Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Павлов, Теоретико-полевой подход к динамике сплошной среды: теория возмущений, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 113–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:39:59

© 2004 г.

В. П. Павлов*

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ДИНАМИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ: ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В работе предлагается теория возмущений, позволяющая в рамках линейной теории упругости решить уравнения движения для вектора деформации в теле Земли. Показано, что тектонические процессы определяются главным образом приливными воздействиями. Дан анализ приливных эффектов в системе Земля–Луна–Солнце.

Ключевые слова: теория возмущений, деформации, напряжения, приливные эффекты, тектоника.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамику сплошной среды описывают уравнения движения для вектора деформации. Это система зацепляющихся уравнений в частных производных второго порядка (см. ниже уравнение (30)), в которой компоненты вектора деформации входят во все уравнения. Найти решение таких уравнений в трехмерном случае не удастся даже для изотропной среды (см., например, [1]). Решения строятся в рамках каких-либо модельных предположений (плоская задача, зависимость только от одной координаты и т.п.).

В данной работе предлагается использовать для построения решений идеи и методы теории поля. Прежде всего, это представление вектора деформации в виде суммы градиента скалярной функции и ротора. Это позволяет “расцепить” систему уравнений для компонент вектора деформации. Далее вступает в игру стандартное для теории поля утверждение: скалярная функция может зависеть только от скалярных комбинаций динамических переменных задачи. В новых независимых переменных система значительно упрощается, и в простейших случаях можно найти ее решение в квадратурах.

Такой подход демонстрируется в работе на примере динамики тела Земли под внешним воздействием, прежде всего Луны и Солнца. Эта задача, важная с точки зрения геофизики, отличается тем, что все силы, кроме вызванных напряжениями, потенциальные: каждая из них есть произведение плотности на градиент соответствующего потенциала. Удобнее всего работать в системе координат, жестко связанной с вращающейся Землей. Тогда в число потенциалов входят гравитационный, центробежный, приливный, потенциал сил инерции, вызванных прецессией оси вращения Земли, и потенциал, связанный

* Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия. E-mail: pavlov@mi.ras.ru

с так называемым чандлеровским движением географического полюса. Они выстраиваются в иерархическую последовательность: если взять центробежный потенциал за единицу, то остальные имеют порядки 10^{-2} , $2 \cdot 10^{-7}$, 10^{-10} и 10^{-14} , соответственно. Опыт теории поля подсказывает, что в этой ситуации эффективна теория возмущений.

В главном (“нулевом”) порядке теории возмущений учитываются только гравитация и центробежные силы. Они не зависят от времени, и уравнения движения в этом порядке описывают свободные (собственные) колебания на фоне гравитации и центробежных сил. За счет вязкости эти колебания быстро затухнут, и уравнения движения станут условиями равновесия. В работе найдено точное решение этих условий равновесия. В частности, давление в точке внутри Земли оказывается интегралом от плотности по переменной, которая есть сумма потенциалов. Если взять экспериментальную зависимость плотности от глубины, эта формула дает общепринятую оценку давления в центре Земли. В работе делается важный для геофизики вывод, что в пренебрежении конвекцией и тепловыми потоками (а их эффект, как показывают опытные данные, на два порядка меньше даже приливных воздействий) никаких тектонических явлений в свободно вращающейся Земле не будет.

Таким образом, тектоника “появляется” только в следующем порядке теории возмущений, учитывающем зависящий от времени приливный потенциал. При этом общее решение неоднородных уравнений движения ищется в виде суммы частного решения неоднородных, в котором вектор деформации есть чистый градиент, и общего решения однородных уравнений. При учете вязкости последние сводятся к условиям равновесия нулевого порядка. В реальной ситуации (плотность зависит от глубины) частное решение не удастся найти в квадратурах, и необходим численный счет.

Попытки оценить влияние приливных воздействий (и иных, связанных с внешними факторами) на внутреннее состояние Земли предпринимались неоднократно (см., например, монографии Стейси [2], Мельхиора [3] и Авсюка [4]). Все они опираются на линейную теорию упругости и по традиции используют разложение приливного потенциала на сферические гармоники. Результаты расчетов представлены в терминах, порожденных предложенным еще Лапласом разбиением приливных эффектов на волны трех различных типов (для удобства сравнения теории с наблюдениями). Стремление улучшить совпадение теоретических формул с результатами наблюдений породило массу полуэмпирических поправок, контроль над которыми затруднен еще и вследствие значительного разнобоя в обозначениях.

Поэтому в приложении предпринят анализ приливных сил в реальной ситуации – при совместном приливном воздействии на Землю протяженных Луны и Солнца. Показано, что отличие задачи трех тел от двух “независимых” задач двух тел имеет порядок $2 \cdot 10^{-5}$ по отношению к потенциалу Лапласа, и прежде чем учитывать это отличие, следует учесть пару поправочных членов к нему, параметр разложения для которых есть $1/60$.

2. ИЕРАРХИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Мы будем работать в системе декартовых координат, жестко связанной с вращающейся Землей и с началом координат в центре тяжести Земли. Все силы, кроме вы-

званных напряжениями в теле Земли, потенциальные: каждая из них есть произведение плотности элемента на его ускорение – градиент соответствующего потенциала. При этом все потенциалы выстраиваются в иерархическую убывающую последовательность, что делает естественным применение теории возмущений.

Перечислим эти потенциалы. Прежде всего, это гравитационный потенциал φ_{gr} , который в хорошем приближении (см. ниже) можно взять в виде потенциала однородного сплюснутого эллипсоида вращения. Формулу для него удобно выписать в сумме с центробежным потенциалом

$$\varphi_{\text{cf}} = \frac{1}{2}(\Omega^2 r^2 - (\underline{\Omega} \underline{r})^2), \quad (1)$$

где $\underline{\Omega}$ и $\underline{r}$ – вектор угловой скорости вращения Земли и радиус-вектор элемента, $\Omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ и r – их модули.

Сумма гравитационного и центробежного потенциалов имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} = \varphi_{\text{gr}} + \varphi_{\text{cf}} = \frac{1}{2}A \left(-3R^2 + r^2 \left(1 - \frac{3}{5}\varepsilon - \frac{1}{15}\varepsilon^2 \right) + \right. \\ \left. + \tau^2 \varepsilon \left(1 + \frac{1}{5}\varepsilon \right) \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь скалярная переменная $\tau = (\underline{\Omega} \underline{r})/\Omega$ имеет размерность радиуса, константа $A = 4\pi\rho\gamma/3$, параметр $\varepsilon = 15\Omega^2/(8\pi\rho\gamma) \approx 0.95 \cdot 10^{-2}$, $\rho \approx 5 \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ – средняя плотность Земли, $\gamma \approx 6.7 \cdot 10^{-8} \text{см}^3 \text{г}^{-1} \text{с}^{-2}$ – ньютоновская постоянная, $R \approx 6.4 \cdot 10^8 \text{см}$ – полярный радиус Земли. При $\varepsilon = 0$ выражение (2) переходит в гравитационный потенциал однородного шара $\xi^0 = A(-3R^2 + r^2)/2$ внутри него. Мы выписали три члена разложения потенциала $\xi^{(1)}$ по малому параметру ε (с ним связана сплюснутость эллипсоида), чтобы показать, что хотя центробежный потенциал $\varphi_{\text{cf}} = A\varepsilon(r^2 - \tau^2)/5$ просто пропорционален ε , поправки к потенциалу однородного шара – ряд по степеням ε . В дальнейшем мы ограничимся линейными по ε членами в разложении $\xi^{(1)}$.

