Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Квицинский, Спектральные функции нулей q -функций Бесселя, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 397–414

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:09:29

А. А. Квицинский
СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
НУЛЕЙ q -ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Исследуются дзета-функции $\zeta_\nu(z; q) = \sum_{n=1}^{\infty} [j_{\nu n}(q)]^{-z}$ и функции распределения $Z_\nu(t; q) = \sum_n \exp[-t j_{\nu n}^2(q)]$, связанные с нулями $j_{\nu n}(q)$ q -функций Бесселя $J_\nu(x; q)$ и $J_\nu^{(2)}(x; q)$. Получены явные значения для $\zeta_\nu(2n; q)$ при $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Найдены полюсы $\zeta_\nu(z; q)$ в комплексной плоскости и вычеты в этих полюсах. Исследована асимптотика функции распределения $Z_\nu(t; q)$ при $t \downarrow 0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существенная информация о спектре положительных операторов с компактной резольвентой содержится в симметричных функциях их собственных чисел. Особый интерес представляют спектральная ζ -функция

$$\zeta_H(z) = \text{tr } H^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-z} \quad (1)$$

и функция распределения (след теплового оператора)

$$Z_H(t) = \text{tr } e^{-tH} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n}, \quad (2)$$

где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} = \sigma_d(H)$, $H > 0$ (предполагается, что ряды (1) и (2) сходятся). Они связаны преобразованием Меллина

$$\zeta_H(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \text{tr } e^{-tH}, \quad (3)$$

которое позволяет продолжить ζ -функцию в комплексную плоскость и связывает ее аналитическую структуру с (квазиклассической) асимптотикой функции распределения при $t \downarrow 0$. Хорошо известный пример – эллиптический (псевдо-) дифференциальный оператор H порядка d на компактном многообразии размерности m . В этом случае квазиклассическая асимптотика функции распределения имеет вид (см., например, [1])

$$Z_H(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{(n-m)/d} a_n(H), \quad t \downarrow 0, \quad (4)$$

где коэффициенты $a_n(H)$ содержат информацию о геометрии многообразия. Из уравнений (3) и (4) следует, что функция $\Gamma(s)\zeta_H(s)$ мероморфна на $\mathbf{C}$ с простыми полюсами $z = (m - n)/d$.

Современный интерес к спектральным функциям типа (1), (2) связан, в частности, с теорией квантовых бильярдov [2–5]. Простейший пример – круговой бильярд, т.е. оператор Лапласа с условием Дирихле на единичном круге в $\mathbf{R}^2$. В этом случае (в том числе для бильярдov Ааронова–Бома [4]) $d = 2$, $m = 1$ и $\lambda_n = j_{\nu n}^2$, где $j_{\nu n}$ – нули функции Бесселя $J_\nu(x)$. Соответствующие спектральные функции (1), (2) и разложение (4) выражаются в терминах нулей функций Бесселя:

$$\zeta_H(z/2) \equiv \zeta_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} j_{\nu n}^{-z} \quad (\operatorname{Re} z > 1), \quad (5)$$

$$Z_H(t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t j_{\nu n}^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{(n-1)/2} a_n(\nu) \quad (t \downarrow 0). \quad (6)$$

Есть ряд замечательных формул, связанных с ζ -функцией нулей функции Бесселя при целых аргументах. Прежде всего это классические явные выражения для ζ -функции (5) при $z = 2m$, $m = 1, 2, \dots$ (см., например, [6, 7]):

$$\begin{aligned} \zeta_\nu(2) &= \frac{1}{4(\nu + 1)}, \\ \zeta_\nu(4) &= \frac{1}{2^4(\nu + 1)^2(\nu + 2)}, \\ \zeta_\nu(6) &= \frac{1}{2^5(\nu + 1)^3(\nu + 2)(\nu + 3)} \end{aligned} \quad (7)$$

и т.д. Дзета-функции отрицательных четных аргументов также вычисляются явно [5] через коэффициенты асимптотики (6):

$$\zeta_\nu(-2m) = (-1)^m m! a_{2m+1}(\nu), \quad m = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Кроме того, из уравнения (3) вытекает, что $\zeta_\nu(z)$ имеет простые полюсы при $z = -2m + 1$ ($m = 0, 1, \dots$) с вычетами

$$\operatorname{Res} [\zeta_\nu(z), z = -2m + 1] = \begin{cases} \pi^{-1/2} a_0(\nu), & m = 0, \\ 2\pi^{-1} (-1)^m \Gamma(m + 1/2) a_{2m}(\nu), & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

При этом все коэффициенты $a_n(\nu)$ также вычисляются явно [5]:

$$a_0(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad a_1(\nu) = -\frac{1}{2}(\nu + 1/2), \quad a_2(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\nu^2 - 1/4) \quad (10)$$

и т.д.

