]). В этих работах, однако, исследовались детерминистские уравнения. В предлагаемой статье изложим новый метод, удобный для преобразования случайного шума $f(\mathbf{x}, t)$, действующего на бозе-газ, в случайную скорость для элементов вихревой нити.

Вихри в квантовых жидкостях представляют собой очень тонкие вихревые трубки, и их динамика аналогична динамике струн. Таким образом, мы должны исключить радиальные степени свободы, что может быть достигнуто с помощью следующей процедуры. Эволюция вихревых нитей (как линий пересечения нулевых поверхностей параметра порядка) в квантовых жидкостях определяется динамикой функции $\psi(\mathbf{x}, t)$, т.е. уравнением Гросса–Питаевского (1). С другой стороны, если не рассматривать другие степени свободы (фононы), можно утверждать, что все движение бозе-конденсата определено динамикой вихревых нитей. Таким образом, имеется взаимное соответствие, и параметр порядка $\psi(\mathbf{x}, t)$ может рассматриваться как некоторый функционал от полной вихревой конфигурации, т.е. $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, \{\mathbf{s}(\xi, t)\})$. Так, например, временная зависимость поля $\psi(\mathbf{x}, t)$ (в некоторой точке трехмерного пространства $\mathbf{x}$) связана с движением

всей вихревой конфигурации $\mathbf{s}(\xi, t)$ и описывается в соответствии со следующим цепным правилом:

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \int_{\Gamma} \frac{\delta \psi(\mathbf{x}, t)}{\delta \mathbf{s}(\xi', t)} \frac{\partial \mathbf{s}(\xi', t)}{\partial t} d\xi'. \quad (4)$$

Здесь и в последующем мы обозначаем индексом Γ контурные интегралы вдоль отдельных линий и суммирование по всем вихревым петлям.

Перейдем к выводу уравнения движения вихревых нитей. Перепишем уравнение (1) в следующей форме:

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*} + \frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} f(\mathbf{x}, t). \quad (5)$$

Умножим уравнение (5) на $\delta \psi^* / \delta \mathbf{s}(\xi_0, t)$, где ξ_0 – некоторая выбранная точка на кривой. Складывая результат с комплексно-сопряженным и интегрируя по всему пространству, получим

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{x} \left(\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\delta \psi^*}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\delta \psi}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} \right) = \\ = - \int d^3 \mathbf{x} \left(\frac{\delta H(\psi, \psi^*)}{\delta \psi^*} \frac{\delta \psi^*}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\delta H(\psi, \psi^*)}{\delta \psi} \frac{\delta \psi}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} \right) + \\ + \int d^3 \mathbf{x} \left(\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} f(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \psi^*}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} f^*(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \psi}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Первый интеграл в правой части этого соотношения следует из цепного правила для функциональной производной $\delta H(\mathbf{s}) / \delta \mathbf{s}(\xi_0, t)$, где $H(\mathbf{s})$ – энергия бозе-конденсата, выраженная через полную вихревую конфигурацию. Последовательно рассматривая вихри очень тонкими трубками (что оправданно, когда радиус кривизны R намного превышает размер ядра r_0) и пренебрегая энергией, связанной с ядром, запишем кинетическую энергию сверхтекучего движения, созданного вихрями (см., например, [9]):

$$H(\mathbf{s}) = \frac{\rho_s \kappa^2}{8\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} \frac{\mathbf{s}'(\xi) \mathbf{s}'(\xi')}{|\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi')|} d\xi d\xi'. \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{s}'(\xi)$ – тангенциальный вектор вдоль вихревой линии, κ – квант циркуляции, равный $2\pi\hbar/m$. Вычисление функциональной производной дает

$$\frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} = \rho_s \kappa \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0). \quad (8)$$

Величина $\mathbf{B}(\xi_0)$ – скорость элемента вихревой нити в точке ξ_0 , выраженная с помощью известного закона Био–Савара:

$$\mathbf{B}(\xi_0) = - \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')) \times \mathbf{s}'(\xi)}{|\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')|^3} d\xi'. \quad (9)$$

Таким образом, мы записали интересующий нас интеграл в соотношении (6) только в терминах переменной $\mathbf{s}(\xi, t)$, описывающей вихревую конфигурацию.

Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (6). Подставив соотношение (4) для временной производной $\partial\psi/\partial t$, а также соответствующее комплексно-сопряженное выражение, в подынтегральном выражении получим

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \int d^3\mathbf{x} \int_{\Gamma'} \left(\frac{\delta\psi(\mathbf{x} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \frac{\partial\mathbf{s}(\xi', t)}{\partial t} \right) \frac{\delta\psi^*(\mathbf{x} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)} d\xi' + \text{к. с.} \quad (10)$$

Интеграл (10) зависит от полной вихревой конфигурации. Однако этот интеграл (и другие подобные, включающие квадратичные выражения от градиентов параметра порядка) может быть вычислен приближенно в общей форме при оговоренном условии, что радиус кривизны нити существенно превышает размер ядра (см., например, [8]). Соответствующие расчеты содержатся в приложении. Интересующий нас интеграл представляет сумму выражений (П.4) и (П.9), т.е. левая часть уравнения (6) принимает вид

$$\frac{2\pi\rho_s}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{2\pi\rho_s\sigma\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0). \quad (11)$$

Таким образом, мы опять записали интересующий нас интеграл в соотношении (6) в терминах переменной $\mathbf{s}(\xi, t)$, описывающей вихревую конфигурацию.

Обсудим теперь второе слагаемое в правой части уравнения (6), включающее случайную силу $f(\mathbf{x}, t)$. Последовательно считая, что все движение бозе-конденсата связано с движением вихрей (напомним, что мы не рассматриваем акустические эффекты), можно представить случайную силу, фигурирующую в уравнении (6), как некоторую “вторичную” величину, возникшую от случайных смещений (всех) элементов (всех) нитей, т.е. малые случайные вариации параметра порядка $\delta\psi$ связаны с малыми случайными вариациями смещений элементов нити $\delta\mathbf{s}$ с помощью цепного правила

$$\delta\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \frac{\delta\psi(\mathbf{x}, t)}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \delta\mathbf{s}(\xi', t) d\xi'. \quad (12)$$

Малые вариации $\delta\psi$ и $\delta\mathbf{s}$ за некоторый интервал времени δt связаны со случайными силами очевидным образом:

$$\delta\mathbf{s}(\xi, t) = \mathbf{f}(\xi, t)\delta t, \quad (13)$$

$$\delta\psi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)\delta t. \quad (14)$$

Следует различать случайную силу $f(\mathbf{x}, t)$, действующую на параметр порядка, и случайную скорость $\mathbf{f}(\xi, t)$.

Подставляя (13) и (14) в (12) и сокращая на δt , получим связь между случайной силой $f(\mathbf{x}, t)$ и случайной скоростью $\mathbf{f}(\xi, t)$:

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \frac{\delta\psi(\mathbf{x}, t)}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} \mathbf{f}(\xi', t) d\xi'. \quad (15)$$

Подставив это выражение (а также соответствующее комплексно-сопряженное) во второй интеграл в правой части уравнения (6), получим

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \int d^3 \mathbf{x} \int_{\Gamma'} \left(\frac{\delta \psi(\mathbf{x} | s(\xi, t))}{\delta \mathbf{s}(\xi', t)} \mathbf{f}(\xi', t) \right) \frac{\delta \psi^*(\mathbf{x} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)} d\xi' + \text{к. с.} \quad (16)$$

Но это выражение совпадает с выражением (10) после очевидной замены $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \rightarrow \mathbf{f}(\xi_0, t)$. Применяя технику, описанную в приложении, мы можем записать интеграл (16) в виде

$$\frac{2\pi}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_0, t) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{2\pi\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_0, t). \quad (17)$$

Таким образом, уравнение (6) можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{\Lambda\sigma}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) = \\ = \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0) + \frac{1}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_0, t) \times \mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{\Lambda\sigma}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_0, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Это векторное уравнение может быть разрешено относительно величины $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0)$ с точностью до составляющей $\dot{\mathbf{s}}_{\parallel}(\xi_0)$ вдоль кривой, которая не имеет физического значения и может быть удалена подходящей параметризацией переменной ξ . Результат имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) = \frac{1 + \Lambda^2}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \mathbf{B}(\xi_0) + \frac{(1 + \Lambda^2)\Lambda\sigma}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0) + \mathbf{f}(\xi_0, t). \quad (19)$$

Уравнение (19) описывает движение элементов вихревой линии в терминах самой вихревой линии. Замечателен тот факт (не очевидный заранее), что шум $\mathbf{f}(\xi_0, t)$, действующий на линии, также является аддитивным.

