Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, Интегральные соотношения для специальных функций класса Гойна, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 388–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:01:44

А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА ГОЙНА

Получены новые интегральные соотношения для собственных функций, порожденных уравнениями класса Гойна. Эти соотношения выражают двойственность между собственными функциями, соответствующими уравнениям с разным поведением в особых точках и, возможно, заданными на разных интервалах. Рассматриваемые соотношения образуют две иерархии, в каждой из которых порождающие уравнения связаны друг с другом процессом конфлюенции особых точек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Гойна – обыкновенное линейное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка с четырьмя регулярными особенностями. Вместе с уравнениями, которые получаются из него с помощью предельных переходов или заданием специальных значений параметров, оно образует класс Гойна дифференциальных уравнений [1, 2]. Специальным образом выбранные решения уравнений класса Гойна порождают класс Гойна специальных функций [2].

Цель данной работы – описание и исследование интегральных соотношений, связывающих между собой собственные функции, порождаемые уравнениями класса Гойна с разными наборами характеризующих их параметров. Здесь мы не обсуждаем интегральные уравнения для собственных функций, отсылая к нашей предыдущей публикации [3].

Искомыми являются интегральные соотношения вида

$$y(z) = \int_C K(\phi(z, t))v(t)dt. \quad (1)$$

Предполагается, что ядро $K(\phi)$ выражается в терминах элементарных функций, функция $\phi(z, t)$ – один из простых мономов

$$\phi_1(z, t) = zt, \quad (2)$$

$$\phi_2(z, t) = z - t, \quad (3)$$

где C – подходящий контур интегрирования на комплексной плоскости t . Функции $y(z)$, $v(t)$ в контексте данной статьи являются собственными функциями какой-либо граничной задачи для соответствующего уравнения класса Гойна.

Полученные результаты можно использовать в следующих целях:

- а) вычисление интегралов от специальных функций класса Гойна,
- б) изучение свойств матриц монодромии,
- в) вычисление значений специальных функций класса Гойна.

Специальные функции класса Гойна широко используются в физике (задача двух кулоновских центров, эффект Штарка на водороде, ангармонический осциллятор и др.), поэтому наши результаты могут быть полезны в многочисленных приложениях.

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В качестве первого шага нам необходимо систематическое описание класса Гойна. Это описание подобно приведенному в [4, 5] и основано на уточненной классификации особых точек и явном исследовании процесса конфлюенции особых точек.

Каждой особой точке z_j линейного ОДУ второго порядка может быть поставлено в соответствие характеризующее ее целое или полуцелое число $R(z_j)$, которое называется s -рангом особой точки (см. [4, 5]). По определению s -ранг регулярной особой точки равен единице. Из определения s -ранга иррегулярной особенности $z = \infty$ следует, что в ее окрестности есть по крайней мере одно решение $y_1(z)$ с асимптотикой

$$(\ln y_1(z))' \sim \alpha_1 z^{R-1}(1 + o(1)). \quad (4)$$

Формула (4) дает практический метод для вычисления s -ранга иррегулярной особенности. У рассматриваемых ниже уравнений s -ранги особых точек лежат в интервале

$$3/2 \leq R \leq 4. \quad (5)$$

Набор s -рангов особых точек данного уравнения образует его s -мультисимвол [4, 5].

Процесс конфлюенции, в котором две особые точки уравнения сливаются, образуя особую точку с бóльшим s -рангом, может быть описан как предельный переход, при котором некоторые параметры уравнения стремятся к бесконечности [5].

