Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ташпулатов, Исследование спектра оператора энергии двухмагنونной системы в одномерном негейзенберговском ферромагнетике со взаимодействием ближайших и вторых соседей со значением спина $s = 1$, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 251–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:08:08

С. М. Ташпулатов

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННОЙ СИСТЕМЫ В ОДНОМЕРНОМ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЛИЖАЙШИХ И ВТОРЫХ СОСЕДЕЙ СО ЗНАЧЕНИЕМ СПИНА $s = 1$

Рассматривается двухмагнонная система в одномерном негейзенберговском ферромагнетике со взаимодействием ближайших и вторых соседей со значением спина $s = 1$. Доказано, что при $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = 0$ система имеет не более двух, а при $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ не более шести двухмагнонных связанных состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучалась двухмагнонная система в одномерном ферромагнетике Гейзенберга со взаимодействием ближайших и вторых соседей со значением спина $s = \frac{1}{2}$. Там было показано, что если параметр α (отношение параметра билинейного обменного взаимодействия вторых соседей к параметру билинейного обменного взаимодействия ближайших соседей) имеет значения $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, то в одномерном случае при $\Lambda = \pi$ (Λ — центр масс момента связанных пар) гамильтониан системы имеет единственное связанное состояние со значением энергии, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если $\alpha \geq \frac{1}{2}$, это связанное состояние исчезает. В случае $\Lambda = 0$ у системы нет связанных состояний. При $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ система имеет единственное двухмагнонное связанное состояние (ДСС) при всех значениях параметра α со значением энергии, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. При остальных значениях Λ : $-\pi < \Lambda < \pi$, существует такое значение параметра α , обозначаемое $\alpha_{кр}$, что при $0 \leq \alpha < \alpha_{кр}$ система имеет единственное ДСС со значением энергии, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если же $\alpha \geq \alpha_{кр}$, то такое связанное состояние исчезает. Отметим, что $\alpha_{кр}$ зависит от параметров Λ и J .

В работе автора [2] эта задача рассмотрена уже со взаимодействием третьих соседей при $\Lambda = \pi$. Показано, что в единичном квадрате $Q = \{(\alpha; \beta) : 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$ существуют множества G_j , $j = 1, 2, 3$, такие, что при $(\alpha; \beta) \in \bigcup_{j=1}^3 G_j$ имеется единственное ДСС со значением энергии, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Здесь

$$G_1 = \left\{ (\alpha; \beta) \in Q : \alpha > \frac{1}{3}, \quad \beta > \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{3\alpha - 1} \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (\alpha; \beta) \in Q : \alpha < \frac{1}{3}, \quad \beta < \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{3\alpha - 1} \right\},$$

$$G_3 = \left\{ (\alpha; \beta) \in Q : \alpha = \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \right\}.$$

При остальных же значениях параметров $(\alpha; \beta) \in Q$ оно исчезает, а его энергия поглощается непрерывной энергией.

В настоящей работе в одномерной целочисленной решетке рассматривается двухмагнонная система со значением спина $s = 1$, со взаимодействием ближайших и вторых соседей в негейзенберговском ферромагнетике и изучается ДСС такой системы при Λ , равном π , $\frac{\pi}{2}$ и 0. Показано, что при $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = 0$ система имеет не более двух, а при $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ не более шести ДСС со значениями энергий, лежащими вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

2. ГАМИЛЬТониан СИСТЕМЫ И ЕГО ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -J \sum_{m, \tau} \sum_{k=1}^2 \alpha_k (\mathbf{S}_m \cdot \mathbf{S}_{m+k\tau}) - J_1 \sum_{m, \tau} \left[\sum_{k=1}^2 \alpha_k (\mathbf{S}_m \cdot \mathbf{S}_{m+k\tau}) \right]^2, \quad (1)$$

где $J > 0$, $J_1 > 0$ – параметры соответственно билинейного и биквадратичного обменного взаимодействия, а τ означает суммирование по ± 1 ; $\tau = \pm 1$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Пусть Z – одномерная целочисленная решетка. Обозначим через $\mathbf{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ оператор атомного спина величины $s = 1$ узла m . Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \varphi_0$ и $\|\varphi_0\| = 1$. Векторы $S_m^- S_n^- \varphi_0$ описывают состояние системы двух магнонов, находящихся на узлах m и n со значением спина $s = 1$. Векторы $\{\frac{1}{2} S_m^- S_n^- \varphi_0\}$ образуют ортонормальную систему. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\mathcal{H}_2$. Оно евклидово относительно естественного скалярного произведения.