Установим теперь статистические свойства шума $\mathbf{f}(\xi_0, t)$ и его интенсивность. Выражение (17) является результатом преобразования второго слагаемого в правой части уравнения (6), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi\rho_s}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_1, t_1) \times \mathbf{s}'(\xi_1) + \frac{\hbar}{m} \frac{2\pi\rho_s\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \mathbf{f}(\xi_1, t_1) = \\ = \int d^3 \mathbf{x}_1 \left(\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} f(\mathbf{x}_1, t_1) \frac{\delta \psi^*}{\delta \mathbf{s}(\xi_1, t)} + \frac{\Lambda + i}{\Lambda^2 + 1} f^*(\mathbf{x}_1, t_1) \frac{\delta \psi}{\delta \mathbf{s}(\xi_1, t)} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Умножив скалярно обе части уравнения (20) на соответствующие части такого же уравнения, но записанного для другого момента времени t_2 и другой точки ξ_2 , получим

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1 + \Lambda^2 \sigma^2}{(\Lambda^2 + 1)^2} (\mathbf{f}_{\eta_1}(\xi_1, t_1) \mathbf{f}_{\eta_1}(\xi_2, t_2) + \mathbf{f}_{\eta_2}(\xi_1, t_1) \mathbf{f}_{\eta_2}(\xi_2, t_2)) = \\ = \frac{2}{\Lambda^2 + 1} \iint d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \frac{\delta \psi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\delta \mathbf{s}(\xi_1, t_1)} \frac{\delta \psi^*(\mathbf{x}_2, t_2)}{\delta \mathbf{s}(\xi_2, t_2)} f(\mathbf{x}_1, t_1) f^*(\mathbf{x}_2, t_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{f}_{\eta_1}$ и $\mathbf{f}_{\eta_2}$ – компоненты случайных скоростей во взаимно перпендикулярных направлениях η_1, η_2 , лежащих в плоскости, нормальной к линии. Мы опустили остальные слагаемые в правой части выражения (21), предвидя, что они исчезнут после усреднения. Усредняя (21) и используя флуктуационно-диссипативную теорему (3), а также вычисляя трехмерные интегралы по правилам, описанным в приложении, получаем

$$\langle \mathbf{f}_{\eta_1}(\xi_1, t_1) \mathbf{f}_{\eta_2}(\xi_2, t_2) \rangle = \frac{k_B T}{\rho_s \pi (\hbar/m)} \frac{(\Lambda^2 + 1) \Lambda \sigma}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1 \eta_2}. \quad (22)$$

Таким образом, исходя из ланжевенновской динамики бозе-конденсата (соотношения (1), (3)), мы получили уравнения (19) и (22), описывающие ланжевенновскую динамику вихревой нити непосредственно в терминах самой нити. Выписанные соотношения (19) и (22) завершают формулировку проблемы стохастической динамики квантованных вихрей, взаимодействующих с термостатом. Роль термостата играют тепловые возбуждения параметра порядка. В следующем разделе мы покажем, что эта проблема имеет стационарное решение в виде равновесного распределения Гиббса $\exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T)$, где $H\{\mathbf{s}\}$ – энергия вихревой системы (см. уравнение (7)).

3. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА

Получим сначала уравнение Фоккера–Планка, соответствующее ланжевенновской динамике, описывающейся соотношениями (19) и (22). Введем следующий функционал распределения вероятности:

$$\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t) = \langle \mathcal{P}^M \rangle = \langle \delta(\mathbf{s}(\xi) - \mathbf{s}(\xi, t)) \rangle. \quad (23)$$

Здесь δ является дельта-функционалом в пространстве конфигураций вихревых петель. Усреднение выполнено по ансамблю случайной силы. Эволюция величины $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}, t)$ может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \left\langle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta \mathcal{P}^M}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \dot{\mathbf{s}}_{\text{det}} \right\} \right\rangle - \int d\xi \left\{ \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \langle \mathbf{f}(\xi, t) \mathcal{P}^M \rangle \right\}, \quad (24)$$