Сумма гравитационного и центробежного потенциалов статическая: она не зависит от времени. Зависимость от времени первый раз появляется в иерархии потенциалов в потенциале приливных сил; в первом приближении он является лапласовым потенциалом

$$\varphi_{\text{tid}} = \gamma m_* \frac{r^2 R_*^2 - 3(\underline{r} \underline{R}_*)^2}{2R_*^5} = \frac{\gamma m_*}{2R_*^3} (r^2 - 3\eta^2), \quad (3)$$

где введена новая скалярная переменная $\eta = (\underline{R}_* \underline{r})/R_*$ с размерностью радиуса, m_* и R_* – масса и радиус-вектор, например, Луны в нашей системе координат. Это первый член разложения точной формулы по параметру $R/R_* \approx 1/60$ (см. приложение). Здесь от времени зависит радиус-вектор Луны. Для наших целей можно пренебречь эллиптичностью орбиты Луны и считать модуль R_* постоянным.

Следующий потенциал – потенциал сил инерции, связанных с прецессией оси вращения Земли (около $50''$ в год). Она описывается добавкой к вектору угловой скорости $\underline{\Omega}$ перпендикулярного к плоскости эклиптики вектора длиной $\omega \approx 1.2 \cdot 10^{-12} \text{с}^{-1}$. В первом

приближении по малому параметру $\omega/\Omega \approx 1.6 \cdot 10^{-8}$ этот потенциал имеет вид

$$\varphi_{\text{pr}} = ((\underline{\Omega\omega})r^2 - (\underline{\omega r})(\underline{\Omega r})) = \omega\Omega(r^2 \cos \delta - \tau\tau_1), \quad (4)$$

где появился новый скалярный аргумент $\tau_1 = \underline{\omega r}/\omega$, а $\pi/2 - \delta$ – угол наклона оси вращения Земли к эклиптике.

Наконец, в соответствии с гипотезой Авсюка [5] внутреннее твердое ядро Земли способно перемещаться в плоскости эклиптики внутри жидкого внешнего ядра под влиянием сил притяжения Луны и Солнца (это одна из интерпретаций наблюдаемого чандлерова перемещения географического полюса). Потенциал соответствующих сил инерции выражается формулой

$$\varphi_{\text{ch}} = (\underline{r\ddot{x}}), \quad (5)$$

где $\underline{x}(t)$ – вектор смещения центра тяжести Земли, обусловленного перемещением более тяжелого твердого ядра. Как и в нашей работе [6], возьмем для $\underline{x}(t)$ приближение

$$\underline{x}(t) = y(\sin \gamma)^{-1} \{(\cos \nu t - 1), \sin \nu t, \cos \gamma\}, \quad (6)$$

где $\cos \gamma = \sin \delta \cos \varpi t$, ν – частота моды чандлерова перемещения с максимальной амплитудой $y \approx 10$ м, $\varpi \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца. В этом приближении

$$(\underline{r\ddot{x}}) = ry \frac{d^2}{dt^2} ((\sin \gamma)^{-1} (\cos \nu t \cos \gamma + \cos \gamma \sin \theta)) = ry \varpi^2 f(\theta, t), \quad (7)$$

где θ – географическая широта элемента Земли [6].

Иерархия всех этих потенциалов становится очевидной, если в их сумме выделить множитель $A/2$:

$$\begin{aligned} \xi = \varphi_{\text{gr}} + \varphi_{\text{cf}} + \varphi_{\text{tid}} + \varphi_{\text{pr}} + \varphi_{\text{ch}} = \frac{1}{2} A \left(-3R^2 + r^2 + \varepsilon \left(-\frac{3}{5} r^2 + \tau^2 \right) + \right. \\ \left. + \zeta(r^2 - 3\eta^2) + \varepsilon_1(r^2 \cos \delta - \tau\tau_1) + \chi ry f(\theta, t) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где введены новые малые параметры $\zeta = 9m_*/(4\pi\rho R_*^3) \approx 1.8 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_1 = 3\omega\Omega/(2\pi\rho\gamma) \approx 1.2 \cdot 10^{-10}$, $\chi = 3\varpi^2/(2\pi\rho\gamma) \approx 0.57 \cdot 10^{-7}$ (поскольку в последнем, чандлеровском, члене вместо r^2 стоит ry , эффективным параметром при нем будет не χ , а произведение $\tilde{\chi} = \chi y/R \approx 0.9 \cdot 10^{-14}$). Отметим, что зависимость от времени имеется только в приливной и чандлеровской компонентах суммарного потенциала.

Ясно теперь, что в главном приближении достаточно оставить гравитационную и центробежную компоненты, а для учета нестационарности достаточно добавить к ним приливную компоненту. Прецессионная и чандлеровская же компоненты пренебрежимо малы.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В жестко связанной с вращающейся Землей системе координат в стационарной ситуации (когда действующие силы не зависят от времени) любой элемент объема покоится. Очевидно, в этой ситуации мы должны учесть только гравитационные и центробежные силы, а также силы, вызванные напряжениями в Земле. Их учет мы проведем в рамках линейной теории упругости.

Будем действовать в духе теории возмущений, включая в рассмотрение новые компоненты потенциала как поправки к предыдущему приближению. Рассмотрим сначала простейший случай, когда Земля не вращается ($\varepsilon = 0$). Вопрос о напряжениях в Земле сводится тогда к задаче о гравитирующем шаре. Мы будем считать, что все процессы, в результате которых образовалась Земля, давно прошли; естественно полагать, что имеется центральная симметрия и плотность зависит только от r . Тогда вектор деформации $\underline{u}$ обязан быть параллельным $\underline{r}$:

$$u_i = \frac{r_i}{r} \tilde{u}(r) = \frac{\partial}{\partial r_i} u(r), \quad (9)$$

где $u(r)$ – некоторая скалярная функция, зависящая от скаляра – модуля радиус-вектора. Тензор деформации имеет тогда вид

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r_i \partial r_k} = \frac{\delta_{ik} r^2 - r_i r_k}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{r_i r_k}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (10)$$

Тензор напряжений в линейной теории упругости выражается через него по закону Гука:

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik} p + \sigma'_{ik} = \delta_{ik} K \frac{\partial^2 u}{\partial r_j^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r_j \partial r_k} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right), \quad (11)$$

здесь p – давление, K и μ – модули всестороннего сжатия и сдвига, σ'_{ik} – сдвиговая часть тензора напряжений (девиатор). Мы видим, что даже в этом простейшем случае сдвиговые напряжения есть; однако, поскольку ситуация стационарная и деформации постоянны, никаких процессов (типа тектонических) не происходит.