Формулы (7)–(10) можно рассматривать как тождества следов для оператора Бесселя. Данная работа посвящена обобщению этих тождеств для дискретных операторов Бесселя, которые возникают при q -дискретизации кругового бильярда.

Рассмотрим единичный круг с полярными координатами (r, θ) и дискретную решетку по радиальной переменной $\{r_i\} = \{1, q^{1/2}, q, \dots\}$ с $0 < q < 1$. Она разбивает круг на дискретный набор окружностей радиусов $q^{n/2}$, $n = 0, 1, \dots$. На этом множестве введем дискретный оператор

$$H_q = -\frac{1}{r^2} \left[T_{q^{1/2}} + T_{q^{-1/2}} - 2 \right] + \frac{1}{r^2} D_\theta^2, \quad (11)$$

где $T_p \Psi(r, \theta) = \Psi(pr, \theta)$ и D_θ^2 – положительный оператор по угловой переменной. Его конкретный вид не играет роли. Обозначим через $\mu^2 \equiv q^{\nu/2} + q^{-\nu/2} - 2$ его собственные значения. Тогда радиальная часть соответствующей собственной функции $H_q : H_q \Psi = \lambda \Psi$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Psi(q^{1/2}r) + \Psi(q^{-1/2}r) + \left[\lambda r^2 - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2}) \right] \Psi(r) &= 0, \\ \Psi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(q^{n/2}) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это одно из q -обобщений уравнения Бесселя. Его решения выражаются через q -функцию Бесселя $J_\nu(x; q)$,

$$\Psi(r) = J_\nu(q^{\nu/4} \lambda^{1/2} r; q),$$

которая задается рядом

$$J_\nu(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q; q)_n (q^{\nu+1}; q)_n} x^{2n+\nu}, \quad (13)$$

где $0 < q < 1$,

$$(a; q)_0 = 1, \quad (a; q)_n = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}).$$

Собственные числа оператора H_q суть $\lambda_{\nu n} = q^{-\nu/2} j_{\nu n}^2(q)$, где $j_{\nu n}(q)$ – нули функции $J_\nu(z; q)$. Тем самым ζ -функция и функция распределения q -разностного оператора (11) определяются в терминах нулей q -функции Бесселя (13):

$$\zeta_\nu(z; q) = \sum_{n=1}^{\infty} [j_{\nu n}(q)]^{-z}, \quad Z_\nu(t; q) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-t j_{\nu n}^2(q)]. \quad (14)$$

Эти спектральные функции суть q -обобщения функций (5), (6).

Мы будем также исследовать спектральные функции, связанные с другой q -функцией Бесселя

$$J_\nu^{(2)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+\nu)}}{(q; q)_n (q^{\nu+1}; q)_n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad (15)$$

которая определяет решения спектральной задачи

$$H_q \Psi = \lambda T_{q^{1/2}} \Psi, \quad \Psi(0) = \Psi(1) = 0. \quad (16)$$

Соответствующие собственные числа суть $\lambda_{\nu n} = (q/4)j_{\nu n}^2(q)$, где $j_{\nu n}(q)$ – нули функции $J_{\nu}^{(2)}(z; q)$.

Впервые q -аналоги функций Бесселя были введены Джексоном [8–10]. Функция $J_{\nu}(x; q)$ затем изучалась в работах [11–14] (иногда ее называют также q -функцией Бесселя–Хана–Экстона), а функция $J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ – в работах [15–17].

Цель данной работы – изучение спектральных функций (14) нулей q -функций Бесселя (13) и (15), в частности вывод явных формул типа тождеств следов (7)–(10). На протяжении всей работы предполагается, что индекс ν q -функций Бесселя ограничен условием $\nu > -1$. Только в этом случае все нули $j_{\nu n}(q)$ вещественны и просты, как и нули обычных функций Бесселя.

Основные результаты работы содержатся в теоремах 1, 2 и 6–9.

Спектральные тождества и асимптотический анализ всегда занимали главное место в широком круге научных интересов С.П. Меркурьева, с которым мне посчастливилось много и тесно работать. Мне будет всегда не хватать его мнения, советов и моральной поддержки. Я посвящаю ему эту работу.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе описываются некоторые известные свойства q -функций Бесселя J_{ν} и $J_{\nu}^{(2)}$, которые потребуются нам в дальнейшем.