где $\dot{\mathbf{s}}_{\text{det}}$ – детерминированная часть скорости, определенная уравнением (19). Опуская стандартные детали (см., например, [10]), запишем следующее из выражения (24) уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left\{ \left[\frac{1 + \Lambda^2}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \mathbf{B}(\xi) + \frac{(1 + \Lambda^2) \Lambda \sigma}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \mathbf{s}'(\xi) \times \mathbf{B}(\xi) \right] \mathcal{P} \right\} + \\ + \int d\xi \int d\xi' \langle \mathbf{f}(\xi) \mathbf{f}(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \mathcal{P} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В формуле (25) $\langle \mathbf{f}(\xi) \mathbf{f}(\xi') \rangle$ – корреляционная функция случайной силы, действующей на линию (см. уравнение (22)). Наша цель теперь состоит в том, чтобы доказать, что уравнение (25) имеет стационарное решение в виде $\mathcal{P}(\{\mathbf{s}(\xi)\}) = \mathcal{N} \exp(-H\{\mathbf{s}\}/k_B T)$,

где $\mathcal{N}$ – нормировочный множитель, $H\{\mathbf{s}\}$ – энергия вихревой системы (см. уравнение (7)).

Рассмотрим первое слагаемое в подынтегральном выражении уравнения (25). Используя параметризацию, в которой скорость $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0)$ нормальна вихревой нити, перепишем выражение (8) в виде

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{1}{\rho_s \kappa} \mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}(\xi_0, t)}. \quad (26)$$

Тогда первое слагаемое в подынтегральном выражении уравнения (25) примет вид

$$\mathcal{N} \frac{1}{\rho_s \kappa} \frac{1 + \Lambda^2}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \int d\xi \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi)} \left(\mathbf{s}'(\xi) \times \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}(\xi, t)} \exp\left(-\frac{H\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right) \right). \quad (27)$$

Выполняя функциональное дифференцирование и используя тензорные обозначения, перепишем (27) в следующем виде (опуская коэффициент перед интегралом):

$$\begin{aligned} & \int d\xi \exp\left(-\frac{H\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi)}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} + \\ & + \int d\xi \exp\left(-\frac{H\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi)} \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \right) + \\ & + \frac{1}{k_B T} \int d\xi \exp\left(-\frac{H\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathbf{s}'_\beta(\xi) \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}_\gamma(\xi, t)} \frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta \mathbf{s}_\alpha(\xi, t)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Производная оператора $\delta \mathbf{s}'_\beta(\xi) / \delta \mathbf{s}_\alpha(\xi) \propto \delta_{\beta\alpha}$, поэтому все члены тождественно исчезают из-за симметрии. Таким образом, обратимый (не связанный с диссипацией) член в исходном уравнении движения (19) не дает вклада в динамику функционала распределения вероятности. Понятно, что сказанное выше относится только к случаю теплового равновесия, т.е. справедливо только для распределения Гиббса.