Оператор (1) действует в пространстве магнонных состояний $\mathcal{H}_{\text{маг}}$, которое является бесконечным тензорным произведением трехмерных евклидовых пространств $\mathbb{C}^3$: $\mathcal{H}_{\text{маг}} = \bigotimes_k \mathbb{C}_k^3$, где $\mathbb{C}_k^3 \equiv \mathbb{C}^3$, для произвольного $k \in Z$.

Заметим, что сужение H_2 оператора H на пространство $\mathcal{H}_2$ – самосопряженный и ограниченный оператор. Из построения пространства $\mathcal{H}_2$ и вида оператора H непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_2 = H|_{\mathcal{H}_2}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\bar{H}_2$, действующий в*

$l_2(Z \times Z)$ по формуле

$$\begin{aligned}
 (\overline{H}_2 f)(p; q) = & -J \sum_{\tau} \sum_{p, q} \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_k (\delta_{p, q+k\tau} + \delta_{p+k\tau, q} - 4) f(p; q) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p-k\tau, q} f(p-k\tau; q) - \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p+k\tau, q} f(p+k\tau; q) - \\
 & - \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p, q-k\tau} f(p; q-k\tau) - \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p, q+k\tau} f(p; q+k\tau) + \\
 & + \alpha_k f(p-k\tau; q) + \alpha_k f(p; q-k\tau) + \alpha_k f(p+k\tau; q) + \alpha_k f(p; q+k\tau) \left. \right] - \\
 & - J_1 \sum_{\tau} \sum_{p, q} \sum_{k=1}^2 \left[\alpha_k (2\delta_{p, q} - 2\delta_{p+k\tau, q} - 2\delta_{p, q+k\tau} + 8) f(p; q) + \right. \\
 & + \alpha_k \delta_{p, q+k\tau} f(p-k\tau; q+k\tau) + \alpha_k \delta_{p+k\tau, q} f(p+k\tau; q-k\tau) - \\
 & - 2\alpha_k f(p-k\tau; q) + \alpha_k \delta_{p, q} f(p-k\tau; q-k\tau) + \alpha_k \delta_{p+k\tau, q} \times \\
 & \times f(p+k\tau; q+k\tau) + \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p, q+k\tau} f(p-k\tau; q) - \alpha_k \delta_{p, q} f(p-k\tau; q) - \\
 & - 2\alpha_k f(p+k\tau; q) - 2\alpha_k f(p; q-k\tau) + \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p+k\tau, q} f(p; q-k\tau) - \\
 & - \alpha_k \delta_{p, q} f(p; q-k\tau) - 2\alpha_k f(p; q+k\tau) + \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p, q+k\tau} f(p; q+k\tau) - \\
 & \left. - \alpha_k \delta_{p, q} f(p; q+k\tau) + \frac{1}{2} \alpha_k \delta_{p+k\tau, q} f(p+k\tau; q) - \alpha_k \delta_{p, q} f(p+k\tau; q) \right],
 \end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. Сам оператор H_2 на вектор $\Psi \in \mathcal{H}_2$ действует по формуле

$$H_2 \Psi = \sum_{p, q} (\overline{H}_2 f)(p; q) S_p^- S_q^- \varphi_0. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения проводится непосредственно с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_n^z .

ЛЕММА 1. Спектры операторов H_2 и $\overline{H}_2$ совпадают.

Лемма доказывается с использованием критерия Вейля (см. в [3]).

3. ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА $\overline{H}_2$

Цель настоящей работы – изучить спектр оператора H_2 . Этот спектр легко изучается в его импульсном представлении. С этой целью обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}: l_2(Z \times Z) \rightarrow L_2(T \times T) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_2,$$

где $T = [0; 2\pi)$ – одномерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$: $\lambda(T) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Оператор $\mathcal{F}: \mathcal{H}_2 \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_2$. При этом оператор $\widetilde{H}_2 = \mathcal{F}H_2\mathcal{F}^{-1}$ есть ограниченный самосопряженный оператор в $\widetilde{\mathcal{H}}_2$, действующий по формуле

$$(\widetilde{H}_2 f)(x, y) = h(x, y)f(x, y) + \int_T h_1(x, y, t)f(t, x + y - t) dt, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} h(x, y) &= 8(J - 2J_1) \sum_{k=1}^2 \alpha_k \left(1 - \cos \frac{k(x+y)}{2} \cos \frac{k(x-y)}{2} \right), \\ h_1(x, y, t) &= -4(J - J_1) \sum_{k=1}^2 \alpha_k \left[\cos \frac{k(x-y)}{2} - \cos \frac{k(x+y)}{2} \right] \cos \frac{k(x+y-2t)}{2} - \\ &\quad - 4J_1 \sum_{k=1}^2 \alpha_k \left[1 - 2 \cos \frac{k(x+y)}{2} \cos \frac{k(x-y)}{2} + \cos k(x+y) \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственным применением в (3) преобразования Фурье.

Из предложения 2 следует, что для изучения спектра оператора H_2 в $\mathcal{H}_2$ достаточно изучить спектр оператора $\widetilde{H}_2$, действующего в $L_2(T \times T)$ по формуле (2).

Одной из важных задач математической физики является нахождение связанных состояний оператора H_2 и значений энергии этих связанных состояний.

Следующий факт важен для последующих исследований спектра оператора.

Пусть фиксирован полный квазиимпульс $x + y = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x, y) : x + y = \Lambda\}$. Заметим, что тогда [4] оператор $\widetilde{H}_2$ и пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямой интеграл $\widetilde{H}_2 = \int_T \oplus \widetilde{H}_{2\Lambda} d\Lambda$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_2 = \int_T \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$ операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ и пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ так, что пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}_{2\Lambda}$, а операторы $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ в пространствах $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ действуют по формуле

$$(\widetilde{H}_{2\Lambda} f_\Lambda)(x) = h_\Lambda(x)f_\Lambda(x) + \int_T h_{1\Lambda}(x, t)f_\Lambda(t) dt,$$

здесь $h_\Lambda(x) = h(x; \Lambda - x)$, $h_{1\Lambda}(x, t) = h_1(x, \Lambda - x, t)$ и $f_\Lambda(x) = f(x; \Lambda - x)$.

Заметим, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$ состоит из множества значений функции $h_\Lambda(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Собственная функция φ_Λ оператора $\widetilde{H}_{2\Lambda}$, отвечающая собственному значению z_Λ , называется связанным состоянием оператора $\widetilde{H}_2$, а величина z_Λ — энергией этого связанного состояния.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы формулируем основные результаты работы, которые будут приведены ниже.

ТЕОРЕМА 1.

А. Пусть $\Lambda = \pi$, $J < J_1$ и $\alpha \in \left[0; \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}\right]$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значением энергии $z = z_1$, лежащим выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если же $\alpha \in \left[\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}; 1\right]$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значением энергии $z = z_1$, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если $\alpha \in \left[\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}; \frac{J-J_1}{2(J-2J_1)}\right]$, то оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний.

Б. Пусть $\Lambda = \pi$, $J = J_1$, а α – произвольное вещественное число из $[0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значением энергии $z = -8J_1 - \frac{64}{3}\alpha J_1$, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

В. Пусть $\Lambda = \pi$, $J_1 < J < 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значением энергии $z = z_1$, лежащим выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Г. Пусть $\Lambda = \pi$, $J = 2J_1$, а α – произвольное вещественное число из $[0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два связанных состояния φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными $z_1 = -2J_1$ и $z_2 = -10\alpha J_1$ и лежащими ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Д. Пусть $\Lambda = \pi$, $2J_1 < J < 3J_1$ и $0 < \alpha < \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два связанных состояния φ_1 и φ_2 со значениями энергий, равными $z = z_1$, $z = z_2$ и лежащими ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если же $\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)} \leq \alpha \leq 1$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ_2 со значением энергии $z = z_2$, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Е. Пусть $\Lambda = \pi$, $J \geq 3J_1$ и $\alpha \in \left[0; \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}\right)$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ_1 со значением энергии $z = z_1$, лежащим ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$. Если же $\alpha \in \left[\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}; \frac{J-J_1}{2(J-2J_1)}\right]$, то оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний. Если же $\alpha \in \left[\frac{J-J_1}{2(J-2J_1)}; 1\right]$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ_1 со значением энергии $z = z_1$, лежащим выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

