Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Никитин, Квантовая теория струны в индефинитном пространстве состояний, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 213–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:18:54

И. Н. Никитин

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СТРУНЫ В ИНДЕФИНИТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрена квантовая теория струны в индефинитном (псевдогильбертовом) фоковском представлении. Показано, что при определенном выборе вакуумного состояния в 4-мерной теории открытой бозонной струны сокращаются все аномалии. При этом оказываются замкнутыми алгебра репараметризационной симметрии (в ковариантном подходе) и алгебра вращений (в калибровке светового конуса). Индефинитность пространства состояний вносит в теорию ряд нефизических черт. Обсуждаются модификации изложенного метода, необходимые для построения теории с более реалистическими свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

Пространства состояний с индефинитным скалярным произведением используются в релятивистских квантовых теориях для обеспечения их явной лоренц-ковариантности. При этом, как правило, физический сектор теории не содержит состояний с отрицательной нормой, эти состояния выполняют в теории вспомогательную роль. Иногда индефинитные пространства состояний вводятся для других целей.

В 1943 г. Дирак [1] и Паули [2] предложили использовать индефинитные пространства состояний для устранения расходимостей в квантовых теориях поля. Эта возможность интенсивно исследовалась в 50–60-е годы [3]. Был сформулирован ряд моделей, непротиворечивое квантование которых возможно (только) в индефинитных пространствах состояний. Трудность вероятностной интерпретации, присущую этим моделям, в некоторых случаях удалось преодолеть с помощью определенных ограничений на вид взаимодействия и начальные состояния задачи рассеяния.

В данной работе индефинитные пространства состояний используются для устранения аномалий в теории релятивистской струны. В теории струны при использовании стандартной фоковской реализации оператор квадрата массы содержит расходимость в виде суммы энергий “нулевых колебаний”. Как и в теориях поля, эта расходимость устраняется при фиксации нормального упорядочения произведений операторов. При квантовании свободных полей эта процедура обычно приводит к непротиворечивой теории. В теории струны оператор квадрата массы входит в состав бесконечномерной алгебры внутренней симметрии. При введении нормального упорядочения в коммутационных соотношениях алгебры возникает аномальный член (центральный заряд), в результате чего алгебра не замыкается и симметрия теряется.

Другие способы упорядочения недоступны в фоковском пространстве, но могут иметь

смысл в других пространствах состояний. Например, формальная замена ролей операторов рождения и уничтожения приводит к антифоковскому пространству, в котором определено антинормальное упорядочение квадрата массы. Вычисления показывают, что центральные заряды алгебры Вирасоро в фоковском и антифоковском пространствах имеют противоположные знаки. (Этот факт приведен в [4] в качестве упражнения для читателя, мы решим это упражнение в разделе 1.) Этим свойством можно воспользоваться для сокращения аномалий в 4-мерной теории струны. Мы определим вакуумное состояние, являющееся фоковским для осцилляторов из одной пары измерений и антифоковским для другой пары. В пространстве состояний, построенном на этом вакууме, вклады разных измерений в центральный заряд компенсируются. При ковариантном квантовании струны в таком пространстве система связей оказывается совместной.

Квантование струны технически проще проводить при разрешенных связях, например в калибровке светового конуса. В этом подходе аномалии нарушают вращательную инвариантность теории. Аномалии возникают в коммутационных соотношениях поперечной алгебры Вирасоро, встроенной в генераторы вращений. В разделе 2 мы выберем пространство состояний, в котором поперечная алгебра Вирасоро имеет нулевой центральный заряд, и построим оператор орбитального момента струны, подчиняющийся коммутационным соотношениям алгебры $SO(3)$.

Антифоковское пространство состояний индефинитно. Следствия этого факта подробно описаны в разделе 3 и резюмированы в заключении.

1. АЛГЕБРА ВИРАСОРО С НУЛЕВЫМ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ЗАРЯДОМ В ТЕОРИИ СТРУНЫ

Для построения алгебры Вирасоро вводится бесконечный набор осцилляторных переменных a_k

$$[a_k, a_n] = k\delta_{k,-n}, \quad k, n \in \mathbf{Z}, \quad a_k^+ = a_{-k}.$$

Генераторы алгебры Вирасоро определяются следующим образом:

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_n a_{k-n} a_n, \quad k \neq 0, \quad L_0 = \frac{1}{2} \sum_n : a_{-n} a_n :.$$

При $k \neq 0$ операторы в L_k коммутируют. Выполнены соотношения

$$L_k^+ = L_{-k}, \quad [L_k, a_m] = -m a_{k+m}.$$

Символ $: a_{-k} a_k :$ означает, что операторы уничтожения стоят справа от операторов рождения. В качестве оператора уничтожения можно выбрать любой из операторов a_k, a_{-k} . Этот выбор определяет вакуум:

1. Фоковский вакуум $a_k |0_1\rangle = 0, \quad k > 0$.

Состояния рождаются из вакуума операторами $a_{-k}, \quad k > 0$; пространство состояний положительно определено;

$$: a_{-k} a_k := \begin{cases} a_{-k} a_k, & k > 0 \\ a_k a_{-k}, & k < 0 \end{cases} = a_{-k} a_k + k\theta(-k).$$

2. Антифоковский вакуум $a_{-k} |0_2\rangle = 0, \quad k > 0$.

