Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Моновский, Уравнение движения сферически-симметричной оболочки
в релятивистской теории гравитации, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 2, 344–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:44:28

О. В. Моновский
**УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ
СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ В
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ**

В рамках релятивистской теории гравитации получено и проинтегрировано в первом порядке по ньютоновскому потенциалу $U = m/r$ уравнение движения сферически-симметричной дельтаобразной оболочки. Использовались ковариантный закон сохранения энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве и независимо закон сохранения энергии-импульса для системы вещество + гравитационное поле в пространстве Минковского. Для рассмотренной задачи показана эквивалентность выбранного подхода и классического формализма сингулярных оболочек.

Задача о расширяющейся сферически-симметричной оболочке в настоящее время приобретает важное значение в связи с рассмотрением различных космологических инфляционных моделей. В статье [1] в рамках линейного приближения релятивистской теории гравитации (РТГ) было получено решение для гравитационного поля пылевой оболочки конечной толщины. Это решение непрерывно дифференцируемо во всем пространстве (в том числе и на границах оболочки), ограничено в нуле, убывает на пространственной бесконечности и не содержит падающих волн, следовательно, согласно теоремам математической физики является единственным.

Чтобы построить приближение данной задачи во втором порядке по ньютоновскому потенциалу $U = m/r$, необходимо найти закон движения оболочки с точностью m/r . В данной работе несколькими независимыми способами получено уравнение движения сферически-симметричной дельтаобразной оболочки, в частности, с привлечением введенного Израэлем [2] формализма сингулярных оболочек и приведено его решение.

1. Рассмотрим тензор энергии-импульса сферически-симметричной пылевой дельтаобразной оболочки с законом движения $R(t)$:

$$t^{ij} = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - R(t)) \frac{\rho u^i u^j}{u^0}$$

(здесь $u^i = \frac{dx^i}{ds} = \{u^0, u^0 v, 0, 0\}$, $v = \frac{dR}{dt} = \dot{R}(t)$ – скорость оболочки), и аналогичное выражение для оболочки толщины a :

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi r^2 a} [\theta(r - R(t)) - \theta(r - R(t) - a(t))] \frac{\rho u^i u^j}{u^0},$$

причем граничные условия на скорость вещества $v(t, R(t)) = \dot{R}(t)$,

$$v(t, R(t) + a(t)) = \dot{R}(t) + \dot{a}(t), \quad \partial_r v(t, R(t)) = \partial_r v(t, R(t) + a) = 0.$$

Будем трактовать дельтаобразную оболочку как предел (в интегральном смысле) оболочки конечной толщины, что позволит преодолеть проблемы, возникающие при работе с обобщенными функциями, и избежать появления расходимостей:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int T^{ij} dV = \int t^{ij} dV,$$

где $dV = \sqrt{-\gamma} d^3x$ (при переходе к дельтаобразной оболочке справедливо соответствие $\rho(t, r) \rightarrow \rho(t, R(t))|_{a=0}$, $u^i(t, r) \rightarrow u^i(t, R(t))|_{a=0}$).

Выберем метрический тензор пространства Минковского в виде $\gamma_{ij} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -(r \sin \theta)^2)$, $\gamma_{ij} \gamma^{jk} = \delta_i^k$ (ковариантную производную по этой метрике обозначим через D_i). Докажем, что если функции $\rho(t, r)$, $u^i(t, r)$ непрерывны по r и ограничены по a вместе с первыми производными, причем предельный переход $a \rightarrow 0$ сохраняет свойства непрерывности и гладкости, то справедливо равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int D_i T^{ij} dV = \int D_i t^{ij} dV. \quad (1)$$

Расписываем ковариантные производные с учетом сферической симметрии:

$$\begin{aligned} D_i T^{i0} &= \partial_t T^{00} + \partial_r T^{10} + \frac{2}{r} T^{10}, \\ D_i T^{i1} &= \partial_t T^{01} + \partial_r T^{11} + \frac{2}{r} T^{11} - 2r T^{22}. \end{aligned}$$