В пунктах “А”, “В”, “Д” и “Е” z_1 и z_2 равны

$$z_1 = 8(1 + 2\alpha)(J - 2J_1) - \frac{2(J - J_1)^2}{J - J_1 - 2\alpha(J - 2J_1)}$$

и

$$z_2 = 8(J - 2J_1) + \frac{\alpha(J - 3J_1)[11J - 17J_1 + \sqrt{(7J + 11J_1)(3J_1 - J)}]}{J - J_1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение “А” теоремы 1 справедливо и в случае, когда $\alpha > 1$.

ТЕОРЕМА 2.

А. Пусть $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, $J = 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет ровно два связанных состояния φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными $z_1 = -\alpha J_1$ и $z_2 = 2J_1$, одно из которых лежит ниже, а другое выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Б. Пусть $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, $J = J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний.

В. Пусть $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, $J \neq J_1$ и $J \neq 2J_1$, $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет не более шести связанных состояний со значениями энергии, лежащими вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

ТЕОРЕМА 3.

А. Пусть $\Lambda = 0$, $J < J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние со значениями энергии, лежащими ниже области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

Б. Пусть $\Lambda = 0$, $J = J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний.

В. Пусть $\Lambda = 0$, $J_1 < J < 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний.

Г. Пусть $\Lambda = 0$, $J = 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значениями энергии $z = z_1$, лежащими выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$, где $z = z_1$ является решением уравнения

$$z^3 - (10 + 9\alpha)J_1 z^2 + (20\alpha - 8\alpha^2)J_1^2 = 0.$$

Д. Пусть $\Lambda = 0$, $J > 2J_1$ и $\alpha \in [0; \frac{1}{4}]$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ не имеет связанных состояний. Если же $\alpha > \frac{1}{4}$, то оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное связанное состояние φ со значениями энергии, лежащими выше области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим оператор K_Λ :

$$(K_\Lambda(z)f_\Lambda)(x) = \int_T \frac{h_{1\Lambda}(x; t)}{h_\Lambda(t) - z} f_\Lambda(t) dt.$$

Он является вполне непрерывным в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ для значений z , лежащих вне множества $G_\Lambda = \text{Im } h_\Lambda(x) = [m_\Lambda; M_\Lambda]$. Здесь $m_\Lambda = \min_{x \in T} h_\Lambda(x)$, $M_\Lambda = \max_{x \in T} h_\Lambda(x)$. Обозначим через $\Delta_\Lambda(z)$ определитель Фредгольма оператора $E_\Lambda + K_\Lambda(z)$, где E_Λ — единичный оператор в $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$. Пользуясь видом функций h_Λ и $h_{1\Lambda}$, нетрудно показать, что

$$\Delta_\Lambda(z) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где

$$A_1 = 1 + 4J_1 \int_T \left[\frac{1 - 2 \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - s) + \cos \Lambda}{h_\Lambda(s) - z} + \frac{\alpha [1 - 2 \cos \Lambda \cos(\Lambda - 2s) + \cos \Lambda]}{h_\Lambda(s) - z} \right] ds,$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= 4(J - J_1) \int_T \frac{\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) - \cos \frac{\Lambda}{2}}{h_\Lambda(s) - z} ds, \\
A_3 &= 4\alpha(J - J_1) \int_T \frac{\cos(\Lambda - 2s) - \cos \Lambda}{h_\Lambda(s) - z} ds, \\
B_1 &= 4J_1 \int_T \left\{ \frac{[1 - 2 \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - s) + \cos \Lambda] \cos(\frac{\Lambda}{2} - s)}{h_\Lambda(s) - z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha[1 - 2 \cos \Lambda \cos(\Lambda - 2s) + \cos 2\Lambda] \cos(\frac{\Lambda}{2} - s)}{h_\Lambda(s) - z} \right\} ds, \\
B_2 &= 1 + 4(J - J_1) \int_T \frac{[\cos^2(\frac{\Lambda}{2} - s) - \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - s)]}{h_\Lambda(s) - z} ds, \\
B_3 &= 4\alpha(J - J_1) \int_T \frac{\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) [\cos(\Lambda - 2s) - \cos \Lambda]}{h_\Lambda(s) - z} ds, \\
C_1 &= 4J_1 \int_T \left\{ \frac{\cos(\Lambda - 2s) [1 - 2 \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - s) + \cos \Lambda]}{h_\Lambda(s) - z} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha \cos(\Lambda - 2s) [1 - 2 \cos \Lambda \cos(\Lambda - 2s) + \cos 2\Lambda]}{h_\Lambda(s) - z} \right\} ds, \\
C_2 &= 4(J - J_1) \int_T \frac{\cos(\Lambda - 2s) [\cos(\frac{\Lambda}{2} - s) - \cos \frac{\Lambda}{2}]}{h_\Lambda(s) - z} ds, \\
C_3 &= 1 + 4\alpha(J - J_1) \int_T \frac{\cos^2(\Lambda - 2s) - \cos \Lambda \cos(\Lambda - 2s)}{h_\Lambda(s) - z} ds.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Число $z = z_0 \in G_\Lambda$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\Lambda(z)$, т.е. $\Delta_\Lambda(z_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ЛЕММЫ СМ. В [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.