Класс Гойна содержит “по существу” следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} L_z^{(0)}y(z) = & (z(z-1)(z-a)D^2 + (\gamma(z-1)(z-a) + \delta z(z-a) + \\ & + \varepsilon z(z-1))D + (\alpha\beta z - q))y(z) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

причем $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1$,

$$L_z^{(1)}y(z) = (z(z-1)D^2 + (pz(z-1) + \gamma(z-1) + \delta z)D + (p\alpha z - q))y(z) = 0, \quad (7)$$

$$L_z^{(2)}y(z) = (z(z-1)D^2 + (\gamma(z-1) + \delta z)D - (\kappa^2 z + q))y(z) = 0, \quad (8)$$

$$L_z^{(3)}y(z) = (z^2D^2 + (-z^2 + \tau z + \nu)D + (-\alpha z - q))y(z) = 0, \quad (9)$$

$$L_z^{(4)}y(z) = (z^2D^2 + (\rho z + \omega)D - (z + q))y(z) = 0, \quad (10)$$

$$L_z^{(5)}y(z) = (zD^2 + (-z^2 + \mu z + \gamma)D + (-\alpha z - q))y(z) = 0, \quad (11)$$

$$L_z^{(6)}y(z) = (zD^2 + \gamma D + (-z^2 - \zeta z - q))y(z) = 0, \quad (12)$$

$$L_z^{(7)}y(z) = (D^2 + (-z^2 + \sigma)D + (-\alpha z - q))y(z) = 0, \quad (13)$$

$$L_z^{(8)}y(z) = (D^2 + (-z^3 + \tau z^2 - q))y(z) = 0. \quad (14)$$

Уравнения (6)–(14) отличаются своими мультисимволами, которые соответственно равны $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 3/2\}$, $\{2, 2\}$, $\{2, 3/2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5/2\}$, $\{4\}$, $\{7/2\}$. В (6)–(14) мы пытались сохранить единое обозначение q для так называемого аксессуарного параметра, который в отличие от остальных параметров уравнения не связан с локальным поведением решений в окрестности какой-либо особой точки.

Исходное уравнение (6) – это известное уравнение Гойна (УГ) [1, 4]. Уравнение (7) называется конфлюентным уравнением Гойна (КУГ) [1, 4] и может быть получено из (6) с помощью процесса конфлюенции

$$\varepsilon = -pa + \alpha + 1 - \delta - \gamma, \quad \beta = -pa, \quad q = -aq, \quad a \rightarrow \infty. \quad (15)$$

В физических приложениях часто используются частные случаи КУГ – уравнение для кулоновских сфероидальных функций, уравнение для сфероидальных функций, алгебраическая форма уравнения Маттье [2]. Если мы положим, что

$$\beta = a^{1/2}\kappa, \quad \alpha = a^{1/2}\kappa, \quad q \mapsto -aq, \quad a \rightarrow \infty, \quad (16)$$

то получим уравнение (8) с полупелым s -рангом для особенности на бесконечности, которое назовем редуцированным КУГ.

В последующем в процессе конфлюенции либо сливаются две регулярные особые точки, либо регулярная особенность сливается с иррегулярной. В результате первого процесса мы получаем дважды конфлюентное уравнение Гойна (ДКУГ) (9) [1, 4]

$$z \mapsto -\frac{z}{p}, \quad \gamma = \frac{\nu}{p}, \quad \delta = -\frac{\nu}{p} + \tau, \quad p \rightarrow 0. \quad (17)$$

Во втором случае после преобразования

$$z \mapsto \frac{z}{\sqrt{p}}, \quad \delta = p - \mu\sqrt{p}, \quad q \mapsto -q\sqrt{p}, \quad p \rightarrow \infty \quad (18)$$

мы получаем биконфлюентное уравнение Гойна (БКУГ) (11) [1, 4].