Учтем теперь вращение Земли. В этом случае градиент потенциала (ускорение) уже не направлен вдоль $\underline{r}$, а имеет и (малую) компоненту вдоль $\underline{\Omega}$:

$$\xi_i^{(1)} = \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r_i} = A \left(\frac{r_i}{r} \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon \right) r + \varepsilon \frac{\Omega_i}{\Omega} \tau \right). \quad (12)$$

Естественно полагать, что вектор деформации также приобретет такую компоненту, и общий вид его может быть представлен как градиент новой скалярной функции $u(r, \tilde{\tau})$ плюс ротор $\tilde{u}_i$ некоторого вектора:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial r_i} u(r, \tilde{\tau}) + \varepsilon \tilde{u}_i = \frac{r_i}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon \frac{\Omega_i}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\tau}} + \varepsilon \tilde{u}_i, \quad \tilde{\tau} = \varepsilon \tau, \quad \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial r_i} = 0 \quad (13)$$

(мы сохранили для скалярной функции прежнее обозначение u , различие в числе аргументов предохранит от путаницы, а также ввели множитель ε перед вторым аргументом

новой скалярной функции и ротором в знак того, что компонента вектора деформации вдоль $\underline{\Omega}$, так же как и соответствующая компонента ускорения, мала, а ротор появляется только за счет учета вращения Земли). Теперь тензор деформаций примет вид

$$u_{ik} = \frac{\delta_{ik}r^2 - r_i r_k}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{r_i r_k}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \varepsilon \left(\frac{\Omega_i r_k + \Omega_k r_i}{\Omega r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \tilde{\tau}} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial r_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial r_i} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

а в его след (пропорциональный давлению) ротор не даст вклада:

$$u_{jj} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u + \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \tilde{\tau}}. \quad (15)$$

Условие равновесия элемента коры во вращающейся системе отсчета (σ – коэффициент Пуассона) имеет вид

$$(1 - 2\sigma)\Delta u + \nabla(\nabla u) = -\frac{2}{3K}(1 + \sigma)\rho \nabla \xi^{(1)}. \quad (16)$$

Общее решение этого линейного неоднородного уравнения есть частное решение неоднородного плюс общее решение однородного. Введем естественные обозначения u_{ijk} для третьей производной функции u по радиус-вектору $\underline{r}$ и будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде чистого градиента. Тогда это уравнение примет более простой вид

$$u_{ikk} = -\frac{1}{3K} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \rho \xi_i^{(1)}, \quad (17)$$

причем плотность теперь также естественно считать функцией r и τ . Вычисляя градиент выражения (15) и оставляя члены первого порядка по ε , имеем

$$\frac{r_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u + \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \tilde{\tau}} \right) + \varepsilon \frac{\Omega_i}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u \right) = -\frac{B}{K} \varrho \left(\frac{r_i}{r} \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon \right) + \varepsilon \frac{\Omega_i}{\Omega} \tau \right), \quad (18)$$

где мы ввели новую константу

$$B = \frac{1}{3} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} A.$$

Заметим, что дифференцируемые выражения в двух скобках в левой части уравнения (18) суть не что иное, как след тензора деформаций, взятый соответственно с точностью до первого порядка по ε и в нулевом порядке по ε ввиду дополнительного множителя ε перед второй скобкой. Поэтому, учитывая связь этого следа с давлением (см. закон Гука (11)) и приравняв комбинации множителей при двух независимых единичных векторах, получим систему уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial r} = B \rho \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = B \rho \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \tau}. \quad (19)$$

Условие совместности этой системы (равенство смешанных вторых производных давления, вычисленных по первому и второму уравнениям) приводит к линейному дифференциальному уравнению для плотности

$$\frac{1}{\partial \xi^{(1)} / \partial r} \frac{\partial \varrho}{\partial r} - \frac{1}{\partial \xi^{(1)} / \partial \tau} \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = 0. \quad (20)$$

Решением этого уравнения является первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{r} = \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r} \right)^{-1}, \quad \dot{\tau} = - \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \tau} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Он имеет вид произвольной функции $\varrho(\xi^{(1)})$. Пусть $\xi_0^{(1)}$ – значение суммы гравитационного и центробежного потенциалов на поверхности Земли. Поскольку условие $\xi^{(1)} = \xi_0^{(1)}$ в соответствии с параметрами этой суммы потенциалов описывает поверхность Земли, граничное условие для интегрирования уравнений (19) для давления (давление на поверхности Земли равно нулю; ниже мы увидим, что общее решение однородного уравнения не даст вклада в давление) ставится совершенно естественно, и мы имеем

$$p = p(\xi^{(1)}) = -B \int_{\xi^{(1)}}^{\xi_0^{(1)}} d\xi^{(1)} \varrho(\xi^{(1)}). \quad (22)$$

Заметим, что, в отличие от работы [6], этот результат получен сейчас в общем случае, без пренебрежения сдвиговыми деформациями.

Функцию $u(r, \tilde{\tau})$ и градиентную компоненту вектора деформации вычислим позднее. Сейчас же займемся общим решением $u_i^0 = \partial u^0 / \partial r_i + \varepsilon \tilde{u}_i$ однородного уравнения. Поскольку $\tilde{u}_i$ – чистый ротор, он не даст вклада во второй член левой части уравнения (16), и мы получим

$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} u_{ikk}^0 + \varepsilon \Delta \tilde{u}_i = 0. \quad (23)$$

Взятие дивергенции этого уравнения дает уравнение Лапласа $\Delta u_{kk}^0 = 0$ для вклада в давление от общего решения однородного уравнения. Граничным условием для него будет требование $u_{kk}^0 = 0$ на поверхности Земли, поскольку для вклада в давление от неоднородного уравнения такое граничное условие выполнено автоматически. Тогда из теоремы о максимуме и минимуме гармонической функции следует, что $u_{kk}^0 = 0$ всюду. Таким образом, из уравнения (23) следует, что ротор $\tilde{u}_i$ – гармоническая вектор-функция. Граничным условием соответствующего уравнения Лапласа будет требование

$$(\tilde{\sigma}_{ik} + \sigma_{ik}) \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r_k} = 0 \quad (24)$$

на поверхности Земли, где $\tilde{\sigma}_{ik}$ и σ_{ik} – вклады в тензор напряжений соответственно от однородного и неоднородного уравнений.