Состояния рождаются из вакуума операторами a_k , $k > 0$; пространство индефинитно, например, $\langle 0_2 | a_1^+ a_1 | 0_2 \rangle = -1$;

$$: a_{-k} a_k := \begin{cases} a_k a_{-k}, & k > 0 \\ a_{-k} a_k, & k < 0 \end{cases} = a_{-k} a_k + k\theta(k).$$

Вычислим коммутатор

$$[L_k, L_n] = \frac{1}{2} \sum_l [L_k, a_{n-l} a_l].$$

Здесь n может равняться нулю, с-числовая добавка к $a_{n-l} a_l$ не влияет на коммутатор,

$$[L_k, L_n] = \frac{1}{2} \sum_l (l-n) a_{n+k-l} a_l - l a_{n-l} a_{k+l}.$$

1. При $k \neq -n$ сомножители в произведениях коммутируют. При больших $|l|$ в каждом члене суммы найдется оператор уничтожения (для любого из вакуумов 1, 2). Рассмотрим состояния с конечным числом заполненных мод (FMS), в которых все моды с номерами начиная с некоторого N находятся в вакуумном состоянии. При действии на такие состояния сумма обрывается при больших $|l|$, т.е. сумма конечна. Во втором слагаемом выполним сдвиг индекса $l \rightarrow l-k$:

$$[L_k, L_n] = (k-n) L_{k+n}.$$

$$2. k = -n, [L_k, L_{-k}] = \frac{1}{2} \sum_l (l+k) a_{-l} a_l - l a_{-k-l} a_{k+l}.$$

Каждое из двух слагаемых этого ряда по отдельности расходится, например,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} (l+k) a_{-l} a_l |0_1\rangle = - \underbrace{\sum_{l=-\infty}^0 (l+k) l \cdot |0_1\rangle}_{\text{расходится}}.$$

Приведем каждое слагаемое к нормальному виду $a_{-k} a_k =: a_{-k} a_k : -k\theta(\mp k)$ (верхний знак для вакуума 1, нижний – для вакуума 2):

$$[L_k, L_{-k}] = \frac{1}{2} \sum_l (l+k) : a_{-l} a_l : -l : a_{-k-l} a_{k+l} : -l(l+k)(\theta(\mp l) - \theta(\mp(l+k))).$$

При действии на FMS нормально упорядоченные суммы обрываются на больших $|l|$, суммы конечны. Выполняя сдвиг индекса $l \rightarrow l-k$ во втором слагаемом, получим

$$[L_k, L_{-k}] = 2kL_0 + c_k, \\ c_k = -\frac{1}{2} \sum_l l(l+k)(\theta(\mp l) - \theta(\mp(l+k))) = \mp \frac{1}{2} \sum_l l(l+k)(\theta(-l) - \theta(-(l+k))).$$

Таким образом, центральный заряд меняет знак при замене вакуума $1 \leftrightarrow 2$,

$$\theta(-l) - \theta(-(l+k)) = \begin{cases} 1, & \text{при } -k < l < 0, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (k > 0),$$

$$c_k = \mp \frac{1}{2} \sum_{l=-k}^0 l(l+k) = \pm \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k j(k-j) = \pm \frac{1}{12} k(k^2-1),$$

$$[L_k, L_{-k}] = 2kL_0 \pm \frac{1}{12} k(k^2-1).$$

Использовано тождество

$$\sum_{j=0}^k j(k-j) = \frac{1}{6} k(k^2-1).$$

В d -мерном пространстве вводится d наборов осцилляторов a_k^μ . L_k является суммой d одномерных генераторов

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_n a_{k-n}^\mu a_n^\mu.$$

Осцилляторные переменные из разных измерений коммутируют, поэтому центральный заряд аддитивен. Если для всех измерений выбран вакуум 1, то

$$c_k = \frac{d}{12} k(k^2-1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При изменении метрики (пространство Евклида $\leftrightarrow$ пространство Минковского) получаем

$$L_k = \frac{1}{2} \sum_n \tilde{a}_{k-n} \tilde{a}_n \pm a_{k-n}^0 a_n^0.$$

Для a_k^0 также меняется знак коммутатора. Поэтому для вклада измерения $\mu = 0$ в алгебру Вирасоро имеем

$$[\pm L_k^{(0)}, \pm L_n^{(0)}] = \pm(k-n)L_{k+n}^{(0)} + \delta_{k,-n} c_k.$$

Первый член получается в результате вычисления одного коммутатора, поэтому он меняет знак. Центральный заряд возник при приведении произведений к нормальной форме, коммутатор вычислялся дважды, поэтому центральный заряд не меняет знака.

Таким образом, при изменении метрики алгебра Вирасоро сохраняет свои коммутационные соотношения и численное значение центрального заряда.

Выбор одного типа вакуума для всех измерений продиктован требованием явной лоренц-ковариантности теории, что не является безусловно необходимым. Если d четно, и для половины измерений вакуум имеет тип 1, а для другой половины – тип 2, то центральные заряды компенсируются,

$$d = 4, \quad a_k^1|0\rangle = a_k^2|0\rangle = a_{-k}^3|0\rangle = a_{-k}^0|0\rangle = 0, \quad k > 0, \quad c_k = 0. \quad (1)$$

В пространстве состояний, построенном на таком вакууме, алгебра Вирасоро не имеет аномалии. При ковариантном квантовании струны появляется возможность наложить на состояние все связи

$$L_n|\text{phys}\rangle = 0, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Теория не является лоренц-ковариантной явно, L_n являются лоренц-скалярами, $[L_n, M^{\mu\nu}] = 0$ независимо от выбора вакуума. Поэтому физическое подпространство

(2) лоренц-инвариантно. Лоренц-неинвариантным является только вакуум (1), легко проверить, что он не сохраняется при преобразованиях Лоренца:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} P^{[\mu} X^{\nu]} + \frac{i}{2} \sum_{k>0} \frac{1}{k} a_{-k}^{[\mu} a_k^{\nu]}, \quad P^\mu = \sqrt{\pi} a_0^\mu,$$

$$M^{13}|0\rangle = \left(\frac{1}{2} P^{[1} X^{3]} + \frac{i}{2} \sum_{k>0} \frac{1}{k} a_{-k}^1 a_k^3 \right) |0\rangle \neq 0.$$

С другой стороны, вакуум не лежит в физическом подпространстве, например:

$$L_2|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_n a_{2-n}^\mu a_n^\mu |0\rangle =$$

$$= \left(-a_2^0 \frac{P^0}{\sqrt{\pi}} + a_2^3 \frac{P^3}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} (a_1^0)^2 + \frac{1}{2} (a_1^3)^2 \right) |0\rangle \neq 0.$$

Физическое вакуумное состояние следует искать в физическом подпространстве¹⁾.