Взяв в качестве исходного редуцированное КУГ (8), мы получаем в результате преобразования

$$z \mapsto \frac{z}{\kappa^2}, \quad \delta = \frac{\omega}{\kappa^2} + \rho, \quad \gamma = -\frac{\omega}{\kappa^2}, \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (19)$$

вместо (9) уравнение (10), которое мы назовем редуцированным ДКУГ с полупелым s -рангом на бесконечности. Чтобы получить из (11) уравнение (12) – редуцированное БКУГ с полупелым s -рангом, нам необходимо сделать преобразование зависимой переменной $y(z) \mapsto z^{1/2-\delta/2}y(z)$ и затем выполнить предельный переход

$$z \mapsto z\varepsilon, \quad \frac{1-\delta}{2} = \varepsilon^{-3/2}, \quad \kappa^2 + \varepsilon^{-3} = -\zeta\varepsilon^{-1}, \quad q\varepsilon - \varepsilon^{-2} - \gamma\varepsilon^{-1/2} \mapsto q, \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Последнюю возможность предоставляет процесс слияния всех особых точек в одну иррегулярную особую точку. После преобразования

$$z \mapsto \frac{\mu}{2} + \left(\frac{\mu}{2}\right)^{1/3} z, \quad \gamma = 3\mu^2 + \left(\frac{\mu}{2}\right)^{1/3} \sigma, \quad q \mapsto \left(\frac{\mu}{2}\right)^{1/3} \left(q - \frac{\alpha\mu}{2}\right), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (21)$$

мы получаем триконфлюентное уравнение Гойна (ТКУГ) (13) [1, 4]. Чтобы вывести уравнение (14) – редуцированное ТКУГ – из описанных выше, требуется выполнить предварительно преобразование зависимой переменной

$$y(z) = \exp(z^2/2 - \mu z - \gamma \ln(z))w(z). \quad (22)$$

После этого уравнение (14) можно получить с помощью подстановки

$$\begin{aligned} z &\mapsto a^{1/4} + za^{5/4}, \quad \gamma = O(a^{5/2}), \\ \mu &= O(a^{5/4}), \quad \alpha = O(a^{5/2}), \quad q = O(a^{15/4}), \quad a \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Ввиду громоздкости соответствующих выражений мы указали в (23) только порядок величины коэффициентов, а не явные формулы для них.

Рассмотрим соотношение между дифференциальными и интегральными операторами на формальном уровне. Это означает, что мы полагаем все встречающиеся интегралы сходящимися и все внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, равными нулю. Этого можно достичь выбором подходящих условий для параметров уравнений и выбором контура интегрирования.

ЛЕММА 1. Пусть L_z и M_t – линейные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Предположим, что функции $y(z)$ и $v(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$L_z y(z) = 0, \quad (24)$$

$$M_t v(t) = 0 \quad (25)$$

и связаны друг с другом соотношением (1). Тогда ядро $K(z, t)$ может быть выбрано как решение уравнения в частных производных

$$(L_z - f(z)M_t^*)K(z, t) = 0 \quad (26)$$

с подходящими функциями $g(t)$ и $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из преобразования, включающего интегрирование по частям,

$$\begin{aligned} L_z y(z) &= \int_C v(t)(L_z - f(z)M_t^*)K(z, t) dt + \int_C f(z)K(z, t)M_t v(t) dt = \\ &= \int_C v(t)(L_z - f(z)M_t^*)K(z, t) dt = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА ГОЙНА

Рассмотрим соотношения типа

$$y(z) = K^{(0)}v = \int_C (z-t)^\mu v(t)dt, \quad (28)$$

где $y(z)$ и $v(t)$ являются решениями уравнения Гойна с разными наборами параметров: $\{a, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, q\}$ и $\{a', \alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', q'\}$, соответственно.

ЛЕММА 2. *Уравнение*

$$(L_z^{(0)} - M_t^{(0)*})(z-t)^{-\mu} = 0 \quad (29)$$

справедливо, если вышеупомянутые наборы параметров связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (\mu - \alpha)(\mu - \beta) &= 0, & \gamma' &= \gamma + 1 - \mu, \\ \delta' &= \delta + 1 - \mu, & \varepsilon' &= \varepsilon + 1 - \mu, \\ \alpha' &= 2 - \mu, & \beta' &= -2\mu + \alpha + \beta + 1, \\ q' &= q + (-\mu + 1)(\varepsilon + \delta a + \gamma(a + 1)) + \mu(\mu - 1)(a + 1). \end{aligned} \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в последовательном сокращении коэффициентов, стоящих при различных степенях переменных z, t .