Вклад в сдвиговую часть тензора деформации (а следовательно, и в тензор напряжений) от неоднородного уравнения может быть восстановлен благодаря связи между следом тензора деформации и давлением. Действительно, след тензора деформации есть в нашей модели просто результат применения оператора Лапласа к функции $u(r, \tilde{\tau})$. Поэтому эта функция выражается интегралом Пуассона:

$$u(r, \tilde{\tau}) = -\frac{1}{K} \int d^3 r' \frac{p(r')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}. \quad (25)$$

Заметим, что в отличие от плотности и давления функция $u(r, \tilde{\tau})$, а вместе с ней и полный тензор деформаций, уже не являются сложными функциями одного только потенциала. В этом можно убедиться, перейдя в интеграле к цилиндрическим координатам $\{\tilde{r} = \sqrt{r^2 - \tau^2}, \phi, z = \tau\}$. Зависит от ϕ' только знаменатель (фактически $p(\underline{r}') = p(r', \tau')$)

$$|\underline{r} + \underline{r}'| = \left((\tilde{r} - \tilde{r}')^2 + (\tau - \tau')^2 + 4\tilde{r}\tilde{r}' \sin^2 \frac{\phi - \phi'}{2} \right)^{1/2}, \quad (26)$$

и интегрирование по углу ϕ' дает результат, не зависящий от ϕ :

$$\int d^3 r' \frac{p(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \int dr' d\tau' \frac{r'}{r} k \mathbf{K}(k) p(r', \tau'), \quad (27)$$

где $\mathbf{K}$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Его модуль k определяется соотношением

$$k^2 = \frac{4\tilde{r}\tilde{r}'}{(\tilde{r} + \tilde{r}')^2 + (\tau - \tau')^2}. \quad (28)$$

Поскольку производные полных эллиптических интегралов суть линейные их комбинации, вектор деформации, тензоры деформаций и напряжений выразятся как интегралы от таких линейных комбинаций. Все эти объекты в этом порядке теории возмущений не зависят от времени и, как и в центрально-симметричном случае, никаких процессов в Земле не происходит.

4. УЧЕТ ПРИЛИВНОЙ КОМПОНЕНТЫ

Сейчас впервые появляется зависимость от времени в учитываемых факторах воздействия на элемент объема Земли: от времени зависит радиус-вектор $\underline{R}_*$. Вместо условия равновесия (16) мы должны теперь рассматривать уравнение движения для вектора деформации

$$\rho \ddot{\underline{u}} = \frac{3K(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)} \Delta \underline{u} + \frac{3K}{2(1+\sigma)} \underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) + \varrho \underline{\nabla} \xi^{(2)}, \quad (29)$$

где новый полный потенциал $\xi^{(2)} = \xi^{(1)} + \varphi_{\text{tid}}$. В его градиенте кроме прежних векторных структур $\underline{e}_1 = \underline{r}/r$ и $\underline{m} = \underline{\Omega}/\Omega$ появится новая, $\underline{n} = \underline{R}_*/R_*$, с малым параметром ζ :

$$\underline{\xi}^{(2)} = A \left(\underline{e}_1 \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon + \zeta \right) r + \varepsilon \underline{m} \tau - 3\zeta \underline{n} \eta \right). \quad (30)$$

Естественно полагать, что такая же структура появится и в векторе деформации, так что общий вид его в новой ситуации представится формулой, обобщающей (13) (как и выше, это сумма градиента и ротора, причем частное решение неоднородного уравнения снова будем искать в виде чистого градиента):

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{\partial}{\partial \underline{r}} u(r, \tilde{\tau}, \tilde{\eta}, t) + \varepsilon \underline{u}^{(1)} + \zeta \underline{u}^{(2)} = \underline{e}_1 u_r + \varepsilon \underline{m} u_\tau + \zeta \underline{n} u_\eta + \varepsilon \underline{u}^{(1)} + \zeta \underline{u}^{(2)}, \\ \frac{\partial}{\partial r_i} (\varepsilon \underline{u}_i^{(1)} + \zeta \underline{u}_i^{(2)}) &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $u_r = \partial u / \partial r$, $u_\tau = \partial u / \partial \tilde{\tau}$, $u_\eta = \partial u / \partial \tilde{\eta}$. Тогда уравнение движения (29) примет для градиента вид волнового уравнения

$$c^{-2} \ddot{u}_i - \Delta u_i = c^{-2} \xi_i^{(2)}, \quad (32)$$

где

$$c^2 = \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \frac{3K}{\rho} = c_l^2.$$

Мы видим, что в задаче для градиентной составляющей вектора деформации фигурирует продольная скорость звука.

Анализ векторного уравнения (32) удобно проводить, введя не зависящий от времени ортонормированный репер. Вместо единичных векторов $\underline{e}_1$, $\underline{m}$, $\underline{n}$ введем

$$\underline{e}_1, \quad \underline{e}_2 = \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(\underline{m} - \underline{e}_1 \frac{\tau}{r}\right), \quad \underline{e}_3 = [\underline{e}_1, \underline{e}_2] = \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2}\right)^{-1/2} \frac{[\underline{r}, \underline{\Omega}]}{||[\underline{r}, \underline{\Omega}]||}. \quad (33)$$

Обратные формулы имеют вид

$$\underline{m} = \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2}\right)^{1/2} \underline{e}_2 + \frac{\tau}{r} \underline{e}_1, \quad \underline{n} = \alpha_a \underline{e}_a, \quad \alpha_a = \frac{(R_* \underline{e}_a)}{R_*} = \alpha_a(t). \quad (34)$$

При дифференцировании по времени следует учесть, что вектор деформации зависит от времени не только явно, но и через скалярную переменную η :

$$\frac{du}{dt} = \underline{e}_1 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \varepsilon \underline{m} \frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \zeta \dot{\underline{n}} u_\eta + \zeta \underline{n} \left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \zeta (\dot{\underline{n}} r) \frac{\partial u_\eta}{\partial \tilde{\eta}} \right). \quad (35)$$

Пренебрегая членами второго порядка по ζ , оставим в скобке только первый член. Аналогично

$$\frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} = \underline{e}_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \varepsilon \underline{m} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial t^2} + \zeta \left(\ddot{\underline{n}} u_\eta + 2 \dot{\underline{n}} \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \underline{n} \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} \right). \quad (36)$$

Далее, для градиентной части вектора деформации применение к нему оператора Лапласа эквивалентен взятию градиента от следа тензора деформации: $\Delta u_i = \nabla_i u_{kk}$, где

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \varepsilon \underline{m} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \zeta \underline{n} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}}, \quad (37)$$

$$u_{kk} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u + \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \tilde{\tau}} + \zeta \frac{\eta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \tilde{\eta}}. \quad (38)$$

Теперь, переходя от единичных векторов $\underline{e}_1$, $\underline{m}$, $\underline{n}$ к ортонормированному реперу $\underline{e}_a$ и оставляя только члены первого порядка по ε и ζ , получим из уравнения (32) систему

