Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. К. Мурзахметов, А. В. Чижов, Фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 320–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:25:10

Б. К. Мурзахметов, А. В. Чижов

ФАЗОВЫЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНО-АМПЛИТУДНЫХ СЖАТЫХ СОСТОЯНИЙ

Исследованы фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний электромагнитного поля, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга. Проведено сравнение фазовых распределений, полученных с использованием двух подходов к описанию фазы квантованного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особое внимание в квантовой оптике было уделено классу состояний электромагнитного поля, называемых сжатыми. Эти состояния проявляют уменьшенные флуктуации в одной из квадратур поля при соответствующем их увеличении в другой квадратуре (для обзора свойств сжатых состояний света см. специальные выпуски двух оптических журналов [1], посвященные этой теме).

Рассматривая корреляционные функции высших порядков для амплитуды поля, можно определить эффекты сжатия высших порядков. Согласно Хонгу и Манделю состояние является сжатым порядка $2N$, если для этого состояния момент порядка $2N$ квадратуры поля меньше, чем соответствующий момент для когерентного состояния [2]. Такой тип сжатия был найден этими авторами в ряде оптических процессов. Иной подход к понятию сжатия высших порядков был применен Браунштейном и Маклахланом [3]. Для определения обобщенных сжатых состояний они использовали аналоги высших порядков оператора сжатия. Изучение Q -представлений этих состояний выявило их весьма необычные статистические свойства.

Другое определение сжатия высших порядков в терминах действительной и мнимой частей квадрата и более высоких степеней амплитуды поля было предложено Хиллери [4]. Им было показано, что квадратично-амплитудное сжатие естественным образом возникает в процессе генерации второй гармоники [5]. В работе [6] получены общие решения для квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга, и исследованы их статистические свойства.

В последние годы в квантовой оптике интенсивно исследовались вопросы определения оператора фазы и описания фазовых свойств различных неклассических состояний электромагнитного поля [7, 8]. Изучение квантовых свойств состояний поля с точки

зрения фазовой картины дополняет статистические методы исследования этих состояний.

Целью данной работы является изучение фазовых свойств квадратично-амплитудных сжатых состояний с минимальной неопределенностью. Мы проведем для этих состояний сравнение фазового распределения, основанного на формализме эрмитова оператора фазы Пегга–Барнетта, с фазовыми распределениями, полученными методом интегрирования функций распределения квазивероятности по радиальной переменной.

2. СОСТОЯНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-АМПЛИТУДНОГО СЖАТИЯ

Квадратично-амплитудное сжатие описывается в терминах действительной и мнимой частей квадрата амплитуды поля. Эти величины соответствуют квадратурным операторам

$$\hat{Y}_1 = (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)/2, \quad (1)$$

$$\hat{Y}_2 = i(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)/2, \quad (2)$$

удовлетворяющим соотношению неопределенности Гейзенберга [4]

$$\Delta \hat{Y}_1 \Delta \hat{Y}_2 \geq \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (3)$$

где $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger} \hat{a}$ — число фотонов. Состояние называется сжатым по квадрату амплитуды в направлении Y_1 , если

$$(\Delta \hat{Y}_1)^2 < \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4)$$

Состояния, которые минимизируют соотношение неопределенности (3), называются квадратично-амплитудными сжатыми состояниями с минимальной неопределенностью. Разложение этих состояний по базису фоковских состояний может быть представлено в виде

$$|\lambda, \beta\rangle = \sum_n b_n |n\rangle, \quad (5)$$

где коэффициенты b_n определяются следующими рекуррентными соотношениями [6]:

$$b_{n+4} = b_{n+2} \frac{2\beta}{(\lambda+1)\sqrt{(n+4)(n+3)}} + b_n \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)}},$$

$$b_2 = \sqrt{2} \frac{\beta}{\lambda+1} b_0, \quad b_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta}{\lambda+1} b_1, \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq |\beta| < \infty, \quad (6)$$

с условием нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = 1. \quad (7)$$

Из соотношений (6) можно видеть, что коэффициенты b_n разбиваются на две последовательности коэффициентов с четными и нечетными индексами. Поэтому в зависимости

от выбора последовательности коэффициентов мы можем определить два типа состояний — четные и нечетные квадратично-амплитудные сжатые состояния.