Подставляя явный вид T^{ij} , имеем

$$\begin{aligned} D_i T^{i0} &= \frac{1}{4\pi r^2 a} \left\{ \partial_t (u^0 \rho) + \partial_r (u^0 \rho v) - u^0 \rho \frac{\dot{a}}{a} \right\} [\theta(r - R(t)) - \theta(r - R(t) - a(t))] + \\ &+ \frac{1}{4\pi r^2 a} \left\{ (u^0 \rho v - u^0 \rho \dot{R}) [\delta(r - R(t)) - \delta(r - R(t) - a(t))] + u^0 \rho \dot{a} \delta(r - R(t) - a(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируем по всему пространству и переходим к пределу $a \rightarrow 0$, принимая во внимание граничные условия на v :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int D_i T^{i0} dV &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{R(t)}^{R(t)+a} \left[\partial_t (u^0 \rho) + \partial_r (u^0 \rho v) - u^0 \rho \frac{\dot{a}}{a} \right] dr + \\ &+ \lim_{a \rightarrow 0} \left[u^0 \rho \frac{\dot{a}}{a} \right]_{r=R(t)+a} = [\partial_t (u^0 \rho) + \partial_r (u^0 \rho v)]|_{r=R(t), a=0}, \end{aligned}$$

что совпадает с правой частью (1) при $j = 0$ (при вычислении предела для оценки интеграла использовалась теорема о среднем). Аналогично для $j = 1$ имеем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int D_i T^{i1} dV = [\partial_t (u^0 \rho v) + \partial_r (u^0 \rho v^2)]|_{r=R(t), a=0}.$$

Доказательство для случая $j = 2, 3$ тривиально.

В РТГ согласно принципу геометризации движение вещества в эффективном римановом пространстве описывается ковариантным законом сохранения [3]

$$\nabla_i T^{ij} = 0, \quad (2)$$

где ∇_i – ковариантная производная по метрике эффективного риманова пространства. Эффективная метрика g^{ij} вводится согласно соотношению $\tilde{g}^{ij} = \sqrt{-g} g^{ij} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{ij} - \sqrt{-\gamma} \psi^{ij}$, где $g = \det g_{ij}$, $\gamma = \det \gamma_{ij}$, $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$ (здесь ψ^{ij} – тензор гравитационного поля). Ковариантную производную ∇_i можно тождественно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{ij} &= D_i T^{ij} + G_{il}^i T^{lj} + G_{il}^j T^{il}, \\ G_{jk}^i &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{is} (D_j \tilde{g}_{sk} + D_k \tilde{g}_{js} + D_s \tilde{g}_{jk}). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) при $j = 2, 3$ удовлетворяются автоматически в силу сферической симметрии задачи, движение оболочки определяется из рассмотрения закона сохранения при $j = 0, 1$. Введем обозначение: $\overset{(i)}{f}$ -величина f имеет i -й порядок по m . Выделяя в (2) слагаемые степени малости $O(m/r)$ и $O(m/r)^2$ и используя формулу (3), получаем уравнения

$$D_i \overset{(1)}{T}^{ij} = 0, \quad (4a)$$

$$D_i \overset{(2)}{T}^{ij} = -G_{il}^i \overset{(1)}{T}^{lj} - G_{il}^j \overset{(1)}{T}^{il}, \quad (4б)$$

где $G_{jk}^i = \frac{1}{2} \gamma^{is} (D_j \overset{(1)}{\psi}_{sk} + D_k \overset{(1)}{\psi}_{js} + D_s \overset{(1)}{\psi}_{jk})$ (решение $\overset{(1)}{\psi}_{ij}$ для гравитационного поля оболочки конечной толщины получено в [1]).

Решение уравнения (4a) тривиально: $\overset{(0)}{v} = \text{const}$, $\overset{(1)}{\rho} = \text{const}$, $\overset{(0)}{a} = \text{const}$. Пусть m – масса покоя вещества оболочки в первом приближении, определяемая по формуле $u^0 m = \int t^{00} dV$ (интеграл берется по всему пространству), тогда $\overset{(1)}{\rho} = m$.