уравнений

$$c^{-2} \left\{ \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial t^2} + \zeta \left(\ddot{\alpha}_1 u_\eta + 2\dot{\alpha}_1 \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} \right) \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u + \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial u_\tau}{\partial r} + \zeta \alpha_1 \frac{\partial u_\eta}{\partial r} \right\} - \\ - \left\{ \varepsilon \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \zeta \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u = A c^{-2} \left\{ r \left(1 - \frac{3}{5} \varepsilon + \zeta \right) + \varepsilon \frac{\tau^2}{r} - 3\zeta \alpha_1 \eta \right\}, \quad (39)$$

$$c^{-2} \left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial t^2} + \zeta \left(\ddot{\alpha}_2 u_\eta + 2\dot{\alpha}_2 \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} \right) \right\} - \\ - \left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \zeta \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u = A c^{-2} \left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{\tau^2}{r^2} \right)^{1/2} \tau - 3\zeta \alpha_2 \eta \right\}, \quad (40)$$

$$c^{-2} \zeta \left(\ddot{\alpha}_3 u_\eta + 2\dot{\alpha}_3 \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} \right) - \zeta \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u = -A c^{-2} 3\zeta \alpha_3 \eta. \quad (41)$$

Нетрудно усмотреть, что члены нулевого и первого порядков по ε комбинируются в волновое уравнение для первых двух слагаемых $u_i^{0+\varepsilon}$ правой части разложения (31) для градиентной части вектора деформации

$$c^{-2} \ddot{u}_i^{0+\varepsilon} - \Delta u_i^{0+\varepsilon} = c^{-2} \xi_i^{0+\varepsilon} \quad (42)$$

с правой частью, не зависящей от времени. Это уравнение описывает собственные (свободные) колебания среды на фоне постоянных гравитационной и центробежной сил. Согласно экспериментальным данным их периоды имеют порядок 1 час и меньше. За счет диссипации (добротность Земли оценивается величиной 200–1000) эти колебания затухнут за несколько суток, зависимость от времени в соответствующих компонентах вектора деформации исчезнет, и мы приходим для них к уже исследованному выше условию равновесия вместо волнового уравнения.

Члены же порядка ζ комбинируются в волновое уравнение для третьего члена разложения (31) для градиентной части вектора деформации с зависящей от времени правой частью. Его решение значительно упрощается благодаря специфической структуре разложения вектора деформации по ортам репера. Прежде всего, можно исключить вторые частные производные по времени функции u_η , получив два уравнения

$$\frac{\ddot{\alpha}_3}{\alpha_3} u_\eta + 2 \frac{\dot{\alpha}_3}{\alpha_3} \dot{u}_\eta = \frac{\ddot{\alpha}_2}{\alpha_2} u_\eta + 2 \frac{\dot{\alpha}_2}{\alpha_2} \dot{u}_\eta = \frac{\ddot{\alpha}_1}{\alpha_1} u_\eta + 2 \frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} \dot{u}_\eta - c^2 \frac{\eta}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_\eta \right) - A \frac{r}{\alpha_1}. \quad (43)$$

Первое из них позволяет найти явную зависимость от времени функции u_η . Введем обозначение a для матрицы

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_1 & \ddot{\alpha}_2 & \ddot{\alpha}_3 \\ \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

и A_{ij} — для алгебраического дополнения элемента a_{ij} . Тогда первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln u_\eta = \frac{1}{2} \frac{A_{12}}{A_{11}},$$

и его решением будет

$$u_\eta = f(r, \tau, \eta) \exp\left(\frac{1}{2} \int \frac{A_{12}}{A_{11}} dt\right). \quad (44)$$

Таким образом, явная зависимость от времени факторизуется. После этого второе уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции f :

$$f'' - \frac{1}{r} f' - \frac{\det \|a\|}{A_{11} c^2 \eta} f + \frac{A r^2}{c^2 \eta} \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{A_{12}}{A_{11}} dt\right) = 0, \quad (45)$$

где штрихом обозначена частная производная по r . Очевидно, что, задав экспериментальную зависимость скорости звука от глубины, можно найти решение этого уравнения в специальных функциях. Ввиду громоздкости мы не будем выписывать это решение.

Изложенное выше относилось к неоднородному уравнению для градиентной составляющей вектора деформации. Для роторной составляющей волновое уравнение однородное, опять-таки описывающее свободные колебания. Здесь снова действует аргументация, приведенная после формулы (42): за счет затухания зависимость от времени исчезает, волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа, ротор — снова гармоническая вектор-функция, а граничным условием вновь будет уравнение (23).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной вывод этой статьи — это утверждение, что приливные воздействия являются главным среди всех “астрономических” эффектов, определяющих тектонические процессы в Земле. Он основан на развитой здесь технике теории возмущений, позволившей исследовать, а в стационарной ситуации и решить уравнения движения для вектора деформации. В стационарном случае получена связь между давлением и плотностью в теле Земли; в отличие от нашей работы [7], это сделано без пренебрежения сдвиговой частью тензора напряжений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приливные силы в задаче трех тел

Понятие приливной силы как причины наблюдаемых на Земле приливов введено Ньютоном. Он объяснил приливы как результат разницы в воздействии “внешних” небесных тел на выделенную “пробную частицу” Земли и на Землю в целом. Столетие спустя Лаплас предложил формулу для потенциала, градиент которого (взятый с обратным знаком) дает приливное ускорение в задаче Кеплера (задаче двух тел). В этом разделе мы вычислим приливный потенциал в задаче трех тел (Земли, Луны и Солнца) в приближении, когда они — плотные шары. Определение приливной силы, принятое в этой

работе, взято из монографии Авсюка [4] (формулировка несколько уточнена): приливная сила, действующая на элемент протяженного тела – пробную частицу массы δm , равна разности сил гравитационного притяжения частицы внешними массами m_i и силы инерции, действующей на эту частицу в системе координат, связанной с исследуемым телом; при этом составляющие этой разности, не зависящие от положения пробной частицы (т.е. одинаковые для всех точек Земли), включать в понятие приливной силы не нужно.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трех тел: Земли (1), Луны (2) и Солнца (3), шаров с радиусами R_a , $a = 1, 2, 3$. Пусть $\underline{r}_a$ – радиус-векторы центров масс этих тел в инерциальной системе отсчета (в хорошем приближении мы можем взять в качестве нее систему координат, связанную с Солнечной системой). Пусть ρ_a – плотность тела (a); вообще говоря, она зависит от точки тела, которую мы будем задавать ее радиус-вектором $\underline{r}_a$ в декартовой системе координат с началом в центре масс тела (a).