Имеются два корня квадратного уравнения (30) для параметра μ , но при любом выборе мы получаем один и тот же оператор $M_t^{(0)*}$. Это следует из симметрии УГ относительно параметров α, β . Поэтому, не теряя общности, параметры УГ для функции $v(t)$ в (28) можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma + 1 - \alpha, & \delta' &= \delta + 1 - \alpha, & \varepsilon' &= \varepsilon + 1 - \alpha, & \alpha' &= 2 - \alpha, \\ \beta' &= \beta + 1 - \alpha, & q' &= q + \alpha(\alpha - 1)(a + 1) - (\alpha - 1). \end{aligned} \quad (31)$$

При повторном применении преобразования (28) вновь возникающие коэффициенты совпадают с исходными. Следовательно, на формальном уровне справедливо соотношение

$$(K^{(0)})^2 = I, \quad (32)$$

где I – тождественный оператор, так что (28) – преобразование инволюции. Это следует также из того, что двукратная суперпозиция преобразования (28) имеет ядро Коши.

С помощью формального соотношения (28) можно получить несколько конкретных результатов, подходящим образом выбирая решения $y(z)$, $v(t)$ и коэффициенты для соответствующих уравнений. Здесь мы обсудим только связи между собственными функциями.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $a < 0$, $\delta > \alpha$, $\gamma > 1$, $\varepsilon > 1$, $\alpha < 1$. Пусть $\{v_n(t)\}$ – набор собственных функций для задачи на собственные значения на интервале $[0, 1]$ для УГ (6) с коэффициентами α' , β' , γ' , δ' , ε' , q' , определенными в (30) ($v_n(t)$ ограничена в точках 0 и 1). Тогда соотношение*

$$y_n(z) = K^{(0)} v_n = \int_0^1 (z-t)^{-\alpha} v_n(t) dt \quad (33)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ задачи на собственные значения на интервале $[a, 0]$ для уравнения (6) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и a).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интеграл в (33) сходится, так как $z \in]a, 0[$, и ограничен в $z = a$. Он также ограничен в $z = 0$, так как $\alpha < 1$. Все члены, возникающие при интегрировании по частям, пропадают (в силу поведения решений в конечных точках контура интегрирования). Следовательно, $y_n(z)$, определенная соотношением (33), – собственная функция, соответствующая интервалу $[a, 0]$. (Мы не обращаем внимания на нормировку собственной функции.)

После подстановки $t = a/s$ соотношение (33) преобразуется в интегральное соотношение с ядром, зависящим от произведения zs . По некоторым причинам мы изменим интервал интегрирования.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $a > 1$, $\alpha > \gamma$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > \gamma + \delta$. Пусть $\{w_n(t)\}$ будет набором собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для уравнения (25) с набором параметров α'' , β'' , γ'' , δ'' , ε'' , q'' :*

$$\begin{aligned} \alpha'' &= 2 - \alpha, & \beta'' &= 2 - \gamma, & \gamma &= 2 - \beta, \\ \delta'' &= \varepsilon + 1 - \alpha, & \varepsilon'' &= \delta + 1 - \alpha, & q'' &= q - a\delta + (2 - \gamma)(a + 1) - \varepsilon \end{aligned}$$

($w(t)$ ограничена в точках $-\infty$ и 0). Тогда соотношение

$$y_n(z) = S^{(0)} w_n(t) = \int_{-\infty}^0 \left(1 - \frac{zs}{a}\right)^{-\alpha} w_n(s) ds \quad (34)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ для (6), соответствующих задаче на собственные значения на интервале $[1, a]$ ($y_n(z)$ ограничена в точках 1 и a).