Эти функции удовлетворяют соответствующим q -разностным уравнениям

$$\begin{aligned} J_{\nu}\left(q^{\frac{1}{2}}x, q\right) + J_{\nu}\left(q^{-\frac{1}{2}}x, q\right) + \left[q^{-\nu/2}x^2 - \left(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2}\right)\right] J_{\nu}(x, q) &= 0, \\ \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) J_{\nu}^{(2)}\left(q^{\frac{1}{2}}x; q\right) + J_{\nu}^{(2)}\left(q^{-\frac{1}{2}}x; q\right) &= \left(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2}\right) J_{\nu}^{(2)}(x; q), \end{aligned}$$

которые эквивалентны дискретным уравнениям Шредингера (12), (16). В пределе $q \uparrow 1$ эти уравнения переходят в дифференциальное уравнение Бесселя, а q -функции Бесселя превращаются в обычные функции Бесселя,

$$J_{\nu}^{(2)}((1-q)x; q) \rightarrow J_{\nu}(x), \quad J_{\nu}((1-q)x; q) \rightarrow J_{\nu}(2x).$$

Отсюда вытекает следующая связь нулей обычных и q -функций Бесселя:

$$\lim_{q \uparrow 1} \frac{j_{\nu n}(q)}{1-q} = \begin{cases} j_{\nu n}/2 & \text{для } J_{\nu}, \\ j_{\nu n} & \text{для } J_{\nu}^{(2)}. \end{cases} \quad (17)$$

Мы будем использовать одно и то же обозначение $j_{\nu n}(q)$ для нулей разных q -функций Бесселя J_{ν} и $J_{\nu}^{(2)}$. Из контекста всегда будет ясно, о какой из них идет речь.

При $\nu > -1$ нули обеих функций J_{ν} и $J_{\nu}^{(2)}$ вещественны, просты и образуют бесконечное множество с единственной точкой накопления на бесконечности. Для $J_{\nu}^{(2)}$ это доказано в работе [16], а для J_{ν} – в работе [14]. Так как $x^{-\nu}J_{\nu}(x; q)$ и $x^{-\nu}J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ – четные функции, мы рассматриваем только их положительные нули, занумерованные в порядке возрастания: $0 < j_{\nu 1}(q) < j_{\nu 2}(q) < \dots$. Именно они входят в определение спектральных функций (14).

Обе функции $x^{-\nu} J_{\nu}(x; q)$ и $x^{-\nu} J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ суть целые функции нулевого порядка. Это вытекает из определений этих функций (13), (15) и определения порядка ρ целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (см., например, [18]):

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{n \ln n}{\ln(1/|a_n|)}.$$

Следовательно, ряды их нулей $\sum_{n=1}^{\infty} j_{\nu n}^{-z}(q)$ сходятся при любом $z : \operatorname{Re} z > 0$. Поэтому при таких z соответствующие ζ -функции можно определить рядом (14). Кроме того, по теореме Адамара обе q -функции Бесселя можно представить в виде бесконечного произведения по их нулям:

$$x^{-\nu} J_{\nu}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{j_{\nu n}^2(q)} \right], \quad (18)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}^{(2)}(x; q) = \frac{(q^{\nu+1}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{j_{\nu n}^2(q)} \right]. \quad (19)$$

Эти представления, впервые полученные в работе [19], являются ключевым отправным пунктом дальнейшего анализа.

3. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $\zeta_{\nu}(2n; q)$

В случае обычных функций Бесселя явные выражения (7) для соответствующих ζ -функций при положительных четных аргументах получаются, например, из рекуррентных соотношений [5, 6]

$$\begin{aligned} \zeta_{\nu}(2) &= \frac{1}{4(\nu+1)}, \\ \zeta_{\nu}(2n) &= \frac{(-1)^{n+1} 4^{-n}}{(n-1)! (\nu+1)_n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{m+1} 4^{-m}}{m! (\nu+1)_m} \zeta_{\nu}(2n-2m), \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$. Обобщение этих соотношений для q -функций Бесселя дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1. *Дзета-функции нулей обеих q -функций Бесселя $J_{\nu}(x; q)$ и $J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} \zeta_{\nu}(2; q) &= a_1, \\ \zeta_{\nu}(2n; q) &= na_n + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \zeta_{\nu}(2n-2m; q), \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

с разными коэффициентами a_n ($n = 1, 2, \dots$):

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(q; q)_n (q^{\nu+1}; q)_n} \times \begin{cases} q^{n(n+1)/2} & \text{для } J_{\nu}, \\ 4^{-n} q^{n(n+\nu)} & \text{для } J_{\nu}^{(2)}. \end{cases} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (21) вытекает из представлений Адамара (18), (19). Рассмотрим функцию

$$\Delta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/j_{\nu n}^2(q)). \quad (23)$$

Дифференцируя ее логарифм, получим

$$\frac{d}{dz} \ln \Delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z - j_{\nu n}^2(q)} = - \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\nu}(2m+2; q) z^m, \quad |z| < j_{\nu 1}^2(q). \quad (24)$$

С другой стороны, из представлений (18) и (19) вытекает соотношение

$$\frac{d}{dz} \ln \Delta(z) = \frac{d}{dz} \ln z^{-\nu/2} \mathcal{J}_{\nu}(z^{1/2}; q), \quad (25)$$

где $\mathcal{J}_{\nu}$ — соответствующая q -функция Бесселя J_{ν} или $J_{\nu}^{(2)}$. Поэтому

$$\frac{d}{dz} \left[z^{-\nu/2} \mathcal{J}_{\nu}(z^{1/2}; q) \right] = -z^{-\nu/2} \mathcal{J}_{\nu}(z^{1/2}; q) \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{\nu}(2m+2; q) z^m, \quad |z| < j_{\nu 1}^2(q).$$

Подставляя в это равенство ряды (13), (15) для q -функций Бесселя и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , приходим к соотношениям (21). Отметим, что классический результат (20) также можно получить на основе соответствующего представления Адамара [5, 6, 7].