Последнее слагаемое в подынтегральном выражении (25) может быть преобразовано с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы для линии (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int d\xi \int d\xi' \langle \mathbf{f}(\xi) \mathbf{f}(\xi') \rangle \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \mathcal{P} = \\ & = \int d\xi \int d\xi' \frac{k_B T}{\pi} \frac{(\Lambda^2 + 1) \Lambda \sigma}{1 + \Lambda^2 \sigma^2} \times \\ & \quad \times \delta(\xi_1 - \xi_2) \delta(t_1 - t_2) \delta_{\eta_1, \eta_2} \frac{\delta}{\delta \mathbf{s}(\xi')} \exp\left(-\frac{H\{\mathbf{s}\}}{k_B T}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Воспользовавшись снова соотношениями (8) и (26), легко убедиться, что получившееся выражение точно компенсирует второе слагаемое в подынтегральном выражении уравнения (25) (их сумма равна нулю). Таким образом, интегральный член в уравнении (25) исчезает. Это означает, что распределение Гиббса действительно является решением уравнения Фоккера–Планка, как это и должно быть на основании общих физических принципов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуя ланжевеновскую динамику хаотического набора квантовых вихревых нитей, возникающих в слабо неидеальном бозе-газе, мы проследили механизм установления термодинамического равновесия в вихревом клубке. Анализируя наше доказательство, можно видеть, что основная причина установления равновесия состоит в том, что аддитивная случайная сила $f(\mathbf{x}, t)$, действующая на параметр порядка, трансформируется в аддитивную случайную скорость $\mathbf{f}(\xi, t)$, соответствующую элементам вихревой нити. При этом закон трансформации случайной силы согласуется с законом трансформации диссипативного слагаемого таким образом, что в уравнении Фоккера–Планка слагаемое, ответственное за накачку энергии, точно компенсирует диссипативный поток распределения вероятности. Причем эта компенсация происходит в подынтегральном выражении. Иными словами, реализуется детальный баланс между накачкой и диссипацией. Из этого следует, что при возникновении других источников случайного воздействия на систему (например, при развитии неустойчивости в текущем/противотекущем He II) возможен переход в неравновесное (турбулентное) состояние. Соответствующее исследование, однако, выходит за рамки этой статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Главный вклад в интегралы типа (10) вносят точки, близкие к вихревой нити. Вклад от удаленных точек приводит к слабой логарифмической расходимости, и радиус кривизны (или межвихревое расстояние) используется обычно как верхний параметр обрезания. Практически это подразумевает, что можно заменить функционал $\psi(\mathbf{x} | \mathbf{s}(\xi, t))$ выражением $\psi_v(\mathbf{x}_\perp) = \psi_v(\mathbf{s}(\xi_{cl}, t) - \mathbf{x})$, где ξ_{cl} – точка на линии, ближайшая к точке $\mathbf{x}$ трехмерного пространства. Функция $\psi_v(\mathbf{x}_\perp)$ есть хорошо известное двумерное статическое решение, описывающее двумерный вихрь (см., например, [8]). Интегрирование по $d^3\mathbf{x}$ может быть заменено на $d^2\mathbf{x}_\perp d\xi_{cl}$. Тогда, например, функциональная производная $\delta\psi^*/\delta\mathbf{s}(\xi', t)$ вычисляется в соответствии с правилом

$$\frac{\delta\psi(\mathbf{x} | \mathbf{s}(\xi, t))}{\delta\mathbf{s}(\xi', t)} = \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp) \delta(\xi' - \xi_{cl}).$$

Аналогичное выражение может быть выписано для $\delta\psi^*/\delta\mathbf{s}(\xi_0, t)$. В результате интегрирование по $d\xi_{cl}$ и $d\xi'$ устраняет все дельта-функции, и выражение (10) принимает вид

$$\frac{\Lambda - i}{\Lambda^2 + 1} \int d^2\mathbf{x}_\perp (\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp)) \nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) + \text{к. с.}, \quad (\text{П.1})$$

где $\dot{\mathbf{s}}(\xi_0)$ – скорость линии в точке наблюдения ξ_0 . Выражение (П.1) разлагается на сумму и разность одинаковых выражений. Разность может быть переписана с помощью известной формулы векторной алгебры:

$$\frac{i}{\Lambda^2 + 1} \int d^2\mathbf{x}_\perp \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times (\nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) \times \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp)). \quad (\text{П.2})$$

Для вычисления (П.2) воспользуемся записью статического решения $\psi_v(\mathbf{x}_\perp)$ в локальных полярных координатах $\psi_v(\mathbf{x}_\perp) = A(|\mathbf{x}_\perp|)e^{i\varphi}$. Векторное произведение имеет вид

$$\nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) \times \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp) = 2i \frac{A(|\mathbf{x}_\perp|)A'(|\mathbf{x}_\perp|)}{|\mathbf{x}_\perp|} \mathbf{s}'(\xi_0), \quad (\text{П.3})$$

и входящий в (П.2) интеграл вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int d^2 \mathbf{x}_\perp (\nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) \times \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp)) &= \\ &= \mathbf{s}'(\xi_0) \int 2i \frac{A(|\mathbf{x}_\perp|)A'(|\mathbf{x}_\perp|)}{|\mathbf{x}_\perp|} 2\pi |\mathbf{x}_\perp| d|\mathbf{x}_\perp| = 2\pi i \rho_s \mathbf{s}'(\xi_0). \end{aligned}$$