Определим теперь функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний. Нас прежде всего будут интересовать Q -функция и функция Вигнера, которые получаются с помощью преобразования Фурье соответственно нормально и симметрично упорядоченных характеристических функций. Эти функции широко применяются в квантовой оптике при описании свойств неклассических состояний света [9]. Используя представление в фоковском базисе (5), Q -функцию можно записать в следующем виде:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \lambda, \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2. \quad (8)$$

Функцию Вигнера можно определить так [9]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(2\alpha) \exp(i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \}, \quad (9)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности рассматриваемого состояния поля, $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ — оператор смещения. Через коэффициенты разложения b_n функция Вигнера представляется в виде

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(|2\alpha|^2) (b_n)^2 + 2 \sum_{n>m=0}^{\infty} \left(\frac{m!}{n!} \right)^{1/2} (-1)^m (2\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(|2\alpha|^2) b_n b_m \right\}. \quad (10)$$

Как Q -функция, так и функция Вигнера для квадратично-амплитудных сжатых состояний имеют существенные отличия в поведении в случаях, когда параметр β равен и не равен нулю. В случае $\beta = 0$ эти функции проявляют четырехкратную симметрию, тогда как в случае $\beta \neq 0$ симметрия этих функций становится двухкратной [6]. Отметим, что по своему определению (8) Q -функция является неотрицательной на всей фазовой плоскости, в то время как функция Вигнера может принимать и отрицательные значения. Как будет показано в дальнейшем, это может приводить к проблемам в определении соответствующего фазового распределения квазивероятности.

В заключение этого раздела отметим, что третья из функций распределения квазивероятности, $\mathcal{P}$ -функция Глаубера–Сударшана, соответствующая антисимметрично упорядоченной характеристической функции, для неклассических состояний является сильно сингулярной [10]. Поэтому в данной работе, в которой речь идет о квадратично-амплитудных сжатых состояниях, являющихся неклассическими, $\mathcal{P}$ -функцию нельзя использовать для описания фазовых свойств этих состояний в рамках подхода функций распределения квазивероятности.

3. ФАЗОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Проблема квантового описания фазы оптических полей явилась предметом всестороннего изучения в последние годы [7, 8]. Это связано с трудностью в построении линейного эрмитова оператора фазы. За последнее время понятие фазовых переменных в

квантовых системах значительно прояснилось. Пегг и Барнетт [11–13] показали, как такой оператор можно определить для квантованных электромагнитных полей в гильбертовом пространстве сколь угодно большой, но конечной размерности. Этот новый формализм дает возможность описывать квантовые свойства оптической фазы на основе эрмитова оператора фазы и его собственных состояний.

Принципиально иной подход к описанию фазы квантованного поля, широко применявшийся в квантовой оптике [14–17], основан на использовании функций распределения квазивероятности, таких как $\mathcal{P}$ -функция Глаубера–Сударшана, Q -функция и функция Вигнера. Эти функции зависят от комплексного собственного значения α оператора уничтожения фотона, которое может быть представлено в терминах радиальной переменной $|\alpha|$ и фазы θ . Если проинтегрировать данные функции по радиальной переменной, то можно получить распределения, которые являются периодическими по фазовому углу (с периодом 2π) и для большинства состояний удовлетворяют всем требованиям, налагаемым на действительные фазовые распределения [15, 16]. Такой подход носит не только формальный математический характер, но, как показали Фрейбергер, Фогель и Шлейх, имеет также и физическое обоснование. Рассматривая 8-портовую схему гомотинного детектирования, использованную в эксперименте группы Манделя [18], они сделали вывод, что моменты фазовых операторов, определяемых в этом эксперименте, непосредственным образом связаны с проинтегрированными по радиальной переменной функцией Вигнера и Q -функцией [19, 20].

Зная разложение квадратично-амплитудных сжатых состояний по базису фоковских состояний (5), для описания фазовых свойств этих состояний мы можем применить фазовое распределение Пегга–Барнетта [11–13]:

$$P^{(PB)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] \right\}, \quad (11)$$

где b_n определяются соотношениями (6), а областью определения функции фазового распределения (фазовым окном) является отрезок от $-\pi$ до π . В правой части соотношения (11) слагаемое $1/2\pi$ представляет собой равномерное распределение фазы, тогда как остальные слагаемые, объединенные в бесконечную сумму, отвечают за неравномерность в фазовом распределении $P^{(PB)}(\theta)$.

Как было показано нами ранее [21–23], фазовые распределения, связанные с Q -функцией и функцией Вигнера, могут быть выражены одной аналитической формулой следующего вида:

$$P^{(S)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(S)}(n, k) \right\}, \quad (12)$$

где коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$, соответствующие рассматриваемым распределениям, имеют вид:

- а) для распределения $P^{(Q)}(\theta) = \int_0^\infty Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha|$, полученного интегрированием Q -функции по радиальной переменной [24],

$$G^{(Q)}(n, k) = \frac{\Gamma[(n+k)/2 + 1]}{\sqrt{n! k!}}, \quad (13)$$

- б) для распределения $P^{(W)}(\theta) = \int_0^\infty W(\alpha) |\alpha| d|\alpha|$, полученного интегрированием функции Вигнера по радиальной переменной [21],

$$G^{(W)}(n, k) = \sum_{m=0}^p (-1)^{p-m} 2^{(|n-k|+2m)/2} \times \\ \times \sqrt{\binom{p}{m} \binom{q}{p-m}} G^{(Q)}(m, |n-k| + m), \quad (14)$$