Таким образом, квантование струны в ковариантном подходе не встречает принципиальных трудностей. Для решения задачи следует найти базис физического подпространства (2). Мы не будем решать эту задачу, вместо этого проведем квантование струны в калибровке светового конуса.

2. КВАНТОВАНИЕ СТРУНЫ В КАЛИБРОВКЕ СВЕТОВОГО КОНУСА

Вводится набор поперечных осцилляторов a_k^1, a_k^2 . Определим новые осцилляторные переменные

$$a_k = \frac{a_k^1 + i a_k^2}{\sqrt{2}}, \quad a_k^+ = \frac{a_{-k}^1 - i a_{-k}^2}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad [a_k, a_n^+] = k \delta_{kn}.$$

Из двух наборов осцилляторов с условием $a_k^{i+} = a_{-k}^i$ построен один набор без такого условия.

Мы будем использовать калибровку светового конуса, связанную с системой покоя струны [5]: направление оси калибровки задано вектором $P_\mu / \sqrt{P^2} - e_\mu$, где P_μ — полный импульс струны, e_μ — единичный пространственно-подобный вектор, ортогональный P_μ . При этом $a_0 = 0$. В такой калибровке значительно упрощается вычисление аномалии,

¹⁾ Может оказаться, что в физическом подпространстве нет состояния с наименьшей “энергией” P^2 . Заметим, что в классической механике выражение $P^2/2\pi = \sum_{n>0} \vec{a}_n^* \vec{a}_n - a_n^{0*} a_n^0$ на поверхности всех связей $L_n = 0$ может быть отрицательным (достаточно рассмотреть пример $a_{\pm 1}^0 = 2$, $a_0^1 = 2$, $a_{\pm 2}^1 = 1$, $a_{\pm 2}^2 = \pm i$, остальные $a_n^\mu = 0$). Для положительности P^2 необходимо наложить дополнительное условие $a^0(\sigma) = \sum a_n^0 e^{in\sigma} > 0 \forall \sigma$ (мировая линия конца струны монотонна по времени Минковского). Но тогда это условие придется наложить и в квантовой теории, что представляется крайне проблематичным. Заметим еще, что в стандартной ковариантной теории струны спектр P^2 ограничен снизу по той причине, что операторы $a_n^{0+} a_n^0$ в этой теории принимают отрицательные собственные значения.

кроме того, в группе Лоренца оказывается достаточным рассмотреть подгруппу вращений в системе покоя – при устранении аномалии из этой подгруппы исключается аномалия из полной группы Лоренца.

Для поперечной алгебры Вирасоро

$$L_k = \sum_{[n \neq 0, k]} a_{n-k}^+ a_n, \quad k \neq 0, \quad L_0 = \sum_n : a_n^+ a_n :.$$

Сомножители в L_k , $k \neq 0$, коммутируют,

$$L_k^+ = L_{-k}, \quad [L_k, a_m] = -m a_{m+k}, \quad [L_k, a_m^+] = m a_{m-k}^+.$$

Вакуум 1 в новых переменных:

$$\begin{cases} a_k^1 |0_1\rangle = 0 \\ a_k^2 |0_1\rangle = 0 \end{cases} (k > 0) \iff \begin{cases} a_k |0_1\rangle = 0, \quad k > 0, \\ a_k^+ |0_1\rangle = 0, \quad k < 0. \end{cases}$$

В a_k, a_k^+ -обозначениях удобно использовать

Вакуум 3: $a_k |0_3\rangle = 0$ для всех $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

Вакуум 3 не совпадает ни с одним из рассмотренных вакуумов:

$$(a_k^1 + i a_k^2) |0_3\rangle = 0, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$

Пространство состояний индефинитно (при $k < 0$ оператор a_k^+ рождает состояния с отрицательной нормой), $: a_k^+ a_k := a_k^+ a_k$. Все дальнейшие вычисления проводятся в этом пространстве.

Поперечная алгебра Вирасоро не имеет аномалии:

$$[L_k, L_{-k}] = \sum_l [L_k, a_{l+k}^+ a_l] = \sum_l (l+k) a_l^+ a_l - l a_{k+l}^+ a_{k+l}.$$

Произведения нормально упорядочены, суммы конечны на FMS. Поэтому

$$[L_k, L_{-k}] = 2k L_0.$$

Генераторы группы вращений струны в системе покоя определены выражениями [5]

$$S_3 = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} a_k^+ a_k, \quad S^- = \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} a_k L_{-k}, \quad S^+ = \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} a_k^+ L_k. \quad (3)$$

Вращения струны, меняющие ее положение относительно неподвижной оси калибровки (третьей оси), сопровождаются репараметризациями. Их выполняет встроенная в $S^\pm$ поперечная алгебра Вирасоро.

Импульс P_μ удовлетворяет условию массовой поверхности $P^2/2\pi - L_0 = 0$, которая рассматривается как связь и является гамильтонианом системы.