Рекуррентные соотношения (21) позволяют вычислить явно значения ζ -функций $\zeta_{\nu}(2n; q)$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Несколько первых значений приведены в приложении 1. Эти явные выражения суть тождества для нулей q -функций Бесселя, которые обобщают тождества (7).

Согласно (17) при $q \uparrow 1$ должен выполняться предельный переход

$$(1-q)^{2n} \zeta_{\nu}(2n; q) \rightarrow \zeta_{\nu}(2n) \times \begin{cases} 4^n & \text{для } J_{\nu}, \\ 1 & \text{для } J_{\nu}^{(2)}. \end{cases} \quad (26)$$

Действительно, в этом пределе $(q^{\nu+1}; q)_n \rightarrow (1-q)^n (\nu+1)_n$, и после соответствующей перенормировки (26) уравнения (21) переходят в рекуррентные соотношения (20).

Со спектральной точки зрения функция (23) совпадает (с точностью до постоянных множителей) с детерминантом Фредгольма спектральных q -разностных задач (12) и (16) для q -функций Бесселя (т.к. соответствующие собственные числа пропорциональны квадратам их нулей). Коэффициенты в разложении детерминанта при $z \rightarrow 0$ представляют собой симметричные функции собственных значений,

$$\Delta(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-z)^n, \\ a_n = \sum_{m_1 < m_2 < \dots < m_n} j_{\nu m_1}^{-2}(q) j_{\nu m_2}^{-2}(q) \cdots j_{\nu m_n}^{-2}(q).$$

Используя представления Адамара (18) и (19), нетрудно проверить, что коэффициенты a_n в этом разложении и в рекуррентных соотношениях (21) одни и те же. Поэтому явные выражения (22) для a_n представляют собой еще один набор тождеств для нулей q -функций Бесселя.

Дзета-функции нулей обычных функций Бесселя при положительных четных аргументах задают также коэффициенты в разложении отношения $J_{\nu+1}(z)/J_\nu(z)$ по степеням z (см., например, [6]):

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_\nu(2n) z^{2n-1}, \quad |z| < j_{\nu 1}. \quad (27)$$

Из представлений Адамара вытекает, что аналогичное отношение q -функций Бесселя также представляет собой аналитическую функцию в окрестности $z = 0$, которая допускает разложение типа (27). Коэффициенты этого разложения также связаны с соответствующими ζ -функциями, однако эта связь гораздо сложнее.

Чтобы описать ее, нам потребуется терминология теории разбиений: $\lambda \vdash n$ означает, что $\lambda = (n_1^{r_1} n_2^{r_2} \dots)$ есть разбиение положительного целого числа n на целые части n_i , т.е.

$$n = \underbrace{n_1 + \dots + n_1}_{r_1} + \underbrace{n_2 + \dots + n_2}_{r_2} + \dots,$$

где $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ и $r_i \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2. При $|z| < q^{1/2} j_{\nu 1}(q)$ справедливо разложение

$$\frac{\mathcal{J}_{\nu+1}(z; q)}{\mathcal{J}_\nu(z; q)} = \beta \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^{2n-1}, \quad (28)$$

где $\mathcal{J}_\nu$ — q -функции Бесселя J_ν или $J_\nu^{(2)}$,

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{для } J_\nu, \\ 2q^{-\nu} & \text{для } J_\nu^{(2)}, \end{cases}$$

а коэффициенты h_n связаны с ζ -функциями следующим образом:

а) $n = 1, 2, \dots$,

$$h_n = -q^{-n} \sum_{\lambda \vdash n} \prod_i \frac{1}{r_i!} \left[\frac{q^{n_i} - 1}{n_i} \zeta_\nu(2n_i; q) \right]^{r_i}, \quad (29)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям n : $\lambda = (n_1^{r_1} n_2^{r_2} \dots)$, а индекс i нумерует части разбиения;

б) $n = 1, 2, \dots$,

$$\zeta_\nu(2n; q) = \frac{nq^n}{1 - q^n} \sum_{\lambda \vdash n} [\sigma(\lambda) - 1]! \prod_i \frac{1}{r_i!} (h_{n_i})^{r_i}, \quad (30)$$

где $\sigma(\lambda) = r_1 + r_2 + \dots$.