где $p = \min(n, k)$, $q = \max(n, k)$. Заметим, что соотношение (12) можно рассматривать как общее для всех трех распределений, если считать коэффициенты $G^{(PB)}(n, k) \equiv 1$. Из формул (13) и (14) следуют важные свойства коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$ и $G^{(W)}(n, k)$ с индексами $n > k$: для всех таких индексов $G^{(Q)}(n, k) < 1$, в то время как коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ принимают значения как меньше, так и больше единицы, причем $G^{(W)}(n, k) < 1$ для нечетных индексов n и k и $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов.

Рис. 1. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (пунктирная линия) и $P^{(Q)}(\theta)$ (штриховая линия) в полярных координатах (по оси $X - P^{(S)}(\theta) \cos \theta$, по оси $Y - P^{(S)}(\theta) \sin \theta$) для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и $\beta = 0$ (а), $\beta = 1$ (б).

Графики всех трех фазовых распределений, полученные с помощью соотношений (11)–(14), для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний при различных значениях λ и β представлены на рис. 1, а для нечетных состояний – на рис. 2. Мы видим, что в случае, когда параметр β равен нулю, фазовые распределения имеют четырехлепестковую форму. Для значений β , не равных нулю, все три распределения имеют двухлепестковую структуру. Такое поведение согласуется с симметрией функций распределения квазивероятности. Можно также заметить, что фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является самым узким из трех распределений для четных состояний (рис. 1), тогда как для нечетных состояний самым узким является распределение Пегга–Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ (рис. 2). Далее, отметим, что фазовое распределение $P^{(Q)}(\theta)$ является самым широким из рассматриваемых распределений для обоих типов состояний. Такой вид фазовых распределений можно объяснить с помощью соотношений (11)–(14). Отметим, что коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ играют роль весовых множителей в суммировании бесконечного ряда в (12), что может рассматриваться как некая

Рис. 2. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (пунктирная линия) и $P^{(Q)}(\theta)$ (штриховая линия) в полярных координатах (по оси $X - P^{(S)}(\theta) \cos \theta$, по оси $Y - P^{(S)}(\theta) \sin \theta$) для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и $\beta = 0$ (а), $\beta = 1$ (б).

процедура “усреднения” фазового распределения Пегга–Барнетта (11). В случае четных квадратично-амплитудных сжатых состояний суммирование (12) ведется только по четным индексам n и k . Так как коэффициенты $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов, то процедура “усреднения” приводит к более резкому фазовому распределению Вигнера, чем распределение Пегга–Барнетта. В случае же нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний, когда суммирование в (12) ведется по нечетным индексам, коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, и процедура “усреднения” приводит к уширению фазового распределения Вигнера. Что касается фазового распределения $P^{(Q)}(\theta)$, то, в силу того что коэффициенты $G^{(Q)}(n, k) < 1$ для всех значений индексов n и k , процедура “усреднения” приводит к уширению этого распределения по сравнению с распределением Пегга–Барнетта как для четных, так и для нечетных состояний. Это согласуется с тем, что Q -функция связана с одновременным измерением двух некоммутирующих наблюдаемых – процессом, неизбежно сопровождающимся дополнительным шумом [15].

Как мы уже отмечали выше, тот факт, что функция Вигнера не является положительно-определенной, может приводить к появлению в соответствующем фазовом распределении отрицательных значений. Такое свойство в поведении фазового распределения Вигнера было отмечено в работе [25] для суперпозиции когерентных и фоковских состояний. Другим примером являются рассматриваемые в данной работе четные квадратично-амплитудные сжатые состояния. На рис. 3 представлено фазовое распределение Вигнера для этих состояний при различных значениях параметра β . Мы видим, что при некоторых значениях фазовой переменной это распределение становится отрицательным. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера является положительно-определенным и где это распределение может принимать отрицательные значения, показаны на рис. 4. В тех случаях, когда существует область изменения параметров, где фазовое распределение становится отрицательным, мы уже не можем гово-

Рис. 3. Фазовые распределения $P^{(W)}(\theta)$ для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и $\beta = 1$ (1), $\beta = 3$ (2), $\beta = 5$ (3).