В соответствии с определением приливной силы ускорение Земли, которому пропорциональна сила инерции, находится из уравнений движения для тел нашей системы, которые, очевидно, суть уравнения Эйлера–Лагранжа с функцией Лагранжа:

$$L = \sum_a T_a - \sum_{a < b} U_{ab} = \frac{1}{2} \sum_a \int dV_a \rho_a (\dot{\underline{r}}_a)^2 + \gamma \sum_{a < b} \iint dV_a dV_b \frac{\rho_a \rho_b}{|\underline{r}_a + \underline{r}_a - \underline{r}_b - \underline{r}_b|}. \quad (46)$$

В свою очередь, сила гравитационного воздействия на пробную частицу – элемент Земли – находится, очевидно, из уравнений Эйлера–Лагранжа с функцией Лагранжа

$$L_{\delta m} = \frac{1}{2} \delta m (\dot{\underline{r}}_a)^2 + \gamma \sum_{b=2,3} \int dV_b \frac{\rho_b}{|\underline{r}_1 + \underline{r}_1 - \underline{r}_b - \underline{r}_b|}. \quad (47)$$

В такой постановке задачи все силы, действующие на тела или их элементы нашей механической системы, потенциальные, т.е. являются (минус) градиентами потенциальной энергии по координате (центра тяжести) тела или его элемента. Поэтому разумно ввести понятие потенциала приливной силы – величины, (минус) градиент которой есть приливное ускорение. Тогда в соответствии с определением приливной силы приливный потенциал есть

$$\varphi_{\text{tid}} = -\gamma \sum_{b=2,3} \int dV_b \frac{\rho_b}{|\underline{r}_1 + \underline{r}_1 - \underline{r}_b - \underline{r}_b|} + \frac{\gamma}{m_1} \sum_{b=2,3} \left(\underline{r}_1 \frac{\partial}{\partial \underline{r}_1} \right) \iint dV_1 dV_b \frac{\rho_1 \rho_b}{|\underline{r}_1 + \underline{r}_1 - \underline{r}_b - \underline{r}_b|}. \quad (48)$$

Если разложить подынтегральные выражения этой формулы в ряд Тейлора по малым векторам $\underline{r}_a$, то не зависящие от $\underline{r}_1$ члены и градиенты (по $\underline{r}_1$) членов, линейных по $\underline{r}_1$, будут одинаковы для всех точек Земли и, следовательно, не дадут вклада в приливные

силы. Благодаря этому обстоятельству (линейная по $\underline{r}_1$) вторая составляющая формулы (48) вообще не даст вклада в приливные силы, и задача о вычислении существенной для приливных сил части приливного потенциала сведется к “выбрасыванию” из первой составляющей формулы (48) членов, не зависящих от $\underline{r}_1$, и членов, линейных по $\underline{r}_1$. Однако развитая выше теория возмущений является разложением именно по потенциалам, и мы сохраняем все члены в наших формулах.

Выпишем разложения в ряд Тейлора отдельно для двух составляющих формулы (48). Примем на время обозначения $\underline{r}_1 - \underline{r}_b = \underline{r}$, $\underline{r}_1 - \underline{r}_b = \underline{r}$. Разложение для подынтегрального выражения первой составляющей имеет вид

$$|\underline{r} + \underline{r}|^{-1} = r^{-1} - r^{-3}(\underline{r}\underline{r}) + 2^{-1}r^{-5}(-r^2r^2 + 3(\underline{r}\underline{r})^2) + 2^{-1}r^{-7}(\underline{r}\underline{r})(3r^2r^2 - 5(\underline{r}\underline{r})^2) + \\ + 8^{-1}r^{-9}(3r^4r^2 - 30r^2(\underline{r}\underline{r})^2r^2 + 35(\underline{r}\underline{r})^4) + \dots = r^{-1} \sum_{n \geq 0} (-rr^{-1})^n P_n(z), \quad (49)$$

где $z = (\underline{r}\underline{r})r^{-1}r^{-1}$, а P_n – полином Лежандра. Для подынтегрального выражения второй составляющей имеем

$$\underline{r} \frac{\partial}{\partial \underline{r}} |\underline{r} + \underline{r}|^{-1} = -\underline{r}(\underline{r} + \underline{r}) \left(r^{-3} - 3r^{-5}(\underline{r}\underline{r}) - \frac{3}{2}r^{-7}(r^2r^2 - 5(\underline{r}\underline{r})^2) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2}r^{-9}(\underline{r}\underline{r})(3r^2r^2 - 7(\underline{r}\underline{r})^2) + \dots \right) = \\ = r^{-1} \sum_{n \geq 0} (-rr^{-1})^{n+1} P_n(z)(zP'_{n+1} + P'_n). \quad (50)$$

При интегрировании этих выражений учтем, что в соответствии с определением центра тяжести небесного тела $\int dV_a \rho_a \underline{r}_a = 0$ (поэтому “однократные” интегралы по V_a и “многократные” по V_a и V_b от линейных по $\underline{r}_a$ и от билинейных по $\underline{r}_a$ и $\underline{r}_b$ выражений обратятся в нуль), а также то, что интеграл от выражения, представляющего собой произведение функции модуля радиус-вектора $\underline{r}$ на сам этот радиус-вектор, обращается в нуль.

Возвращаясь к прежним обозначениям, для первой составляющей мы получим

$$-\gamma \sum_{b=2,3} \int dV_b \frac{\rho_b}{|\underline{r}_1 + \underline{r}_1 - \underline{r}_b - \underline{r}_b|} = \gamma \sum_{b=2,3} \left(\frac{m_b}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|} - m_b \frac{\underline{r}_1(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|^3} + \right. \\ + \frac{m_b - r_1^2(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)^2 + 3(\underline{r}_1(\underline{r}_1 - \underline{r}_b))^2}{2|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|^5} + \\ + \frac{1}{2|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|^5} \int dV_b \rho_b (-r_8^2(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)^2 + 3(\underline{r}_8(\underline{r}_1 - \underline{r}_b))^2) - \\ - \frac{m_b}{2}(\underline{r}_1(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)) \frac{3r_1^2(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)^2 - 5(\underline{r}_1(\underline{r}_1 - \underline{r}_b))^2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|^7} + \\ \left. + \frac{(\underline{r}_1(\underline{r}_1 - \underline{r}_b))}{2|\underline{r}_1 - \underline{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b (3r_8^2(\underline{r}_1 - \underline{r}_b)^2 - 5(\underline{r}_8(\underline{r}_1 - \underline{r}_b))^2) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b(\mathbf{r}_8(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) (3r_8^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_8(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \\
& + \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b(\mathbf{r}_8(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) \times \\
& \times (3(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_b)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))) + \dots
\end{aligned} \tag{51}$$

Здесь мы ограничились членами порядка $(r/r)^3$ включительно, чтобы не загромождать текст. Далее, для второй составляющей в том же порядке имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma}{m_1} \sum_{b=2,3} \left(\mathbf{r}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) \iint dV_1 dV_b \frac{\rho_1 \rho_b}{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_b|} = -\gamma \sum_{b=2,3} \left(m_b \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^3} - \right. \\
& - 3 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^5} \left(\frac{m_b}{m_1} \int dV_1 \rho_1 \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) + \int dV_b \rho_b \mathbf{r}_b(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) \right) - \\
& - \frac{3m_b}{2m_1} \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_1 \rho_1 (r_1^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) - \\
& - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b (r_b^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) - \\
& - \frac{3m_b}{2m_1} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_1 \rho_1 \mathbf{r}_1 (r_1^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) - \\
& - \left. \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b \mathbf{r}_b (r_b^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \dots \right). \tag{52}
\end{aligned}$$