Сомножители в $S^\pm$ коммутируют: $[a_k, L_{-k}] = ka_0 = 0$ ($[a_k, \sum_{n \neq 0, -k} a_{n+k}^+ a_n] = 0$, поскольку в сумме не появляется a_k^+),

$$[a_k, S_3] = a_k, \quad [a_k^+, S_3] = -a_k^+.$$

Вообще если A – произведение n_1 операторов a и n_2 операторов a^+ , то $[A, S_3] = (n_1 - n_2)A$:

$$[L_k, S_3] = 0, \quad [S^-, S_3] = S^-, \quad [S^+, S_3] = -S^+, \\ S_3 S^\pm = S^\pm (S_3 \pm 1), \quad S_3 S^\pm |S_3 = m\rangle = (m \pm 1) S^\pm |S_3 = m\rangle,$$

S^+ повышает S_3 , S^- понижает S_3 .

Аномалия возникает в $[S^-, S^+]$. В традиционном подходе используется вакуум 1, аномалия имеет неустранимую часть, вызванную аномальными членами в поперечной алгебре Вирасоро. При использовании вакуума 3 эти члены отсутствуют. Подробное вычисление аномалии можно найти в [6]. Результат вычисления:

$$[S^-, S^+] = -2S_3 + 1.$$

Оставшийся аномальный член устраняется переопределением $S_3 - \frac{1}{2} \rightarrow S_3$. При этом S_3 имеет полуцелый спектр. Построенная квантовая механика обладает также другими необычными свойствами, к описанию которых мы переходим.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

3.1. Общая характеристика представлений группы вращений в indefinite пространствах состояний. Коммутационные соотношения алгебры $SO(3)$:

$$[S^-, S_3] = S^-, \quad [S^+, S_3] = -S^+, \quad [S^-, S^+] = -2S_3.$$

Оператор Казимира:

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= \frac{1}{2}(S^+ S^- + S^- S^+) + S_3^2 = \\ &= S^+ S^- + S_3(S_3 - 1) = S^- S^+ + S_3(S_3 + 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Собственные значения $\vec{S}^2$ обозначим $S(S+1)$. При $S(S+1) \geq -1/4$ величина S вещественна, можно положить $S \geq -1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Стандартное представление группы вращений (S – целые или полуцелые ≥ 0 , $S_3 = -S \dots S$ с шагом 1) получается при использовании коммутационных соотношений и *положительной определенности* пространства состояний. Исползуется следующее рассуждение.

Подействуем операторами S^+ , S^- на произвольное состояние с определенными S и S_3 . Получим последовательность состояний с тем же S , для которых S_3 меняется с шагом 1. Из (4) имеем

$$\langle S, S_3 | S^+ S^- | S, S_3 \rangle = (S(S+1) - S_3(S_3 - 1)) \langle S, S_3 | S, S_3 \rangle,$$

Рис. 1. Неприводимые вращательно-инвариантные пространства. $\mathcal{H}^0$ положительно определено, $\mathcal{H}^-$ и $\mathcal{H}^+$ индефинитны.

при больших $|S_3|$ коэффициент в правой части становится отрицательным, поэтому либо $|S, S_3\rangle$, либо $S^-|S, S_3\rangle$ имеет отрицательную норму. Таких состояний нет в положительно определенном пространстве, поэтому последовательности $(S^+)^k|S, S_3\rangle$ и $(S^-)^k|S, S_3\rangle$ должны обрываться. Из (4) видно, что это возможно лишь при $S_3 = -S, -S+1, \dots, S$.

В индефинитном пространстве приведенное рассуждение теряет силу, и группа вращений может иметь другие представления в этом пространстве. Охарактеризуем эти представления.

1. Простейшее представление имеет следующий вид.

Состояния: $|Sm\rangle$, $2S \in \mathbf{Z}$, $S \geq -1/2$, $S_3 = m = S + \mathbf{Z}$.

Скалярное произведение:

$$\langle S'm'|Sm\rangle = \delta_{S'S}\delta_{m'm} \cdot \begin{cases} 1, & -S \leq m \leq S, \\ (-1)^{m-S+1}, & m \geq S+1, \\ (-1)^{m+S+1}, & m \leq -S-1. \end{cases} \quad (5)$$

Операторы действуют на состояния следующим образом:

$$S^+|Sm\rangle = \alpha_{Sm}^+|S, m+1\rangle, \quad S^-|Sm\rangle = \alpha_{Sm}^-|S, m-1\rangle, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{Sm}^+ &= \sqrt{|S(S+1) - m(m+1)|}, \\ \alpha_{Sm}^- &= \alpha_{S, m-1}^+ \quad \text{при} \quad -S \leq m \leq S, \\ \alpha_{Sm}^- &= -\alpha_{S, m-1}^+ \quad \text{при} \quad m \geq S+1 \quad \text{или} \quad m \leq -S-1. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что выполнены все необходимые коммутационные соотношения и что S^+ и S^- эрмитово сопряжены, а S_3 эрмитов. Выполнены соотношения

$$S^+|SS\rangle = S^+|S, -S-1\rangle = 0 \quad \text{и} \quad S^-|S, -S\rangle = S^-|S, S+1\rangle = 0,$$

поэтому все пространство состояний разбивается на прямую сумму пространств с $m \leq -S-1$, $-S \leq m \leq S$ и $m \geq S+1$, инвариантных при действии всех генераторов вращений. Мы обозначим эти пространства $\mathcal{H}_S^-$, $\mathcal{H}_S^0$ и $\mathcal{H}_S^+$ (рис. 1). (При $S = -1/2$ сектор $\mathcal{H}_S^0$ отсутствует.) В общем случае нормы векторов $|Sm\rangle$ не обязательно равны ± 1 , как в (5). В каждом секторе скалярное произведение можно домножить на свой общий множитель без нарушения эрмитовых свойств операторов (6).