Эта теорема позволяет вычислить явно все коэффициенты h_n с использованием явных выражений для дзета-функций, которые вытекают из рекуррентных соотношений (21). Однако такой способ вычисления h_n довольно громоздок. Следующая теорема открывает гораздо более простой путь.

ТЕОРЕМА 3. Коэффициенты разложения (28) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(1 - q^{n+\nu+1})h_{n+1} = \gamma_n h_n + \sum_{m=1}^n q^m h_m h_{n-m+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где в случае функции $J_\nu(x; q)$

$$h_1 = (1 - q^{\nu+1})^{-1}, \quad \gamma_n = -q^n,$$

а в случае функции $J_\nu^{(2)}(x; q)$

$$h_1 = \frac{q^\nu}{4(1 - q^{\nu+1})^{-1}}, \quad \gamma_n = 0.$$

Явные значения нескольких первых коэффициентов h_n приведены в приложении 1. Доказательство теорем 2 и 3 приведено в приложении 2.

Из связи (29) коэффициентов h_n с ζ -функциями вытекает предельный переход $h_n \rightarrow \zeta_\nu(2n; q)$ при $q \uparrow 1$. После соответствующей перенормировки (26) коэффициенты h_n также переходят в дзета-функции $\zeta_\nu(2n)$.

Как известно, нули обычных функций Бесселя тесно связаны с полиномами Ломмеля: дзета-функция этих нулей $\zeta_\nu(2n)$ совпадает с n -м моментом ортогональной меры полиномов Ломмеля [20]. Разложение (28) позволяет установить аналогичную связь между нулями q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$ и ортогональной мерой $d\alpha_\nu(x; q)$ q -аналогов полиномов Ломмеля $h_{n\nu}(x; q)$, которые были введены в работе [16],

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{n\nu}(x; q) h_{m\nu}(x; q) d\alpha_\nu(x; q) = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Как показано в [16], эта мера четна, чисто дискретна и

$$\text{supp} \{d\alpha_{\nu+1}(x; q)\} = \{1/j_{\nu n}(q)\}_{n=1}^{\infty}.$$

При этом выполняется равенство [16, формула (4.10)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_\nu(x; q)}{z - x} = 2(1 - q^{\nu+1}) \frac{J_{\nu+1}^{(2)}(1/z)}{J_\nu^{(2)}(1/z)}, \quad z \notin \text{supp} \{d\alpha_{\nu+1}\}.$$

В пределе $z \rightarrow \infty$ правая часть описывается рядом (28). Раскладывая левую часть по степеням $1/z$, придем к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} d\alpha_\nu(x; q) = 4q^{-\nu} (1 - q^{\nu+1}) h_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которое связывает моменты ортогональной меры q -полиномов Ломмеля с нулями q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$. Коэффициенты h_n выражаются через ζ -функции этих нулей равенством (29). Есть также другое, более явное представление

$$h_n = (1/q - 1) \sum_{m=1}^{\infty} j_{\nu m}^{-2n}(q) \prod_{m \neq n} \frac{j_{\nu m}^2(q) - q^{-1} j_{\nu n}^2(q)}{j_{\nu m}^2(q) - j_{\nu n}^2(q)}, \quad (32)$$

которое доказано в приложении 2. Отметим, что это представление справедливо и в случае функции $J_\nu(x; q)$.

4. АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ $Z_\nu(t; q)$ ПРИ $t \downarrow 0$

Данный раздел посвящен выводу аналога разложения (6) для функций распределения (14), связанных с q -функциями Бесселя $J_\nu(x; q)$ и $J_\nu^{(2)}(x; q)$.

Представления Адамара (18) и (19) позволяют выразить $Z_\nu(t; q)$ непосредственно через соответствующие q -функции Бесселя. Действительно, с помощью равенства (24) определение (14) функции распределения можно преобразовать в интегральное представление

$$Z_\nu(t; q) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma e^{-tz} \left[\frac{d}{dz} \ln \Delta(z) \right] dz, \quad (33)$$

где контур Γ охватывает положительную полуось z . Логарифмическая производная детерминанта Фредгольма $\Delta(z)$ выражается через соответствующую q -функцию Бесселя равенством (25).

Достоинство данного представления в том, что оно позволяет проанализировать асимптотику $Z_\nu(t; q)$ без привлечения какой бы то ни было информации о нулях q -функций Бесселя, входящих в ее определение. Действительно, поведение интеграла (33) при $t \downarrow 0$ определяется асимптотикой функции $\Delta(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$, которая, в свою очередь, определяется соответствующей асимптотикой q -функций Бесселя. Последняя была получена в работе [21]. Приведем необходимые нам результаты без доказательств.