Раскроем выражение из правой части (4б):

$$\begin{aligned} G_{il}^i T^{l0} + G_{il}^0 T^{il} &= 2G_{00}^0 T^{00} + 3G_{01}^0 T^{01} + G_{11}^0 T^{11} + \\ &\quad + G_{01}^1 T^{00} + G_{11}^1 T^{01} + 2G_{02}^2 T^{00} + 2G_{12}^2 T^{01}, \\ G_{il}^i T^{l1} + G_{il}^1 T^{il} &= G_{00}^0 T^{01} + G_{01}^0 T^{11} + G_{00}^1 T^{00} + \\ &\quad + 3G_{01}^1 T^{01} + 2G_{11}^1 T^{11} + 2G_{02}^2 T^{01} + 2G_{12}^2 T^{11}. \end{aligned}$$

Так как величины $\overset{(1)}{G}_{jk}^i$ для дельтаобразной оболочки не являются непрерывными при $r = R(t)$, для получения уравнения движения необходимо совершить полную процедуру интегрального предельного перехода. Используя (1), из (4б) можно получить интегральное соотношение

$$\int D_i \overset{(2)}{t}^{ij} dV = - \lim_{a \rightarrow 0} \int \left(G_{il}^i \overset{(1)}{T}^{lj} + G_{il}^j \overset{(1)}{T}^{il} \right) dV. \quad (5)$$

Чтобы вычислить правую часть (5) с требуемой точностью, необходимо иметь значения $G_{jk}^{(1)}$ в области $R(t) \leq r \leq R(t) + a$ (здесь и далее для упрощения выражений величины низшего порядка малости $\frac{(0)}{R(t)}$, $\frac{(0)}{v}$, $\frac{(0)}{u}_0$, $\frac{(1)}{\rho}$, $\frac{(1)}{\mu}$ и т.д. – будем записывать без индексов). Используя решение из [1], имеем

$$\begin{aligned}
 G_{00}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2ar} (1 + v^2) \left[\ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right], \\
 G_{01}^{(1)} &= -\frac{u^0 m}{2ar^2 v} (1 + v^2) \left[(R(t) + a) \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - R(t) \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right], \\
 G_{11}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2ar^3 v^2} \left\{ (1 + v^2) \left[(R(t) + a)^2 \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - (R(t))^2 \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2v[(1 + v^2)(R(t) + a)r - (R(t))^2 - r^2 v^2] \right\}, \\
 G_{00}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2ar^2 v} (3 - v^2) \left[(R(t) + a) \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - R(t) \ln \frac{1 - v}{1 + v} + 8v(r - R(t)) \right], \\
 G_{01}^{(1)} &= -\frac{u^0 m}{2ar^3 v^2} \left\{ (3 - v^2) \left[(R(t) + a)^2 \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - (R(t))^2 \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2v[(3 - v^2)(R(t) + a)r - 3(R(t))^2 + r^2 v^2] \right\}, \\
 G_{11}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2ar^4 v^3} \left\{ (3 - v^2) \left[(R(t) + a)^3 \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - (R(t))^3 \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2v[(3 - v^2)(R(t) + a)^2 r - R(t)(3(R(t))^2 - r^2 v^2)] \right\}, \\
 G_{02}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2ar^3 v^2} \left\{ (3 - v^2) \left[(R_- + a)(R_+ + a) \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - R_- R_+ \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2v[(3 - v^2)(R(t) + a)r - 3(R(t))^2 + r^2 v^2] \right\}, \\
 G_{12}^{(1)} &= -\frac{u^0 m}{4ar^4 v^3} \left\{ (3 - v^2) \left[(R(t) + a)(R_- + a)(R_+ + a) \ln \frac{R_- + a}{R_+ + a} - \right. \right. \\
 &\quad \left. - R(t)R_- R_+ \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right] + 2v[(3 - v^2)(R(t) + a)^2 r - \\
 &\quad \left. - R(t)(3(R(t))^2 - r^2 v^2)] \right\} \tag{6}
 \end{aligned}$$

(здесь $R_- = R(t) - vr$, $R_+ = R(t) + vr$).