Заметим, что спектр оператора S_3 в секторах $\mathcal{H}_S^\pm$ совпадает со спектром аналогичного оператора в представлениях группы Лоренца $SO(2,1)$ дискретных серий $\mathcal{D}_{2S+1}^\pm$ ²⁾. Это совпадение не случайно. Переход от алгебры $SO(3)$ к алгебре $SO(2,1)$ производится заменой операторов (поворотом Вика)

$$S^+ \rightarrow iS^+, \quad S^- \rightarrow iS^-, \quad S_3 \rightarrow S_3$$

и такой заменой скалярного произведения, чтобы новые операторы $S^\pm$ были эрмитово сопряжены:

$$\langle S'm' | Sm \rangle = \delta_{S'S} \delta_{m'm} \cdot \begin{cases} (-1)^{S+m}, & -S \leq m \leq S \quad (\text{ср. (5)}), \\ 1, & m \geq S+1, \quad m \leq -S-1. \end{cases}$$

Линейное пространство представления при этом не меняется. При повороте Вика секторы $\mathcal{H}_S^\pm$ переходят в положительно определенные пространства $\mathcal{D}_{2S+1}^\pm$, сектору $\mathcal{H}_S^0$ отвечает индефинитное пространство, в котором реализуется конечномерное представление $SO(2,1)$.

2. Имеются также другие представления группы вращений. Как видно из (4), последовательность $(S^+)^k |Sm\rangle$ может обрываться только на состояниях $|SS\rangle$ и $|S, -S-1\rangle$, а $(S^-)^k |Sm\rangle$ — только на $|S, -S\rangle$ и $|S, S+1\rangle$. Но последовательности не обязательно обрываются при прохождении этих состояний. Из (4) следует лишь

$$S^- S^+ |SS\rangle = 0,$$

это означает, в частности, что $S^+ |SS\rangle$ имеет нулевую норму. Все дальнейшие состояния в последовательности $(S^+)^k |SS\rangle$ также обладают нулевой нормой. На сумму таких представлений разлагаются произведения представлений $\mathcal{H}^0 \otimes \mathcal{H}^\pm$.

3. В общем случае $S_3 - S$ и $2S$ могут не быть целыми, возможно также $\tilde{S}^2 < -1/4$. Наконец, эрмитовы операторы $\tilde{S}^2$ и S_3 могут принимать комплексные собственные значения на векторах с нулевой нормой [3]. С такими представлениями мы не встретимся.

Операторы конечных вращений. В секторах $\mathcal{H}_S^\pm$ генераторы вращений $S^\pm$ являются неограниченными операторами. Вследствие этого экспоненты от них определены не на всем пространстве состояний.

Рассмотрим оператор $e^{i\alpha S_1}$. Справедливо тождество [6]

$$e^{i\alpha S_1} = e^{i \operatorname{tg} \alpha / 2 S^+} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-2S_3} e^{i \operatorname{tg} \alpha / 2 S^-}. \quad (7)$$

Подействуем оператором $e^{i\alpha S_1}$ на нижнее состояние сектора $\mathcal{H}_S^+$:

$$e^{i\alpha S_1} |S, S+1\rangle = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{-2(S+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \operatorname{tg} \alpha / 2)^k}{k!} \left(\prod_{p=1}^k \alpha_{S, S+p}^+ \right) |S, S+k+1\rangle.$$

²⁾ При полуцелых S в пространствах $\mathcal{D}_{2S+1}^\pm$ реализуются двузначные представления $SO(2,1)$. Представления $\mathcal{D}_0^\pm$ называются ложнодискретными.

Норма этого состояния равна

$$(1+u)^{2(S+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2S+k+1)!}{k!(2S+1)!} (-u)^k, \quad (8)$$

где $u = \operatorname{tg}^2 \alpha/2$. Ряд в последнем выражении представляет разложение Тейлора функции $(1+u)^{-2(S+1)}$. Таким образом, внутри круга сходимости $|u| < 1$ это выражение равно 1, а при $|u| > 1$ ряд расходится. При $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ состояние $e^{i\alpha S_1} |S, S+1\rangle$ обладает единичной нормой, при $\pi/2 < \alpha < \pi$ это состояние ненормируемо. Действие $e^{i\alpha S_1}$ при $\pi/2 < \alpha < \pi$ хорошо определено на состояниях вида $e^{-i\lambda S_1} |S, S+1\rangle$, $\alpha - \pi/2 < \lambda < \pi/2$. На таких состояниях не определено действие $e^{-i\alpha S_1}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Итак, действие операторов конечных вращений определено не на всех состояниях — каждый оператор вращения имеет собственную область определения. В области определения эти операторы унитарны³⁾. Состояния вне области определения при вращениях переходят в ненормируемые векторы состояний (как элементы линейного пространства эти векторы вполне определены).

На то, что в секторе $\mathcal{H}_S^+$ имеется препятствие к произвольным вращениям, указывает также следующий факт: из формальных коммутационных соотношений вытекает, что вращение $e^{i\pi S_1}$ меняет знак S_3 , с другой стороны, сектор $\mathcal{H}_S^+$ содержит только состояния с $S_3 > 0$.