Хотя (33) и (34), в сущности, совпадают, они порождают две лестницы интегральных соотношений для конфлюентных уравнений.

Рассматривая переход $L^{(0)} \mapsto L^{(1)}$, приводящий к процессу конфлюенции, мы получаем интегральное соотношение для конфлюентных функций класса Гойна.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $\rho > 0$, $\delta > \alpha$, $\gamma > 1$, $\alpha < 1$. Пусть $\{v_n(t)\}$ есть набор собственных функций для задачи на собственные значения на интервале $[0, 1]$ для КУГ (7) с параметрами $\alpha' = 2 - \alpha$, $\gamma' = \gamma + 1 - \alpha$, $\delta' = \delta + 1 - \alpha$,*

$p' = p, q' = q - (\alpha - 1)(p - \delta - \gamma + \alpha)$ ($v_n(t)$ ограничена в точках 0 и 1). Тогда соотношение

$$y_n(z) = K^{(1)}v_n = \int_0^1 (z-t)^{-\alpha} v_n(t) dt \quad (35)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$, соответствующих задаче на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для КУГ (7) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1. Обращаясь к БКУГ, можно сформулировать следующее предложение.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $\gamma > 1$, $\alpha < 1$. Пусть $\{v_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[0, -\infty]$ для БКУГ (11) с параметрами $\alpha' = 2 - \alpha$, $\mu' = \mu$, $\gamma' = \gamma + 1 - \alpha$, $q' = q + \mu(\alpha - 1)$ ($v_n(t)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$). Тогда соотношение*

$$y_n(z) = K^{(5)}v_n = \int_0^\infty (z-t)^{-\alpha} v_n(t) dt \quad (36)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ задачи на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для БКУГ (11) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$).

Отметим, что, как следует из теорем 1–4, если $\alpha = -n$ и n целое, то собственные функции $y_n(z)$ – полиномы.

Обратимся теперь ко второй лестнице интегральных соотношений для конфлюентных функций класса Гойна, порождаемых (34). Первым возникает интегральное соотношение для КУГ, альтернативное (35). Оно может быть получено прямым предельным переходом (15), когда ядро уравнения (34) преобразуется в экспоненту.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $\delta > 1$, $\beta < 1$, $p < 0$. Пусть $\{w_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для КУГ (7) с параметрами $\alpha' = 2 - \gamma$, $\gamma' = 2 - \alpha$, $\delta' = \alpha + 2 - \gamma - \delta$, $p' = -p$, $q' = q + \delta + \gamma - 2 - p$ ($w_n(t)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$). Тогда соотношение*

$$y_n(z) = S^{(1)}w_n = \int_{-\infty}^0 \exp(-pzt) w_n(t) dt \quad (37)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ двухточечной задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty]$ для КУГ (7), ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и ∞).

Далее следует интегральное соотношение для БКУГ.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что $\gamma < 1$, $\beta > 1$. Пусть $\{w_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty]$ для БКУГ*

$$(tD_t^2 + (t^2 + \mu't + \gamma')D_t + \alpha't - q')w(t) = 0, \quad (38)$$

где $\alpha' = 2 - \gamma$, $\gamma' = 2 - \alpha$, $\mu' = -\mu$, $q' = q + \mu$ ($w_n(t)$ ограничена в точках 0 и ∞). Тогда соотношение

$$y_n(z) = S^{(5)}w_n = \int_0^\infty \exp(-zt)w_n(t) dt \quad (39)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ двухточечной задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty]$ для уравнения (11) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и ∞).

Среди соотношений, соответствующих ДКУГ, мы можем выделить соотношения между решениями редуцированного ДКУГ и соотношения между решениями ДКУГ и решениями редуцированного КУГ.