Подставляем выражения (6) в правую часть (5), интегрируем и берем предел $a \rightarrow 0$:

$$-\lim_{a \rightarrow 0} \int \left(G_{il}^{(1)} T^{l0} + G_{il}^{(0)} T^{il} \right) dV = -\frac{(u^0 m)^2}{2R^2(t)} \left[v(3 + v^2) + 2(1 - v^2) \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right], \tag{7a}$$

$$-\lim_{a \rightarrow 0} \int \left(G_{il}^{(1)} T^{l1} + G_{il}^{(1)} T^{il} \right) dV = -\frac{(u^0 m)^2}{2R^2(t)} (1 - v^2) \left[1 + 2v \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right]. \tag{7б}$$

В левой части (5) имеются слагаемые с производными от метрических коэффициентов, входящих в выражение

$$u^{(1)0} = -\frac{1}{2}(1-v^2)^{-\frac{3}{2}} \left[g_{00}^{(1)} + 2v g_{01}^{(1)} + v^2 g_{11}^{(1)} - (v^{(1)})^2 \right].$$

Хотя для решения из [1] при $a \rightarrow 0$ $\partial_t u^0|_{v=\text{const}}$ и $\partial_r u^0|_{v=\text{const}}$ по отдельности имеют разрыв на границе оболочки, комбинация $(\partial_t + v\partial_r)u^0|_{v=\text{const}}$ непрерывна:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R(t)+0} (\partial_t + v\partial_r)u^0|_{v=\text{const}} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_{R(t)}^{R(t)+a} (\partial_t + v\partial_r)u^0|_{v=\text{const}} dr = \\ &= \lim_{r \rightarrow R(t)-0} (\partial_t + v\partial_r)u^0|_{v=\text{const}} = -\frac{m(u^0)^4}{R^2(t)}v(1+v^2). \end{aligned}$$

Теперь можно выразить левую часть (5) только через производные от $v^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$:

$$\int D_i {}^{(2)}t^{i0} dV = u^0 \left[(u^0)^2 \rho v \frac{dv^{(1)}}{dt} + \frac{d\rho^{(2)}}{dt} \right] - \frac{m^2(u^0)^4}{R^2(t)}v(1+v^2), \quad (8a)$$

$$\int D_i {}^{(2)}t^{i1} dV = u^0 \left[(u^0)^2 \rho \frac{dv^{(1)}}{dt} + v \frac{d\rho^{(2)}}{dt} \right] - \frac{m^2(u^0)^4}{R^2(t)}v^2(1+v^2), \quad (8б)$$

где произведена корректная для дельтаобразной оболочки замена $(\partial_t + v\partial_r)\rho(t, r) \rightarrow \frac{d}{dt}\rho(t, R(t))$. Итоговая система уравнений на функции $v^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ выглядит следующим образом:

$$(u^0)^2 \rho v \frac{dv^{(1)}}{dt} + \frac{d\rho^{(2)}}{dt} = -\frac{m^2(u^0)^3}{2R^2(t)} \left[v(1-4v^2-v^4) + 2(1-v^2)^2 \ln \frac{1-v}{1+v} \right], \quad (9a)$$

$$(u^0)^2 \rho \frac{dv^{(1)}}{dt} + v \frac{d\rho^{(2)}}{dt} = -\frac{m^2(u^0)^3}{2R^2(t)} \left[1-4v^2-v^4 + 2v(1-v^2)^2 \ln \frac{1-v}{1+v} \right]. \quad (9б)$$

Решая ее относительно $\frac{dv^{(1)}}{dt}$ и $\frac{d\rho^{(2)}}{dt}$, имеем

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = -\frac{mu^0}{2R^2(t)}(1-4v^2-v^4), \quad (10a)$$

$$\frac{d\rho^{(2)}}{dt} = -\frac{m^2}{R^2(t)}\sqrt{1-v^2} \ln \frac{1-v}{1+v}. \quad (10б)$$

Заметим, что выражение $(\partial_t + v\partial_r)\sqrt{\gamma/g}^{(1)}$ на решении из [1] непрерывно по r . Прямые вычисления дают

$$(\partial_t + v\partial_r)\sqrt{\gamma/g}^{(1)}|_{r=R(t)} = -\frac{m}{R^2(t)}\sqrt{1-v^2} \ln \frac{1-v}{1+v}. \quad (11)$$

Сравнивая результат (11) с (10б), мы можем с требуемой точностью записать $\rho^{(2)} = m\sqrt{\gamma/g}$. Величина $\mu = \frac{1}{4\pi r^2}m\delta(r-R(t))$ является сохраняющейся в данном приближении плотностью массы: $\partial_t \mu + \partial_r(v\mu) = O((m/r)^3)$ (здесь величины $v(t)$ и $R(t)$ представлены с точностью до m).