При действии оператора $e^{i\alpha S_1}$ на нижнее состояние сектора $\mathcal{H}_S^0$ получим состояние

$$e^{i\alpha S_1} |S, -S\rangle = \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^{2S} \sum_{k=0}^{2S} \frac{(i \operatorname{tg} \alpha/2)^k}{k!} \left(\prod_{p=1}^k \alpha_{S, -S+p-1}^+ \right) |S, -S+k\rangle,$$

обладающее нормой

$$(1+u)^{-2S} \sum_{k=0}^{2S} \frac{(2S)!}{k!(2S-k)!} u^k = 1. \quad (9)$$

Как и следовало ожидать, в секторе $\mathcal{H}_S^0$ определены все вращения.

Секторы $\mathcal{H}_S^\pm$ в точном смысле не являются пространствами представления группы вращений, они являются лишь пространствами, в которых реализована алгебра этой группы.

Мы рассмотрим также представления группы $\mathrm{SO}(2,1)$. Поворот Вика $S^\pm \rightarrow iS^\pm$ эквивалентен замене $\alpha \rightarrow i\alpha$ в формуле (7). Необходимо также учесть замену скалярного произведения. Проводя эти преобразования, получим формулу (8) с $u = -\operatorname{th}^2 \alpha/2$. При любом α значение u находится внутри круга сходимости $|u| < 1$, поэтому выражение (8) равно 1, в пространствах $\mathcal{D}_{2S+1}^\pm$ реализуется унитарное представление $\mathrm{SO}(2,1)$. Аналогичные преобразования для формулы (9) показывают, что конечномерное представление $\mathrm{SO}(2,1)$ псевдоунитарно.

³⁾ В некоторых работах операторы, сохраняющие индефинитное скалярное произведение, называются псевдоунитарными.

3.2. Представление алгебры $SO(3)$ в теории струны. Вернемся к нашей задаче. Генераторы вращений определены выражениями

$$S_3 = M - \frac{1}{2}, \quad M = \sum' \frac{1}{k} a_k^+ a_k,$$

$$S^- = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum' \frac{k+n}{kn} a_k a_n a_{k+n}^+, \quad S^+ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum' \frac{k+n}{kn} a_k^+ a_n^+ a_{k+n}.$$

Необходимость симметризации, проведенной в $S^\pm$, объясняется в [6]. Оператор квадрата массы струны: $L_0 = \sum a_k^+ a_k$.

Если A – произведение операторов a и a^+ , то

$$[A, L_0] = (\text{сумма индексов операторов } a - \text{сумма индексов операторов } a^+) \cdot A,$$

поэтому

$$[S_3, L_0] = 0, \quad [S^\pm, L_0] = 0.$$

Состояния: $a_k^+ |0\rangle = |k\rangle$, одно возбуждение в моде k ; $a_k |k\rangle = k |0\rangle$; $a_k^+ a_l^+ \dots a_m^+ |0\rangle = |kl \dots m\rangle$, среди этих чисел могут быть совпадающие (несколько возбуждений в одной моде). Будем обозначать $\underbrace{kk \dots k}_n$ через $n * k$,

$$\begin{aligned} a_k |n * k, \dots\rangle &= kn |(n-1) * k, \dots\rangle, \\ \langle n * k, \dots | n * k, \dots \rangle &= kn \langle (n-1) * k, \dots | (n-1) * k, \dots \rangle = \\ &= k^n n! \langle \dots | \dots \rangle = \prod_i k_i^{n_i} n_i!. \end{aligned} \tag{10}$$

Оператор M :

$$M |n_1 * k_1, \dots\rangle = \sum n_i \cdot |n_1 * k_1, \dots\rangle.$$

M подсчитывает число операторов a^+ в состоянии:

$$a_k^+ a_l^+ \dots a_m^+ |0\rangle = |\underbrace{kl \dots m}\rangle.$$

$M = \text{количество этих чисел}$

Собственные значения $M \geq 0$. Собственные состояния M :

$$M = \begin{array}{cccc} |0\rangle, & |k\rangle, & |kl\rangle & \dots \\ 0, & 1, & 2, & \dots \end{array}$$

Оператор L_0 :

$$L_0 |n_1 * k_1, \dots\rangle = \sum k_i n_i \cdot |n_1 * k_1, \dots\rangle.$$

L_0 подсчитывает сумму индексов a^+ в состоянии:

$$a_k^+ a_l^+ \dots a_m^+ |0\rangle = |\underbrace{kl \dots m}\rangle.$$

$L_0 = \text{сумма этих чисел}$

Рис. 2. Спектр (L_0, M) . Состояние $N = 0, M = 0$ невырождено: $|0\rangle$. Состояния $N \neq 0, M = 1$ невырождены: $|N\rangle$. Состояния $N, M > 1$ вырождены с бесконечной кратностью (различные наборы M чисел из $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$, сумма которых равна N): $M = 2$: $|k, N - k\rangle$; $M = 3$: $|k, l, N - k - l\rangle$ и т.д.

Собственные значения $L_0 \in \mathbf{Z}$. Собственные состояния L_0 :

$$\begin{aligned} L_0 = 0: & \quad |0\rangle, \quad |k, -k\rangle, \quad |k, l, -k - l\rangle, \quad \dots, \\ L_0 = N: & \quad |N\rangle, \quad |k, N - k\rangle, \quad |k, l, N - k - l\rangle, \quad \dots \end{aligned}$$

Спектр (L_0, M) приведен на рис. 2. Этот спектр имеет необычный вид, поскольку оператор $a_k^+ a_k$ при $k < 0$ принимает отрицательные собственные значения, например

$$a_{-1}^+ a_{-1} \cdot (a_{-1}^+)^n |0\rangle = -n \cdot (a_{-1}^+)^n |0\rangle,$$

так как $[a_{-1}, a_{-1}^+] = -1$.