Таким образом, искомая часть $\partial\psi/\partial t$, представленная выражением (П.2), имеет вид

$$\frac{2\pi\rho_s}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0). \quad (\text{П.4})$$

Перейдем теперь к вычислению вклада, вносимого появляющейся после разложения выражения (П.1) суммой:

$$\frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} \int d^2 \mathbf{x}_\perp \{ (\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp)) \nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) + (\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp)) \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp) \}. \quad (\text{П.5})$$

Представим для удобства статическое решение $\psi_v(\mathbf{x}_\perp)$ в декартовых координатах η_1, η_2 , лежащих в плоскости, перпендикулярной вихревой линии (и проходящей через точку ξ_0). Тогда

$$(\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) \nabla_\perp \psi_v(\mathbf{x}_\perp)) \nabla_\perp \psi_v^*(\mathbf{x}_\perp) = \left(\dot{s}_1 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_1} + \dot{s}_2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \right) \left(\frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_2} \mathbf{e}_2 \right). \quad (\text{П.6})$$

Здесь $\dot{s}_1, \dot{s}_2$ — компоненты скорости вихревой линии в направлениях η_1, η_2 , соответственно, а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — единичные векторы в этих направлениях. Складывая выражение (П.6) с соответствующим комплексно-сопряженным, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \left(2\dot{s}_1 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_1} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} + \dot{s}_2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} \dot{s}_2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_1} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_2} \right) + \\ + \mathbf{e}_2 \left(2\dot{s}_2 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_2} + \dot{s}_1 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} + \dot{s}_1 \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} \right). \end{aligned}$$

Комбинация

$$\frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \psi_v}{\partial \eta_1} \frac{\partial \psi_v^*}{\partial \eta_2} \quad (\text{П.7})$$

строго обращается в нуль для статического решения $\psi_v(\mathbf{x}_\perp)$. Это легко видеть из того, что комплексное сопряжение эквивалентно замене $\eta_1 \rightarrow -\eta_2$. Оставшиеся слагаемые

представляют собой произведение скорости линии на $|\nabla_{\perp} \psi_v(\mathbf{x}_{\perp})|^2$. После интегрирования получаем известный результат:

$$\int d^2 x_{\perp} |\nabla_{\perp} \psi_v(\mathbf{x}_{\perp})|^2 = 2\pi\rho_s \ln \frac{a_0 R}{r_0} = 2\pi\rho_s \sigma, \quad (\text{П.8})$$

где a_0 — некоторая (слабо зависящая от R) функция порядка единицы. Это означает, что искомый вклад в уравнение (6) есть

$$\frac{2\pi\rho_s \sigma \Lambda}{\Lambda^2 + 1} \dot{\mathbf{s}}(\xi_0). \quad (\text{П.9})$$

Сумма выражений (П.4) и (П.9) есть интеграл в левой части уравнения (6), записанный в терминах переменной $\mathbf{s}(\xi, t)$, которая описывает вихревую конфигурацию.

Благодарности. Автор благодарен Э. Б. Сонину и Г. Вильямсу за обсуждение ряда вопросов. Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 2001-0618) и РФФИ (грант № 03-02-16179).

Список литературы

- [1] *R. J. Donnelly.* Quantized Vortices in Helium II. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1991.
- [2] *W. H. Zurek.* Phys. Rep. 1996. V. 276. № 4. P. 177; cond-mat/9607135.
- [3] *S. K. Nemirovskii, W. Fiszdon.* Rev. Mod. Phys. 1995. V. 67. P. 37.
- [4] *Л. П. Путаевский.* ЖЭТФ. 1958. Т. 35. С. 408.
- [5] *E. P. Gross.* Nuovo Cimento. 1961. V. 20. P. 454.
- [6] *P. C. Hohenberg, B. I. Halperin.* Rev. Mod. Phys. 1972. V. 49. P. 435.
- [7] *A. L. Fetter.* Phys. Rev. 1966. V. 151. P. 100.
- [8] *L. M. Pismen.* Vortices in Nonlinear Fields. Oxford: Clarendon Press, 1999.
- [9] *G. K. Batchelor.* An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1967.
- [10] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1992.

Поступила в редакцию 11.VIII.2003 г.