2. Уравнения РТГ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{pq} D_p D_q g^{ij} &= 16\pi(\tilde{T}^{ij} + \tilde{\tau}^{ij}), \\ D_i \tilde{g}^{ij} &= 0,\end{aligned}$$

где в правой части стоят тензоры энергии-импульса вещества и гравитационного поля веса +2:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{ij} &= (-g)T^{ij}, \\ \tilde{\tau}^{ij} &= \frac{1}{32\pi} \left[\tilde{g}^{ij} \left(\tilde{g}_{mn} D_p \tilde{g}^{mq} D_q \tilde{g}^{np} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{mn} D_m \tilde{g}_{pq} D_n \tilde{g}^{pq} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{mn} \tilde{g}_{pq} \tilde{g}^{rs} D_r \tilde{g}^{mn} \tilde{g}^{pq} \right) - \right. \\ &\quad - 2\tilde{g}_{mn} \tilde{g}^{js} D_p \tilde{g}^{im} D_s \tilde{g}^{pn} - 2\tilde{g}_{mn} \tilde{g}^{is} D_p \tilde{g}^{jm} D_s \tilde{g}^{pn} + 2\tilde{g}_{mn} \tilde{g}^{pq} D_p \tilde{g}^{im} D_q \tilde{g}^{jn} - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \tilde{g}_{mn} \tilde{g}_{pq} \tilde{g}^{is} \tilde{g}^{jr} D_s \tilde{g}^{mn} D_r \tilde{g}^{pq} - \tilde{g}^{jn} \tilde{g}^{im} D_m \tilde{g}_{pq} D_n \tilde{g}^{pq} + 2D_p \tilde{g}^{im} D_m \tilde{g}^{pj} \right].\end{aligned}$$

Выделим уравнения на поле ψ^{ij} во втором приближении по m/r :

$$\gamma^{pq} D_p D_q \psi^{(2)ij} = -16\pi \left(T^{(2)ij} + \tau^{(2)ij} \right), \quad (12a)$$

$$D_i \psi^{(2)ij} = 0, \quad (12b)$$

здесь $T^{ij} = g/\gamma T^{ij}$, $\tau^{(2)ij}$ — часть тензора энергии-импульса, учитывающая вклад чисто гравитационного поля первого приближения $\psi^{(1)ij}$:

$$\begin{aligned}\tau^{(2)ij} &= \frac{1}{32\pi} \left[\gamma^{ij} \left(\gamma_{mn} D_p \psi^{(1)m}{}_{q} D_q \psi^{(1)n}{}_{p} - \frac{1}{2} \gamma^{mn} D_m \psi^{(1)}_{pq} D_n \psi^{(1)pq} + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \gamma_{mn} \gamma_{pq} \gamma^{rs} D_r \psi^{(1)mn} D_s \psi^{(1)pq} \right) - 2\gamma_{mn} \gamma^{js} D_p \psi^{(1)im} D_s \psi^{(1)pn} - \\ &\quad - 2\gamma_{mn} \gamma^{is} D_p \psi^{(1)jm} D_s \psi^{(1)pn} + 2\gamma_{mn} \gamma^{pq} D_p \psi^{(1)im} D_q \psi^{(1)jn} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_{mn} \gamma_{pq} \gamma^{is} \gamma^{jr} D_s \psi^{(1)mn} D_r \psi^{(1)pq} + \gamma^{jn} \gamma^{im} D_m \psi^{(1)}_{pq} D_n \psi^{(1)pq} + \\ &\quad \left. + 2D_p \psi^{(1)im} D_m \psi^{(1)pj} - 2\psi^{(1)pq} D_p D_q \psi^{(1)ij} \right].\end{aligned}$$