речь о таком распределении как об истинном фазовом распределении, которое по определению должно быть неотрицательным для всех значений фазовой переменной. Следовательно, фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний может быть определено только в ограниченной области изменения параметров состояния. Отметим, что для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является всегда положительно-определенным. Этот факт может быть объяснен опять с точки зрения процедуры “усреднения”. Для нечетных состояний коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, поэтому умножение недиагональных членов суммы в соотношении (12) на эти коэффициенты приводит к распределению, уширенному по сравнению с распределением Пегга–Барнетта, которое по определению является всюду неотрицательным.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга. Было проведено сравнение фазового распределения Пегга–Барнетта с фазовыми распределениями $P^{(W)}(\theta)$ и $P^{(Q)}(\theta)$, получаемыми путем интегрирования соответственно функции Вигнера и Q -функции по радиальной переменной. Мы показали, что все три фазовые распределения имеют двухпестковую форму при не равном нулю параметре β , а в случае, когда β равно нулю, указанные фазовые распределения

Рис. 4. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является положительно определенным (P) и где оно может принимать отрицательные значения (N).

обладают четырехлепестковой структурой. Отмеченное обстоятельство согласуется с симметрией функции Вигнера и Q -функции для этих состояний. Фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний является положительно-определенным только в ограниченной области изменения параметров состояний. Вне этой области оно может принимать отрицательные значения. Однако в случае нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является неотрицательным при любых значениях параметров состояния.

В заключение авторы выражают благодарность проф. М. Хиллери за обсуждение результатов и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант № RFD000.

Список литературы

- [1] Special issues // J. Opt. Soc. Am. 1987. V. B4. №10; J. Mod. Opt. 1987. V. 34. №6/7.
- [2] Hong C.K., Mandel L. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 323; Phys. Rev. 1985. V. A32. P. 974.
- [3] Braunstein S.L., McLachlan R.I. // Phys. Rev. 1987. V. A35. P. 1659.
- [4] Hillery M. // Opt. Commun. 1987. V. 62. P. 135.
- [5] Hillery M. // Phys. Rev. 1987. V. A36. P. 3796.
- [6] Yu D., Hillery M. // Quantum Optics. 1994. V. 6. P. 37.
- [7] Sun. S.B. // Physica Scripta. 1993. V. 48. №4. P. 393.
- [8] Carruthers P., Nieto M.M. // Rev. Mod. Phys. 1968. V. 40. P. 411; Barnett S.M., Pegg D.T. // J. Phys. 1986. V. A19. P. 3849.
- [9] Cahill K.E., Glauber R.J. // Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 1857; P. 1883.
- [10] Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. С. 212.
- [11] Pegg D.T., Barnett S.M. // Europhys. Lett. 1988. V. 6. P. 483.

- [12] *Barnett S.M., Pegg D.T.* // J. Mod. Opt. 1989. V. 36. P. 7.
- [13] *Pegg D.T., Barnett S.M.* // Phys. Rev. 1989. V. A39. P. 1665.
- [14] *Bandilla A., Paul H.* // Ann. Phys. (Leipzig). 1969. V. 23. P. 323.
- [15] *Braunstein S.L., Caves C.M.* // Phys. Rev. 1990. V. A42. P. 4115.
- [16] *Schleich W., Horowicz R.J., Varro S.* // Phys. Rev. 1989. V. A40. P. 7405.
- [17] *Schleich W., Bandilla A., Paul H.* // Phys. Rev. 1992. V. A45. P. 6652.
- [18] *Noh J.W., Fougères A., Mandel L.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1426; Phys. Rev. 1992. V. A45. P. 424; V. A46. P. 2840.
- [19] *Freiberger M., Schleich W.P.* // Phys. Rev. 1993. V. A47. P. R30.
- [20] *Freiberger M., Vogel K., Schleich W.P.* // Phys. Lett. 1993. V. A176. P. 41.
- [21] *Tanaś R., Murzakhmetov B.K., Gantsog Ts., Chizhov A.V.* // Quantum Optics. 1992. V. 4. P. 1.
- [22] *Chizhov A.V., Gantsog Ts., Murzakhmetov B.K.* // Quantum Optics. 1993. V. 5. P. 85.
- [23] *Chizhov A.V., Murzakhmetov B.K.* // Phys. Lett. 1993. V. A176. P. 33.
- [24] *Tanaś R., Gantsog Ts.* // Phys. Rev. 1992. V. A45. P. 5031.
- [25] *Garraway B.M., Knight P.L.* // Phys. Rev. 1992. V. A46. P. R5346; Physica Scripta. 1993. V. 48. P. 66.

Институт ядерной физики
 Национальный ядерный центр Казахстана
 Объединенный институт ядерных исследований
 Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова

Поступила в редакцию
 30.VIII.1995 г.

B. K. Murzakhmetov, A. V. Chizhov

PHASE PROPERTIES OF THE AMPLITUDE-SQUARED SQUEEZED STATES

Phase properties of the minimum uncertainty states for amplitude-squared squeezing have been investigated. A comparison of the phase distributions obtained with the help of two approaches for the description of the phase of the electromagnetic field has done.