При $|\arg(-z)| < \pi$ и $|z| \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое разложение

$$z^{-\nu/2} J_\nu(z^{1/2}; q) = \frac{(qz; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \right\} \quad (34)$$

с коэффициентами

$$b_n = \sum_{m=1}^n \frac{q^{m(\nu-n+m)}}{(q; q)_m} \left[\begin{matrix} n-1 \\ n-m \end{matrix} \right]_q. \quad (35)$$

где

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_m (q; q)_{n-m}}.$$

Асимптотика (34) содержит q -аналог экспоненциальной функции [22] $E_q(z) = (-z; q)_\infty$. Ее поведение при $|z| \rightarrow \infty$ описывается представлением [23] ($|\arg z| < \pi$)

$$(-z; q)_\infty = \frac{1}{(-q/z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \ln q} \ln^2 z + \frac{1}{2} \ln z - \frac{\pi^2}{6 \ln q} - \frac{1}{12} \ln q + F(z; q) \right\}, \quad (36)$$

где $F(z; q)$ — q -периодическая функция, $F(qz; q) = F(z; q)$, которая задается рядом Фурье

$$F(z; q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos [2\pi k \ln z / \ln q]}{k \sin h(2\pi^2 k / \ln q)}. \quad (37)$$

Асимптотика q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu} J_\nu^{(2)}(x; q) &= \frac{(q^2; q^2)_\infty}{(q; q)_\infty^2} \exp \left\{ -\frac{1}{4 \ln q} \ln^2(-\omega) + \frac{1}{2} \ln(-\omega) - \frac{\pi^2}{16 \ln q} - \frac{1}{6} \ln q \right\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1/\omega)^{n/2} \exp \{ F(-q^n \omega; q^2) \} - (q; q)_\infty^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (-1/\omega)^n, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\omega = q^{\nu+1}x^2/4$ и $|\arg(-\omega)| < \pi$; q^2 -периодичная функция $F(z; q^2)$ определена в (37),

$$c_n = (-1)^n \frac{q^{n^2/4+n}}{(q; q)_n} \sum_{m=0}^n q^{m(m-n+\nu)} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q,$$

$$d_n = q^{n^2+n} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-nk+k^2/4-k/2} c_k.$$

Представления (34)–(38) непосредственно описывают асимптотику детерминанта Фредгольма $\Delta(z)$ при $z \rightarrow \infty$, т.к. согласно представлениям (23), (18) и (19) с точностью до постоянных множителей $\Delta(z)$ совпадает с левыми частями соответствующих асимптотик (34), (38). Несложные вычисления приводят к следующим результатам для логарифмической производной детерминанта Фредгольма.

ТЕОРЕМА 4. В случае q -функции Бесселя $J_\nu(x; q)$ справедлива следующая асимптотика при $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(-z)| < \pi$:

$$\frac{d}{dz} \ln \Delta(z) = -\frac{\ln(-z)}{z \ln q} - \frac{1}{2z} - \frac{2\pi}{z \ln q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[2\pi k \ln(-z)/\ln q]}{\sin h(2\pi^2 k/\ln q)} - \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^{-n}, \quad (39)$$

где

$$g_n = \frac{1}{1-q^{n-1}} + h_n, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (40)$$

а h_n выражаются через коэффициенты b_n уравнения (35):

$$h_2 = b_1,$$

$$h_{n+1} = nb_n - \sum_{m=2}^n h_m b_{n-m+1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

ТЕОРЕМА 5. В случае q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$ имеет место следующая асимптотика при $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(-z)| < \pi$:

$$\frac{d}{dz} \ln \Delta(z) = -\frac{q^{\nu+1}}{4} \left\{ \frac{1}{2 \ln q} \frac{\ln(-\omega)}{\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(-\omega; q) (-\omega)^{-n/2-1} \right\}, \quad (41)$$

где $\omega = q^{\nu+1}z/4$, а $\alpha_n(z; q)$ суть q^2 -периодические функции, которые задаются соотношениями

$$\alpha_0(z; q) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{\ln q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[\pi k \ln z/\ln q]}{\sin h(\pi^2 k/\ln q)},$$

$$\alpha_1(\omega; q) = -\frac{1}{2} \gamma_1(\omega; q) + \omega \frac{d}{d\omega} \gamma_1(\omega; q),$$

$$\alpha_n(\omega; q) = -\frac{n}{2} \gamma_n(\omega; q) + \omega \frac{d}{d\omega} \gamma_n(\omega; q) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\omega; q) \gamma_{n-k}(\omega; q), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (42)$$

в которых

$$\gamma_n(\omega; q) = c_n \exp\{F(q^n \omega; q^2) - F(\omega; q^2)\}.$$

Отметим, что при выводе (41) мы использовали следующее обстоятельство: если $\gamma_n(\omega; q)$ суть q^2 -периодические функции, то функции $\omega d\gamma_n(\omega; q)/d\omega$ так же q^2 -периодичны. Поэтому

$$\frac{d}{d\omega} \ln \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\omega; q) \omega^{-n/2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\omega; q) \omega^{-n/2-1}, \quad |\omega| \rightarrow \infty,$$

где коэффициенты $\alpha_n(\omega; q)$ связаны с γ_n рекуррентным соотношением (42).