Отметим, что члены порядка $(r/r)^2$ в сумме составляющих взаимно сокращаются. В итоге после дальнейших частичных сокращений мы получаем приливный потенциал с точностью до членов порядка $(r/r)^4$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{tid}} = & -\gamma \sum_{b=2,3} \left(\frac{m_b}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|} + \frac{m_b - r_1^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 + 3(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2}{2|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^5} - \right. \\
& - \frac{3m_b \mathbf{r}_1}{m_1} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^5} \int dV_1 \rho_1 \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) + \\
& + 3\mathbf{r}_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^5} \int dV_b \rho_b \mathbf{r}_b(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) + \\
& + \frac{m_b}{2} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} (\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) (3r^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 - 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b (\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) (-3r^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 + \\
& + 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 + 6(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_b)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2) + \\
& + \frac{3m_b}{2m_1} \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_1 \rho_1 (-r_1^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 + 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \\
& + \left. \frac{3m_b}{2m_1} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_1 \rho_1 \mathbf{r}_1 (-r_1^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 + 5(\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^7} \int dV_b \rho_b \mathbf{r}_b (-r_b^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 + 5(\mathbf{r}_b (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2) + \\
& + \frac{1}{8} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^9} (3(r_1^2)^2 ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2)^2 - 30(r_1^2)^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 (\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 + \\
& + 35(\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^4) + \\
& + \frac{3}{4m_b} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b|^9} \int dV_b \rho_b \left((r_1^2 r_b^2 + 2(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_b)^2) ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2)^2 - \right. \\
& - 5(r_1^2 (\mathbf{r}_b (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 + 4(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_b) (\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) (\mathbf{r}_b (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)) + \\
& + (\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 r_b^2) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b)^2 \left. + \right. \\
& + 35(\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 (\mathbf{r}_b (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b))^2 + \dots \left. \right). \tag{53}
\end{aligned}$$

Здесь член в первой строке не зависит от $\mathbf{r}_1$ и поэтому не дает вклада в приливную силу. Следующие три члена имеют порядок $(r/r)^2$; первый из них – это формула Лапласа, а остальные не дают вклада в приливные силы: они линейны по $\mathbf{r}_1$. Следующие пять членов имеют порядок $(r/r)^3$; первый из них – это первая поправка к формуле Лапласа, а остальные четыре опять-таки не дают вклада в приливные силы: один из них вообще не зависит от $\mathbf{r}_1$, а остальные три линейны по этому вектору. Последние выписанные члены – это вторая поправка к формуле Лапласа, имеющая порядок $(r/r)^4$, и поправки того же порядка, учитывающие протяженность Луны и Солнца; подчеркнем, что они появляются только в этом порядке. Остальные члены этого порядка, не дающие вклада в приливные силы, мы не выписываем.

Наконец, полезно выписать формулу для косинуса угла ψ_b между направлениями радиус-вектора $\mathbf{r}_b$ и разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_b$:

$$\cos \psi_b = \sin \theta \sin \theta_b + \cos \theta \cos \theta_b \cos(\phi - \phi_b), \tag{54}$$

где θ, θ_b и ϕ, ϕ_b – широта и долгота δm и тела b , соответственно.

Формула (53) задает приливный потенциал как функцию радиус-вектора $\mathbf{r}_1$ элемента Земли и координат $\mathbf{r}_b$ центров масс небесных тел. Обычно вместо этих координат вводятся обобщенные координаты в базисе Якоби $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{R}$ (см., например, [8]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}, & m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 &= m_{12} \mathbf{r}_{12}, & m_{12} &= m_1 + m_2, \\
\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_3 &= \mathbf{R}, & m_{12} \mathbf{r}_{12} &= m_{123} \mathbf{R}, & m_{123} &= m_1 + m_2 + m_3.
\end{aligned} \tag{55}$$

Тогда в системе центра масс наших трех тел ($\mathbf{R} = 0$) имеем

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_3}{m_{123}} \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_{12}} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_3}{m_{123}} \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_{12}} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_3 = -\frac{m_{12}}{m_{123}}, \tag{56}$$

и фигурирующие в формуле (53) комбинации координат $\mathbf{r}_a$ запишутся как

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_{12}} \approx 2 \cdot 10^{-3}. \tag{57}$$

Чтобы сравнить нашу формулу (53) (записанную в координатах Якоби) для приливного потенциала с традиционными (вернее, с формулами, дающими традиционное выражение для приливной силы), следует разложить ее по параметру $\alpha r/R \approx 2 \cdot 10^{-5}$, оставить все члены, дающие вклад в приливную силу, и, учитывая наше замечание о приливном потенциале как об объекте развиваемой теории возмущений, оставить еще и главные члены разложения в ряд Тейлора, не зависящие от $\mathbf{r}_1$. Мы получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{tid}} = & -\gamma \left(\frac{m_2}{r} + \frac{m_3}{|\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}|} + \frac{m_2 - r_1^2 r^2 + 3(\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^2}{2r^5} + \right. \\ & + \frac{m_2 - r_1^2 (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r})^2 + 3(\mathbf{r}_1 (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}))^2}{2(\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r})^5} + \frac{m_2 (\mathbf{r}_1 \mathbf{r})}{2} \frac{3r_1^2 r^2 - 5(\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^2}{r^7} + \\ & \left. + \frac{m_2 (\mathbf{r}_1 (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}))}{2} \frac{3r_1^2 (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r})^2 - 5(\mathbf{r}_1 (\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}))^2}{(\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r})^7} + \dots \right), \end{aligned} \quad (58)$$

а после разложения по параметру $\alpha r/R$ эта формула примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{tid}} = & -\gamma \left(\frac{m_2}{r} + \frac{m_3}{|\mathbf{R} + \alpha \mathbf{r}|} + \frac{m_2 - r_1^2 r^2 + 3(\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^2}{2r^5} + \frac{m_3 - r_1^2 R^2 + 3(\mathbf{r}_1 \mathbf{R})^2}{2R^5} + \right. \\ & + \frac{m_2}{2} \left((\mathbf{r}_1 \mathbf{r}) \frac{3r_1^2 r^2 - 5(\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^2}{r^7} + \frac{1}{4} \frac{3r_1^4 r^4 - 30r_1^2 r^2 (\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^2 + 35(\mathbf{r}_1 \mathbf{r})^4}{r^9} \right) + \\ & + \frac{m_3}{2} \left((\mathbf{r}_1 \mathbf{R}) \frac{3r_1^2 R^2 - 5(\mathbf{r}_1 \mathbf{R})^2}{R^7} - \right. \\ & \left. - 3\alpha \frac{(\mathbf{r} \mathbf{R})(r_1^2 R^2 - 5(\mathbf{r}_1 \mathbf{R})^2) + 2R^2 (\mathbf{r}_1 \mathbf{r})(\mathbf{r}_1 \mathbf{R})}{R^7} \right) + \dots \Bigg). \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь два члена в первой строке не зависят от $\mathbf{r}_1$ и не дадут вклада в приливную силу. Два следующих члена в первой строке – так называемые лапласовские потенциалы приливных сил, вызванных Луной и Солнцем, соответственно. Их соотношение характеризуют параметры $m_2/r^3 \approx 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ для Луны и $m_3/R^3 \approx 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ для Солнца. Вторая строка содержит следующие два (после лапласовского) члена разложения “чисто лунного” потенциала по параметру $r_1/r \approx 1/60$. Третья строка – аналогичный член разложения по параметру $r_1/R \approx 4 \cdot 10^{-5}$ для “чисто солнечного” потенциала. И наконец, четвертая строка – член разложения по параметру $\alpha r/R \approx 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-5}$, по традиции притяжения механики для описания динамики Солнечной системы считающийся ответственным за отличие задачи трех тел от двух “независимых” задач двух тел (поправка на “некеплеровость” в терминологии Авсюка). Мы видим, что параметр малости для этой поправки таков, что прежде чем учесть ее, следует учесть пару поправочных членов к “лунному” потенциалу Лапласа и один такой член для “солнечного”. Следует отметить, что термин “некеплеровость” вызывает сильные сомнения в части его адекватности задаче. По-видимому, “некеплеровость” должна означать фактическую разницу в постановке задачи о трех гравитирующих телах и трех задачах о трех парах гравитирующих тел. На естественном для механики языке