Следствием (12) является дифференциальный закон сохранения

$$D_i \left(T^{(2)ij} + \tau^{(2)ij} \right) = 0. \quad (13)$$

Для T^{ij} справедливо аналогичное (1) тождество

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int D_i T^{ij} dV = \int D_i (g/\gamma t^{ij}) dV.$$

Используя его, можно переписать (13) в интегральном виде:

$$\int D_i(g/\gamma^{(2)} t^{ij}) dV = - \lim_{a \rightarrow 0} \int D_i \tau^{(2)ij} dV. \quad (14)$$

Вычисляя правую часть (14) для решения из [1], после предельного перехода $a \rightarrow 0$ получаем (отличный от нуля вклад дает только область $R(t) \leq r \leq R(t) + a$):

$$\begin{aligned} - \lim_{a \rightarrow 0} \int D_i \tau^{(2)i0} dV &= - \frac{(u^0 m)^2}{2R^2(t)} \left[v(3 + v^2) - 2(1 - v^2) \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right], \\ - \lim_{a \rightarrow 0} \int D_i \tau^{(2)i1} dV &= - \frac{(u^0 m)^2}{2R^2(t)} (1 - v^2) \left[1 - 2v \ln \frac{1 - v}{1 + v} \right]. \end{aligned}$$

Раскрываем левую часть (14) при $j = 0, 1$, применяя равенство (11):

$$\int D_i(g/\gamma^{(2)} t^{ij}) dV = \int D_i t^{(2)ij} dV + \frac{2m^2}{R^2(t)} v^i v^j \ln \frac{1 - v}{1 + v}.$$

С учетом этого результата и соотношения (8) закон сохранения (14) приводит для $\overset{(1)}{v}$ и $\overset{(2)}{\rho}$ к системе (9).

3. В четырехмерном пространстве-времени дельтаобразная оболочка описывается гиперповерхностью $\Sigma : r = R(t)$. Полная производная по времени от векторной функции A^i , заданной на этой поверхности, определяется формулой

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{\partial A^i}{\partial t} + A^j \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt}.$$

Введем на Σ вектор нормали $n^i = \{-\overset{\circ}{R}, u^0, 0, 0\}$ (мы обозначили $\overset{\circ}{R} = \frac{dR}{ds}$), четырех-скорость $u^i = \{u^0, \overset{\circ}{R}, 0, 0\}$ является касательной к Σ . Тогда, как показал Израэль [2], уравнение движения оболочки запишется в виде

$$n_i \frac{\delta u^i}{\delta s} \Big|_{r=R(t)-0} + n_i \frac{\delta u^i}{\delta s} \Big|_{r=R(t)+0} = 0. \quad (15)$$

Чтобы исключить $\frac{\delta^2 t}{\delta s^2}$ из выражения $n_i \frac{\delta u^i}{\delta s} = -\overset{\circ}{R} \frac{\delta^2 t}{\delta s^2} + u^0 \frac{\delta^2 R}{\delta s^2}$, продифференцируем тождество $u_i u^i = 1$:

$$0 = u_i \frac{\delta u^i}{\delta s} = \frac{\delta^2 t}{\delta s^2} \left(g_{00} u^0 + g_{01} \overset{\circ}{R} \right) + \frac{\delta^2 R}{\delta s^2} \left(g_{01} u^0 + g_{11} \overset{\circ}{R} \right).$$

Используя $g_{00}(u^0)^2 + 2g_{01}\overset{\circ}{R}u^0 + g_{11}\overset{\circ}{R}^2 = 1$, окончательно имеем

$$n_i \frac{\delta u^i}{\delta s} = \frac{\delta^2 R}{\delta s^2} \left(g_{00} u^0 + g_{01} \overset{\circ}{R} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Раскрываем полную производную:

$$\frac{\delta^2 R}{\delta s^2} = \frac{d^2 R}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 u^i u^j = \frac{d^2 R}{ds^2} + \Gamma_{00}^1 (u^0)^2 + 2\Gamma_{01}^1 \overset{\circ}{R} u^0 + \Gamma_{11}^1 \overset{\circ}{R}^2 \quad (17)$$

(здесь Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля по метрике g_{ij}).