А. Пусть $\Lambda = \pi$, $J < J_1$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке, лежащей выше значений M_Λ . Если $\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)} \leq \alpha \leq \frac{J-J_1}{2(J-2J_1)}$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_1$, лежащей ниже значений m_Λ .

Б. Пусть $\Lambda = \pi$, $J = J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z_1 = -8J_1 - \frac{64}{3}\alpha J_1$, лежащей ниже значений m_Λ .

В. Пусть $\Lambda = \pi$, $J_1 < J < 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_1$, лежащей выше значений M_Λ .

Г. Пусть $\Lambda = \pi$, $J = 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в двух точках $z_1 = -2J_1$ и $z_2 = -10\alpha J_1$, лежащих ниже значений m_Λ .

Д. Пусть $\Lambda = \pi$, $2J_1 < J < 3J_1$ и $0 < \alpha < \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ снова обращается в нуль в двух точках $z = z_1$ и $z = z_2$, лежащих ниже значений m_Λ . Если $\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)} \leq \alpha \leq 1$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_2$, лежащей ниже значений m_Λ .

Е. Пусть $\Lambda = \pi$, $J \geq 3J_1$ и $0 \leq \alpha < \frac{J-J_1}{4(J-2J_1)}$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_1$, лежащей ниже значений m_Λ .

Если $\frac{J-J_1}{4(J-2J_1)} < \alpha \leq \frac{J-J_1}{2(J-2J_1)}$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ не обращается в нуль. Если $(J-J_1)/[2(J-2J_1)] < \alpha \leq 1$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_1$, лежащей выше значений M_Λ .

В пунктах “А”, “В”, “Д” и “Е” z_1 и z_2 равны

$$z_1 = 8(1+2\alpha)(J-2J_1) - \frac{2(J-J_1)^2}{J-J_1-2\alpha(J-2J_1)}$$

и

$$z_2 = 8(J-2J_1) + \frac{\alpha(J-3J_1)[11J-17J_1+\sqrt{(7J+11J_1)(3J_1-J)}]}{J-J_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\Lambda = \pi$ определитель Фредгольма $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda(z) = & \left[1 - 4(J-J_1) \int_T \frac{\sin^2 s \, ds}{h_\Lambda(s) - z} \right] \left[1 - 8\alpha J_1 \times \right. \\ & \left. \times \int_T \frac{1 - \cos 2s}{h_\Lambda(s) - z} ds + 4\alpha(J-J_1) \int_T \frac{\cos 2s(1 - \cos 2s)}{h_\Lambda(s) - z} ds \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Интегралы, участвующие в этих выражениях, явно вычисляются в квадратурах. Вычисляя эти интегралы для значений z , лежащих вне области непрерывного спектра, мы получаем алгебраическое уравнение для определения z . Здесь мы ограничимся доказательством случаев “Б” и “Д” предложения 3. Остальные пункты предложения доказываются аналогично.