Теперь уже нетрудно вычислить асимптотику функций распределения при $t \downarrow 0$. С этой целью подставим представления (39) и (41) в интеграл (32) и проинтегрируем эти асимптотики почленно. В результате несложных, но длинных вычислений получаются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6. В случае q -функции Бесселя $J_\nu(x; q)$ разложение функции распределения при $t \downarrow 0$ имеет вид

$$Z_\nu(t; q) = \frac{1}{\ln q} \ln t + g_0(t; q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{n+1}}{n!} (-t)^n, \quad t \downarrow 0, \quad (43)$$

где $g_0(t; q)$ — q -периодическая функция

$$g_0(t; q) = \frac{\gamma}{\ln q} - \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{k} \Gamma(1 + 2\pi i k / \ln q) t^{-2\pi i k / \ln q},$$

γ — постоянная Эйлера, $\gamma = 0.57721\dots$, а коэффициенты g_n с $n \geq 2$ определены в (40).

ТЕОРЕМА 7. В случае q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$ разложение функции распределения при $t \downarrow 0$ имеет вид

$$Z_\nu(t; q) = \frac{1}{2 \ln q} \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} t^{n/2} \sigma_n(t; q), \quad t \downarrow 0, \quad (44)$$

где $\sigma_n(t; q)$ — q^2 -периодические функции

$$\sigma_n(t; q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_n^{(k)} t^{-\pi i k / \ln q}, \quad n \geq 1,$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(0)} &= \frac{\gamma + \ln 4}{2 \ln q} - \frac{\nu}{2}, \\ \sigma_0^{(k)} &= \frac{i}{4\pi k} (q^{\nu+1}/4)^{\pi i k / \ln q} \Gamma(1 + \pi i k / \ln q), \\ \sigma_n^{(k)} &= \alpha_n^{(k)} \frac{(q^{\nu+1}/4)^{-n/2 + \pi i k / \ln q}}{\Gamma(n/2 + 1 - \pi i k / \ln q)}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (45)$$

где $\alpha_n^{(k)}$ суть коэффициенты Фурье функций α_n из (41),

$$\alpha_n(\omega; q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{(k)} \omega^{\pi i k / \ln q}, \quad \alpha_n^{(-k)} = \alpha_n^{(k)}, \quad n \geq 1.$$

Сравним теперь представления (43) и (44) с классическим результатом (6). Оба разложения (43) и (44) содержат логарифмическую сингулярность при $t = 0$, которая порождается старшими членами асимптотик (39), (41). Эта сингулярность слабее, чем сингулярность $\sim t^{-1/2}$ соответствующего разложения для обычного оператора Бесселя. Причина этого в том, что нули $j_{\nu n}(q)$ q -функций Бесселя растут быстрее при $n \rightarrow \infty$, чем нули обычных функций Бесселя, т.к. порядок q -функций Бесселя ($\rho = 0$) меньше, чем порядок обычных функций Бесселя ($\rho = 1/2$). В результате ряд (14) сходится быстрее ряда (6), и сингулярность ряда при $t = 0$ сглаживается. Другое отличие в том, что разложения (43) и (44) содержат q -периодические члены, которые быстро осциллируют при $t \rightarrow 0$.

Подчеркнем, что все асимптотики, описанные в данном разделе, справедливы только при $0 < q < 1$ и не допускают перехода к пределу $q \uparrow 1$. В частности, разложения функций распределения (43) и (44) сингулярны при $q = 1$ и не переходят в асимптотику (6) в этом пределе, т.к. пределы $t \downarrow 0$ и $q \uparrow 1$ для $Z_\nu(t; q)$ не коммутируют. Причина такой неравномерности в том, что порядок q -функций Бесселя как функция q терпит разрыв при $q = 1$, как уже отмечалось выше.

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ζ -ФУНКЦИЙ

Из определений (14) видно, что дзета-функции связаны с функциями распределения преобразованием Меллина

$$\zeta_\nu(z; q) = \frac{1}{\Gamma(z/2)} \int_0^\infty dt t^{z/2-1} Z_\nu(t; q), \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (46)$$

Это представление задает аналитическое продолжение дзета-функций на всю комплексную плоскость. Разобьем область интегрирования в (46) на интервалы $[0, 1]$ и $[1, \infty)$ и заменим в интеграле по $[0, 1]$ функцию распределения соответствующим разложением (43), (44). Вклад каждого члена этих разложений в интеграл аналитически продолжается на всю комплексную плоскость как мероморфная функция. Оставшийся интеграл по $[1, \infty)$ аналитичен на всем $\mathbf{C}$. В результате придем к следующим результатам.