Подставляя (16), (17) в (15) и удерживая только члены порядка m , получаем искомое уравнение движения

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{1}{2} \left[\Gamma_{ij}^1 \Big|_{r=R(t)-0} + \Gamma_{ij}^1 \Big|_{r=R(t)+0} \right] (u^0)_i (u^0)_j.$$

Нам потребуются значения следующих символов Кристоффеля для решения из [1]: снаружи оболочки $r > R(t)$ —

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2r^2 v} \left[(3 - v^2) \ln \frac{1 - v}{1 + v} + 8v \right], \\ \Gamma_{01}^{(1)} &= -\frac{u^0 m}{r^3 v^2} \left[(3 - v^2) \ln \frac{1 - v}{1 + v} + 6v \right] R(t), \\ \Gamma_{11}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2r^4 v^3} \left\{ 3(3 - v^2) (R(t))^2 \ln \frac{1 - v}{1 + v} + 2v [9(R(t))^2 - r^2 v^2] \right\}; \end{aligned}$$

в полости оболочки $r < R(t)$ —

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2r^2 v} (3 - v^2) \left[\ln \frac{R_-}{R_+} + 2rv \frac{R(t)}{R_+ R_-} \right], \\ \Gamma_{01}^{(1)} &= -\frac{u^0 m}{r^3 v^2} (3 - v^2) \left\{ R(t) \ln \frac{R_-}{R_+} + rv \left[1 + \frac{(R(t))^2}{R_+ R_-} \right] \right\}, \\ \Gamma_{11}^{(1)} &= \frac{u^0 m}{2r^4 v^3} (3 - v^2) \left\{ 3R(t) \ln \frac{R_-}{R_+} + 2rv \left[2 + \frac{(R(t))^2}{R_+ R_-} \right] \right\} R(t) \end{aligned}$$

(здесь действует прежнее соглашение относительно обозначения величин низшего порядка по m).

Прямые вычисления дают, что решению из [1] соответствует следующее уравнение движения оболочки:

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = -\frac{u^0 m}{2R^2}.$$

Переходим к дифференцированию по времени:

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = (u^0)^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + u^0 \frac{du^0}{dt} \frac{dR}{dt}.$$

Преобразования, аналогичные использованным при переходе от системы (7) к системе (9), приводят к результату

$$\frac{d(u^0)_0}{dt} \Big|_{r=R(t)} = -\frac{m(u^0)^4}{R^2(t)} v(1 + v^2) + (u^0)^3 v \frac{d(u^0)}{dt}.$$

Полученное уравнение на функцию $v^{(1)}$ совпадает с (10а):

$$\frac{d^{(1)}v}{dt} = -\frac{mu^0}{2R^2(t)}(1 - 4v^2 - v^4).$$

Можно заключить, что для нашей задачи прямое использование законов сохранения для получения уравнения движения оболочки эквивалентно классическому формализму сингулярных оболочек.

Интегрирование уравнения движения с начальными условиями $R(0) = R_0$, $\frac{dR(0)}{dt} = v$ дает закон движения оболочки

$$R(t) = R_0 + vt + \frac{mu^0}{2v^2}(1 - 4v^2 - v^4) \left[\ln \frac{R_0 + vt}{R_0} - \frac{vt}{R_0} \right].$$

Список литературы

- [1] Власов А. А., Моновский О. В. // ТМФ. 1992. Т. 91. №2. С. 334–345.
- [2] Israel W. // Nuovo Cim. 1966. V. B44. № 1. P. 1–14.
- [3] Лозунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
3.V.1995 г.

O. V. Monovsky

THE EQUATION OF MOTION OF THE SPHERICALLY SYMMETRIC SHELL IN RELATIVISTIC GRAVITATIONAL THEORY

The equation of motion of the singular spherically symmetric shell is found and integrated with accuracy to the first order of the Newton potential $U = m/r$. The energy-momentum conservation laws, one for matter in effective curved space-time and the other for both matter and gravitational field in Minkowski space-time are used independently. These methods appear to be equivalent to the classical formalism of singular hypersurfaces suggested.