Из (5) очевидно, что если $J = J_1$, то имеем

$$\Delta_\Lambda(z) = 1 - 8\alpha J_1 \int_T \frac{1 - \cos 2s}{h_\Lambda(s) - z} ds.$$

Заметим, что подынтегральная функция положительна для значений $z < m_\Lambda$ и отрицательна для значений $z > M_\Lambda$. Вычисляя значение интеграла для значений $z < m_\Lambda$, получим уравнение вида

$$2 + \frac{8J_1 + z}{\sqrt{[8J_1(1+\alpha) + z]^2 - 64\alpha^2 J_1^2}} = 0,$$

отсюда $z = -8J_1 - \frac{64}{3}\alpha J_1$. Если $2J_1 < J < 3J_1$, то приравняв к нулю все сомножители выражения (5) и вычисляя значения интегралов вне области непрерывного спектра, получим следующие алгебраические уравнения относительно z :

а) при $z < m_\Lambda$

$$1 - \frac{J-J_1}{4\alpha(J-2J_1)} - \frac{(J-J_1)[z-8(J-2J_1)]}{4\alpha(J-2J_1)\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2-64\alpha^2(J-2J_1)^2}} = 0 \quad (6)$$

и

$$16\alpha(J-2J_1)(J-3J_1) + (J-J_1)[8(J-2J_1)-z] + \\ + \frac{16\alpha J_1(J-2J_1)[8(J-2J_1)-z]}{\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2 - 64\alpha^2(J-2J_1)^2}} - \\ - \frac{(J-J_1)[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z][8(J-2J_1)-z]}{\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2 - 64\alpha^2(J-2J_1)^2}} = 0; \quad (7)$$

б) при $z > M_\Lambda$

$$1 - \frac{J-J_1}{4\alpha(J-2J_1)} + \frac{(J-J_1)[z-8(J-2J_1)]}{4\alpha(J-2J_1)\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2 - 64\alpha^2(J-2J_1)^2}} = 0 \quad (8)$$

и

$$16\alpha(J-2J_1)(J-3J_1) + (J-J_1)[8(J-2J_1)-z] - \\ - \frac{16\alpha J_1(J-2J_1)[8(J-2J_1)-z]}{\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2 - 64\alpha^2(J-2J_1)^2}} + \\ + \frac{(J-J_1)[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z][8(J-2J_1)-z]}{\sqrt{[8(J-2J_1)(1+\alpha)-z]^2 - 64\alpha^2(J-2J_1)^2}} = 0. \quad (9)$$

Решая уравнение (6) при $z < m_\Lambda$ и уравнение (8) при $z > M_\Lambda$, находим

$$z_1 = 8(1+2\alpha)(J-2J_1) - \frac{2(J-2J_1)^2}{J-J_1-2\alpha(J-2J_1)}. \quad (10)$$

Аналогично, решая уравнение (7) при $z < m_\Lambda$ и уравнение (9) при $z > M_\Lambda$, находим

$$z_{2,3} = 8(J-2J_1) + \frac{\alpha(J-3J_1)[11J-17J_1 \pm \sqrt{(7J+11J_1)(3J_1-J)}]}{J-J_1}. \quad (11)$$

Теперь, исследуя неравенства $z_i < m_\Lambda$ ($z_i > M_\Lambda$), $i = 1, 2, 3$, и учитывая условие существования решения, мы получим доказательство пункта “Д” предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.

А. Пусть $\Lambda = \pi/2$, $J = 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в двух точках $z_1 = -\alpha J_1$ и $z_2 = 2J_1$ таких, что $z_1 < m_\Lambda$, а $z_2 > M_\Lambda$.

Б. Пусть $\Lambda = \pi/2$, $J = J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ не обращается в нуль вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

В. Пусть $\Lambda = \pi/2$, $J \neq J_1$ и $J \neq 2J_1$, $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль не более чем в шести точках, лежащих вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\Lambda = \pi/2$ и $J = 2J_1$ определитель Фредгольма $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид

$$\Delta_\Lambda(z) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{4J_1}{z} & \frac{2\sqrt{2}J_1}{z} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}J_1}{z} & 1 + \frac{2J_1}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\alpha J_1}{z} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ имеет решения $z_1 = -\alpha J_1$ и $z_2 = 2J_1$.