для проблемы земных приливов эта разница состоит в том, что в первом случае в функцию Лагранжа (46) включается потенциальная энергия U_{23} , а во втором – нет. Однако в обоих случаях формулы для приливных сил и их потенциала выглядят одинаково; настоящее различие задач описания поведения динамических систем проявляется только в различии траекторий $\mathbf{r}_a(t)$. Как известно, задача трех тел, в отличие от задачи Кеплера, не имеет в общем случае аналитического решения. Поэтому на уровне содержательности формул типа (51) или (57) говорить о “некеплеровости” представляется преждевременным.

Для развиваемой схемы полезно сделать еще несколько замечаний. В приближении, пренебрегающем ролью остальных планет, наша система замкнута, и по теореме Нётер сохраняются ее полный импульс и полный момент. Полезно выписать явный вид этих динамических переменных. Поскольку кинетическая энергия аддитивна, достаточно вычислить импульс и момент каждого из наших трех тел. В общем случае движение тела (a) разлагается на “поступательное” движение его центра масс и “вращательное” движение с угловой скоростью $\underline{\Omega}_a$ вокруг оси, проходящей через этот центр тяжести; очевидно, что $\dot{\mathbf{r}} = [\underline{\Omega}, \mathbf{r}]$. По теореме Нётер импульс тела (a) имеет вид

$$\mathbf{p}_a = \int dV_a \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{r}}_a} = \int dV_a \rho_a (\dot{\mathbf{r}}_a + \dot{\mathbf{r}}_a) = m_a \dot{\mathbf{r}}_a + \left[\underline{\Omega}_a, \int dV_a \rho_a \mathbf{r}_a \right] = m_a \dot{\mathbf{r}}_a, \quad (60)$$

поскольку $\int dV_a \rho_a \mathbf{r}_a = 0$ просто потому, что начало координат $\mathbf{r}_a$ выбрано в центре тяжести тела. Аналогично, снова используя равенство $\int dV_a \rho_a \mathbf{r}_a = 0$, для момента тела (a) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_a &= \int dV_a \left[\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a, \frac{\delta L}{\delta \dot{\mathbf{r}}_a} \right] = \int dV_a \rho_a [\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a + [\underline{\Omega}_a, \mathbf{r}_a]] = \\ &= [\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a] + \int dV_a \rho_a [\mathbf{r}_a, [\underline{\Omega}_a, \mathbf{r}_a]]. \end{aligned} \quad (61)$$

Во втором члене правой части нетрудно узнать свертку тензора инерции тела (a) $I_{ik}^{(a)} = \int dV_a \rho_a (\delta_{ik} r_a^2 - r_{ai} r_{ak})$ с вектором угловой скорости $\underline{\Omega}_a$. Таким образом, момент тела (a) есть сумма “кинетического” момента, связанного с движением тела по орбите, и “собственного”, связанного с вращением тела.

Теперь функцию Лагранжа (47) целесообразно переписать в виде

$$L = \sum_a \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \sum_a \frac{I_{ik} \Omega_{ai} \Omega_{ak}}{2} + \gamma \sum_{a < b} \int dV_a dV_b \frac{\rho_a \rho_b}{|\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_b|}, \quad (62)$$

а потенциальную энергию разложить в ряд Тейлора. При этом благодаря равенству $\int dV_a \rho_a \mathbf{r}_a = 0$ линейные по $\mathbf{r}_a$ и билинейные по $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$ члены обратятся в нуль, и мы по-

лучим

$$\begin{aligned}
L = & \sum_a \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \sum_a \frac{I_{ik} \Omega_{ai} \Omega_{ak}}{2} + \gamma \sum_{a < b} \frac{m_a m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + \\
& + \frac{\gamma}{2} \sum_{a \neq b} m_a \int dV_b \rho_b \frac{-r_b^2 (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 + 3(\mathbf{r}_b(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))^2}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^5} + \\
& + \frac{\gamma}{2} \sum_{b \neq a} m_a \int dV_a \rho_a \frac{-r_a^2 (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)^2 + 3(\mathbf{r}_a(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b))^2}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^5} + \dots. \quad (63)
\end{aligned}$$

Таким образом, учет протяженности тел вносит в потенциальную энергию системы поправки порядка квадрата отношения радиуса тела к расстоянию между телами. Наиболее существенна поправка порядка $(R_1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)^2 \approx 3 \cdot 10^{-6}$.

Благодарности. Автор благодарен участникам семинара Отдела механики МИРАН (руководитель А. Г. Куликовский), Б. Л. Воронову, Б. В. Левицу и участникам семинара Отдела теоретической физики МИРАН (руководитель А. А. Славнов), в особенности Н. А. Славнову и Ю. М. Зиновьеву, за ценные обсуждения. Эта работа была частично поддержана грантом РФФИ № 03-05-64337, грантом НШ-2052.2003.1 поддержки ведущих научных школ и Программой “Современные проблемы теоретической математики” РАН.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
- [2] Ф. Стейси. Физика Земли. М.: Мир, 1972.
- [3] П. Мельхиор. Земные приливы. М.: Мир, 1968.
- [4] Ю. Н. Авсюк. Приливные силы и природные процессы. М.: ОИФЗ, 1996.
- [5] Ю. Н. Авсюк. ДАН СССР. 1973. Т. 212. С. 1103–1105.
- [6] Б. В. Левин, В. П. Павлов. ТМФ. 2001. Т. 128. С. 439–445.
- [7] Б. В. Левин, В. П. Павлов. Физика Земли. 2003. № 7. С. 71–76.
- [8] С. Н. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 28.XI.2003 г.