Собственные состояния $\tilde{S}^2$. Поскольку операторы $S^\pm$ содержат множитель $\sqrt{2\pi/P^2}$, они являются эрмитово сопряженными только при $P^2 > 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие состояния.

Рассмотрим 1-модовые состояния $|N\rangle$, $N > 0$. Эти состояния аннигилируются понижающим оператором S^- , так как он содержит два оператора уничтожения. С другой стороны, на этих состояниях $M = 1$, т.е. $S_3 = 1/2$. Из (4) заключаем, что $\tilde{S}^2 = -1/4$, т.е. $S = -1/2$. Повышающий оператор S^+ содержит один оператор уничтожения, переводящий $|N\rangle$ в $|0\rangle$, и два оператора рождения, создающих из $|0\rangle$ 2-модовое состояние с $S = -1/2$, $S_3 = 3/2$. Последовательными применениями S^+ к $|N\rangle$ получаем базис состояний пространства $\mathcal{H}_{-1/2}^+$. Это построение продолжено в [6]. Результат изображен на рис. 3. Все состояния содержатся в секторах $\mathcal{H}_S^+$.

Состояния с заданными $M = S_3 + 1/2$ и $N = P^2/2\pi$ имеют вид

$$\Psi = \sum_{p_1 \dots p_M} c_{p_1 \dots p_M} |p_1 \dots p_M\rangle,$$

где коэффициент при состоянии симметричен по всем индексам и отличен от нуля только при $\sum_{i=1}^M p_i = N$.

Нижнее состояние в секторе $\mathcal{H}_S^+$: $\Psi = |S, S + 1\rangle$ удовлетворяет условию

$$\text{sym}_{q p_3 \dots p_M} q \sum_p c_{q-p, p, p_3 \dots p_M} = 0.$$

Рис. 3. Спектр (S, S_3) . Для каждого $L_0 = N > 0$: $S = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; $S_3 = S + 1, S + 2, \dots$. Состояния с $S = -\frac{1}{2}$ невырождены. Состояния с $S \geq \frac{1}{2}$ вырождены с бесконечной кратностью.

Здесь sym означает симметризацию по перестановкам указанных индексов. Норма состояния равна

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = M! \sum_{p_1 \dots p_M} |c_{p_1 \dots p_M}|^2 p_1 \dots p_M.$$

Остальные состояния рождаются из $|S, S + 1\rangle$ операторами $(S^+)^k$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В индефинитном пространстве состояний, использованном в этой работе, квантовая теория струны не имеет аномалий. При ковариантном квантовании струны система связей совместна, при квантовании в калибровке светового конуса алгебра вращений замкнута. Вместе с тем теория обладает следующими свойствами:

1. Представления алгебры $\text{SO}(3)$ изоморфны представлениям $\mathcal{D}_{2S+1}^+$ алгебры $\text{SO}(2,1)$. Для всех состояний выполняется неравенство $S_3 > S$.
2. Операторы конечных вращений определены не на всем пространстве состояний.
3. Нарушается классическое неравенство $P^2 \geq 2\pi S$ (условие Редже).
4. Теория не имеет вероятностной интерпретации⁴⁾.

Кроме того, в пространстве состояний нет подпространств, в которых могла бы содержаться физически приемлемая теория. Построение теории с более реалистическими свойствами возможно при некоторых модификациях приведенной здесь конструкции.

1. В разделе 1 показано, что центральный заряд не зависит от метрики пространства Минковского. Отсюда следует, что в пространстве размерности $d = N + N$, содержащем

⁴⁾Проблемы вероятностной интерпретации квантовых теорий в индефинитном пространстве иногда удается решить, см. [3].

равное число пространственных и временных измерений

$$[a_k^\mu, a_n^\nu] = g^{\mu\nu} k \delta_{k,-n}, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(\underbrace{+1 \cdots +1}_N, \underbrace{-1 \cdots -1}_N),$$

при выборе вакуума

$$a_k^i |0\rangle = a_{-k}^{i+N} |0\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad k > 0,$$

центральный заряд равен нулю. При таком выборе вакуума пространство состояний положительно определено, поэтому в нем реализуются лишь стандартные представления группы Лоренца $SO(N, N)$. Представляет интерес проведение компактификации “лишних” измерений в этой теории до $d = 3 + 1$.

2. Сокращение аномалии в индефинитном фоксовском пространстве раздела 1 не является специфическим свойством этого пространства, а имеет более глубокую природу. Покажем, каким образом можно реализовать алгебру Вирасоро с нулевым центральным зарядом в другом, более широком пространстве состояний.

Канонические переменные [7]:

$$[Q_\mu(\sigma), Q_\nu(\sigma')] = 2ig_{\mu\nu} \vartheta(\sigma - \sigma'),$$

где $\vartheta(\sigma) = [\sigma/2\pi] + \frac{1}{2}$, $[x]$ — целая часть x , $\vartheta(\sigma)' = \Delta(\sigma)$ — периодическая дельта-функция. Рассмотрим линейные комбинации

$$Q_\pm = (Q_3 \pm Q_0)/\sqrt{2}, \quad Q = (Q_1 + iQ_2)/\sqrt{2}, \quad Q^* = (Q_1 - iQ_2)/\sqrt{2},$$

для них имеем

$$[Q_-(\sigma), Q_+(\sigma')] = -2i\vartheta(\sigma - \sigma'), \quad [Q^*(\sigma), Q(\sigma')] = -2i\vartheta(\sigma - \sigma'), \quad (11)$$

остальные коммутаторы равны нулю.