В случае $\Lambda = \pi/2$ и $J = J_1$ детерминант Фредгольма имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda(z) &= 1 + 4J_1 \int_T \frac{[1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - s)] ds}{-8J_1(1 + \alpha) + 8J_1 \cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - s) - z} = \\ &= -(z + 8J_1\alpha + 4J_1) \int_T \frac{ds}{-8J_1(1 + \alpha) + 8J_1 \cos \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - s) - z}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = -8J_1\alpha - 4J_1$, которая лежит в интервале $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

В остальных же точках J и J_1 уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ для значений $z \in [m_\Lambda; M_\Lambda]$ эквивалентно некоторому алгебраическому уравнению шестой степени. Поэтому вне области непрерывного спектра оператора $H_{2\Lambda}$ оно имеет не более шести решений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

А. Пусть $\Lambda = 0$, $J < J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z'$, лежащей ниже значений m_Λ .

Б. Пусть $\Lambda = 0$, $J = J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ не обращается в нуль вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

В. Пусть $\Lambda = 0$, $J_1 < J < 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ не обращается в нуль вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

Г. Пусть $\Lambda = 0$, $J = 2J_1$ и $\alpha \in [0; 1]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ обращается в нуль в единственной точке $z = z_0$, которая лежит выше значений M_Λ , где z_0 является решением уравнения

$$z^3 - (10 + 9\alpha)J_1z^2 + (20\alpha - 8\alpha^2)J_1^2 = 0. \quad (12)$$

Д. Пусть $\Lambda = 0$, $J > 2J_1$ и $\alpha \in [0; \frac{1}{4}]$. Тогда функция $\Delta_\Lambda(z)$ не обращается в нуль вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$. Если же $\alpha \in]\frac{1}{4}; 1]$, то она обращается в нуль в единственной точке $z = z_1$, лежащей выше значений M_Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Lambda = 0$, $J = 2J_1$, то $h_\Lambda(s) \equiv 0$. Все интегралы, участвующие в выражении для $\Delta_\Lambda(z)$, вычисляются явно. Вычисляя значение интегралов, заметим, что уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ имеет вид (12) и обладает одним решением $z = z_0 > M_\Lambda$.

Если $J = J_1$, то уравнение $\Delta_\Lambda(z) = 0$ имеет вид

$$z \int_T \frac{ds}{h_\Lambda(s) - z} = 0. \quad (13)$$

Ясно, что у уравнения (13) нет решений вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$.

При доказательстве пунктов “А”, “Б” и “Д” мы используем вид (4) функции $\Delta_\Lambda(z)$ и асимптотики соответствующих интегралов [5]. Известно, что в одномерном случае асимптотика интеграла $\int_T \frac{ds}{h_\Lambda(s) - z}$ имеет вид

при $z \rightarrow m_1 - 0$

$$\int_T \frac{ds}{h_\Lambda(s) - z} \sim C|z - m_\Lambda|^{-1/2},$$

при $z \rightarrow M_1 + 0$

$$\int_T \frac{ds}{h_\Lambda(s) - z} \sim -C'|z - M_\Lambda|^{-1/2},$$

где C и C' – положительные константы. Кроме того, вне отрезка $[m_\Lambda; M_\Lambda]$ этот интеграл является монотонной функцией переменной z . Другие интегралы в (4) также имеют подобные асимптотики (см. [4]).

Таким образом, используя асимптотики интегралов и их монотонность как функции переменной z , получим доказательство утверждений предложения 5.

Список литературы

- [1] Гочев И. Г. // ТМФ. 1973. Т. 15. №1. С. 120–126.
- [2] Ташпулатов С. М. // ДАН РУз. 1994. №1. С. 7–10.
- [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [4] Наймарк М. А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
- [5] Федорюк М. В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

“Кибернетика” АН РУз

Поступила в редакцию
27.XII.1994 г.,
после доработки
16.XI.1995 г.

S. M. Tashpulatov

TWO-MAGNON SYSTEMS IN THE ONE-DIMENSIONAL NON-HEISENBERG FERROMAGNET WITH NEAREST NEIGHBOURS AND SECOND NEAREST NEIGHBOURS INTERACTION WITH SPIN VALUE $s = 1$

Two-magnon systems in the one-dimensional non-Heisenberg ferromagnet with nearest neighbours and second nearest neighbours interactions with a spin value $s = 1$ are considered. It is shown that under $\Lambda = \pi$ and $\Lambda = 0$ the system has no more than two, and under $\Lambda = \pi/2$ no more than six two-magnon bound states respectively.