Во втором случае справедлива

ТЕОРЕМА 7. Предположим, что $\alpha < 1$, $\nu > 0$. Пусть $\{w_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для редуцированного КУГ (8) с параметрами $\gamma' = 2 - \alpha$, $\delta' = \alpha + 2 - \tau$, $k'^2 = -\nu$, $q' = q + \tau - 2$ ($w(t)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$). Тогда соотношение

$$y_n(z) = S^{(1)}w_n = \int_{-\infty}^0 \exp(-zt)w_n(t) dt \quad (40)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty]$ для ДКУГ (9) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и ∞).

ТЕОРЕМА 8. Предположим, что $\gamma > 1$, $\delta > 1$, $k^2 > 0$. Пусть $\{w_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[-\infty, 0]$ для ДКУГ (9) с параметрами $\alpha' = 2 - \gamma$, $\tau' = 4 - \gamma - \delta$, $\nu' = -k^2$, $q' = q + \delta + \gamma - 2$ ($w_n(t)$ ограничена в точках 0 и $-\infty$). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_{-\infty}^0 \exp(-zt)w_n(t) dt \quad (41)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ задачи на собственные значения на интервале $[0, 1]$ для редуцированного КУГ (8) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и 1).

ТЕОРЕМА 9. Предположим, что $\omega > 0$. Пусть $\{w_n(t)\}$ есть набор собственных функций задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty)$ для редуцированного ДКУГ (10) с параметрами $\rho' = 4 - \rho$, $\omega' = \omega$, $q' = \rho - 2 - q$ ($w_n(t)$ ограничена в точках 0 и ∞). Тогда соотношение

$$y_n(z) = \int_0^\infty \exp(-zt/\omega)w_n(t) dt \quad (42)$$

порождает набор собственных функций $y_n(z)$ задачи на собственные значения на интервале $[0, \infty)$ для редуцированного ДКУГ (10) ($y_n(z)$ ограничена в точках 0 и ∞).

В приведенный выше список интегральных соотношений не вошли соотношения, возникающие при специальных значениях параметров рассмотренных уравнений. Помимо

соотношений между собственными функциями тем же способом можно искать соотношения между другими специально выбранными решениями, однако число возможностей здесь слишком велико для журнальной статьи.

Статья написана благодаря финансовой поддержке фонда Сороса, грант R5H000.

Авторы благодарны А.Зеегеру, Д.Шмидту, В.Лаю и В.С. Буслаеву за полезные обсуждения вопросов, затронутых в статье.

Список литературы

- [1] *A.Decarreau, M.C.Dumont-Lepage, P.Maroni, A.Robert, A.Ronveaux* // Ann. Soc. Sc. de Brux. 1978. V. 92. P. 53–78; *A.Decarreau, P.Maroni, A.Robert* // Ann. Soc. Sc. de Brux. 1978. V. 92. P. 151–189.
- [2] A.Ronveaux (Ed.) Heun's Differential Equations: Oxford Univ. Press, 1995.
- [3] *A.Ya.Kazakov, S.Yu.Slavyanov* // Methods and Applications of Analysis (to appear).
- [4] *S.Yu.Slavyanov, W.Lay, A.Seeger* // Heun's Differential Equation: Oxford Univ. Press, 1955.
- [5] *С.Ю.Славянов, А.Зеегер, В.Лай* // ТМФ. 1995. Т. 104. №2. С. 233–247.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov

INTEGRAL RELATIONS FOR SPECIAL FUNCTIONS OF HYPERGEOMETRIC AND HEUN CLASS

Ordinary differential equations with polynomial coefficients originate different kinds of integral relations for its solutions: integral representations in terms of simpler functions, integral equations etc. In this paper, a new kind of integral relations for functions of the Heun class are presented. These relations are coupling in involution eigensolutions, which are characterized by different behaviour at singularities and often also by different intervals of consideration and equations themselves. The studied relations are arranged in two staircases where each succeeding equation may be obtained with the help of the confluence process.