(Q_+, Q) образуют полный набор коммутирующих переменных квантовой теории. В качестве пространства состояний выберем линейное пространство функционалов $\Psi(Q_+, Q)$. Переменные Q_+ и Q реализуем мультипликативными операторами, Q'_- и Q'^* — операторами дифференцирования⁵⁾:

$$Q'_-(\sigma) = -2i \frac{\delta}{\delta Q_+(\sigma)}, \quad Q'^*(\sigma) = -2i \frac{\delta}{\delta Q(\sigma)},$$

$$[Q'_-(\sigma), Q_+(\sigma')] = -2i\Delta(\sigma - \sigma'), \quad [Q'^*(\sigma), Q(\sigma')] = -2i\Delta(\sigma - \sigma').$$

⁵⁾ Используя вместо операторов $Q_\mu(\sigma)$ коэффициенты их разложений Фурье и ограничив пространство функционалов $\Psi(Q_+, Q)$ на полиномиальные функции от коэффициентов Фурье, получим фоксовское пространство состояний раздела 1. Заметим, что генератор вращений $Q \rightarrow Qe^{i\varphi}$ принимает в этом пространстве только неотрицательные собственные значения. Пространство функционалов $\Psi(Q_+, Q)$ шире, чем фоксовское, в частности оно содержит состояния отрицательной степени однородности по Q .

Нетрудно также построить оператор средней координаты и определить Q_- и Q^* так, чтобы выполнялись коммутационные соотношения (11). Здесь нам потребуются только производные Q'_- и Q'^{*} .

В генераторе репараметризаций выберем следующее упорядочение:

$$Q'^2_\mu = -2(Q'_+Q'_- + Q'_+Q'^{*}) \sim Q'_+\frac{\delta}{\delta Q_+(\sigma)} + Q'_+\frac{\delta}{\delta Q(\sigma)} = L(\sigma).$$

Легко убедиться, что этот оператор действительно генерирует репараметризацию $(Q_+(\sigma), Q(\sigma))$ в аргументе Ψ :

$$\left. \frac{\delta}{\delta \varepsilon(\sigma)} \Psi(Q_+(\sigma + \varepsilon(\sigma)), Q(\sigma + \varepsilon(\sigma))) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\delta \Psi}{\delta Q_+(\sigma)} Q'_+(\sigma) + \frac{\delta \Psi}{\delta Q(\sigma)} Q'(\sigma) = L(\sigma) \Psi.$$

Поэтому алгебра операторов $L(\sigma)$ замкнута. Это также можно проверить непосредственным вычислением.

Решениями связей $L(\sigma)\Psi = 0$ являются параметрически-инвариантные функционалы $\Psi(Q_+(\sigma), Q(\sigma))$ (параметрические инварианты кривой $(Q_+(\sigma), Q(\sigma)) \subset \mathbf{R} \times \mathbf{C}$, голоморфные по Q). Примерами таких инвариантов являются

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\sigma (F(Q_+, Q)Q'_+ + G(Q_+, Q)Q'),$$

а также произвольные функции от них.

Таким образом, алгебру Вирасоро с нулевым центральным зарядом можно представить в линейном пространстве состояний, не наделенном скалярным произведением. Следующим шагом должно стать введение такого скалярного произведения, по отношению к которому операторы Q и Q^* эрмитово сопряжены, а Q_+ и Q_- эрмитовы. Это требование, возможно, является избыточным, поскольку операторы Q_μ не коммутируют со связями, не сохраняют физическое пространство и поэтому не являются наблюдаемыми. В квантовых теориях с некомпактной калибровочной группой в расширенном и физическом пространствах приходится вводить два различных скалярных произведения, поскольку скалярное произведение расширенного пространства расходится на физических векторах (см. [8]). Безусловно необходимым является выполнение эрмитовых свойств по отношению к физическому скалярному произведению для операторов, действующих в физическом пространстве. Желательно также, чтобы физическое скалярное произведение было положительно определено. Свойства скалярного произведения в расширенном пространстве не влияют на физические следствия теории.

Автор выражает благодарность за полезные обсуждения Е. Б. Бердникову, Г. П. Пронько, А. В. Разумову и Л. Д. Соловьеву. Работа выполнена при финансовой поддержке Международной соросовской программы, грант № а734-ф.

Список литературы

- [1] *Dirac P. A. M.* // Comm. Dublin Inst. Adv. Studies. 1943. P. 1.
- [2] *Pauli W.* // Rev. Mod. Phys. 1943. V. 15. P. 175.
- [3] *Надь К.* Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля. М.: Мир, 1969.
- [4] *Бринк Л., Энно М.* Принципы теории струн. М.: Мир, 1991. С. 156.

- [5] *Никитин И. Н.* // ЯФ. 1993. Т. 56. №9. С. 230.
- [6] *Никитин И. Н.* Квантовая теория струны в индефинитном пространстве состояний: Препринт ИФВЭ 95-113. Протвино: ИФВЭ, 1995.
- [7] *Pron'ko G. P.* // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. №3. P. 355.
- [8] *Никитин И. Н., Пронько Г. П.* Электромагнитное взаимодействие в теории прямолинейной струны: Препринт ИФВЭ 94-64. Протвино: ИФВЭ, 1994.

Институт физики
высоких энергий

Поступила в редакцию
27.IX.1995 г.

I. N. Nikitin

QUANTUM STRING THEORY IN INDEFINITE SPACE OF STATES

The quantum string theory in indefinite (pseudo-Hilbert) Fock representation is considered. It is shown that all anomalies in 4-dimensional theory of open bosonic string are cancelled at particular choice of vacuum state. In this the algebra of reparametrizations (in covariant approach) and the algebra of rotations (in light cone gauge) become closed. The indefiniteness of the state space introduces some non-physical features into the theory. Modifications of the given method are discussed, which are necessary to construct more realistic theory.