ТЕОРЕМА 8. *Дзета-функция $\zeta_\nu(z; q)$ нулей q -функции Бесселя $J_\nu(x; q)$ аналитична на $\mathbf{C}$ с простыми полюсами в точках $z = z_k = 4\pi i k / \ln q$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В окрестности полюсов справедливо представление*

$$\zeta_\nu(z; q) = -\frac{2}{(z - z_k) \ln q} + \varphi_k(z), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

в котором $\varphi_k(z)$ — аналитические функции, причем $\varphi_0(0) = -1/2$. В отрицательных четных z она имеет следующие значения:

$$\zeta_\nu(-2n; q) = -g_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

где числа g_n определены в (40).

ТЕОРЕМА 9. Дзета-функция $\zeta_\nu(z; q)$ нулей q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$ мероморфна на $\mathbb{C}$ с простыми полюсами в точках $z = 0$, $z = -1, -3, -5, \dots$ и $z = -n + 2\pi ik / \ln q$, где $n = 0, 1, \dots$ и $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. В окрестности полюсов справедливы представления

а) $z \rightarrow 0$:

$$\zeta_\nu(z; q) = -\frac{1}{z \ln q} - \frac{\nu}{2} + \frac{\ln 2}{\ln q} + \varphi_0(z), \quad \varphi_0(0) = 0;$$

б) $z \rightarrow -(2n+1)$, $n = 0, 1, \dots$:

$$\zeta_\nu(z; q) = \frac{2\sigma_{2n+1}^{(0)}}{\Gamma(-n-1/2)} \frac{1}{z+2n+1} + \varphi_n(z);$$

в) $z \rightarrow -n + 2\pi ik / \ln q$, $n = 0, 1, \dots$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\zeta_\nu(z; q) = \frac{2\sigma_n^{(k)}}{\Gamma(-n/2 + \pi ik / \ln q)} \frac{1}{z+n-2\pi ik / \ln q} + \varphi_{nk}(z),$$

где φ_0 , φ_n и φ_{nk} аналитичны, а коэффициенты $\sigma_n^{(k)}$ определены в (45). В отрицательных четных z дзета-функция имеет следующие значения:

$$\zeta_\nu(-2n; q) = (-1)^n n! \sigma_{2n}^{(0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Теоремы 8 и 9 дают q -аналоги соответствующих результатов (8)–(10) для обычных операторов Бесселя. Формулы (47), (48) дают явные выражения для ζ -функций на отрицательной вещественной оси, которые дополняют явные формулы (21) для этих функций при четных положительных z .

Отметим, что результаты этого раздела перестают быть справедливыми в пределе $q \uparrow 1$. Причина этого уже отмечалась в конце предыдущего раздела: порядок q -функций Бесселя меньше, чем порядок обычных функций Бесселя. Это приводит к ряду изменений в аналитической структуре ζ -функций. В случае q -функции Бесселя $J_\nu(x; q)$ дзета-функция $\zeta_\nu(z; q)$ имеет только один вещественный полюс при $z = 0$, все остальные полюсы лежат на мнимой оси. В случае q -функции Бесселя $J_\nu^{(2)}(x; q)$ дзета-функция $\zeta_\nu(z; q)$ имеет те же полюсы на отрицательной полуоси, что и $\zeta_\nu(z)$, а также бесконечно много добавочных полюсов в точках $z = 0$ и $z = -n + 2\pi ik / \ln q$. Отметим, что мнимые полюсы дзета-функций нулей q -функций Бесселя появляются из-за периодических коэффициентов g_0 и σ_n в асимптотиках функций распределения (43), (44). В свою очередь, эти коэффициенты происходят из q -периодической фазы $F(z; q)$ в представлении (36) для q -экспоненты. Очевидно, что дзета-функции $\zeta_\nu(z; q)$ и $\zeta_\nu(z)$ не связаны предельным переходом $q \uparrow 1$ при $\operatorname{Re} z \leq 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Из рекуррентных соотношений (21) вытекают следующие явные выражения для дзета-функций $\zeta_\nu(2n; q)$:

а) в случае функции $J_\nu(x; q)$ –

$$\begin{aligned}\zeta_\nu(2; q) &= \frac{q}{[1]_q [\nu+1]_q}, \\ \zeta_\nu(4; q) &= \frac{q^2 (1 + q^{\nu+2})}{[2]_q [\nu+1]_q^2 [\nu+2]_q}, \\ \zeta_\nu(6; q) &= \frac{q^3 (1 + 2q^{\nu+2} + 2q^{\nu+3} + q^{2\nu+5})}{[3]_q [\nu+1]_q^3 [\nu+2]_q [\nu+3]_q}, \\ \zeta_\nu(8; q) &= \frac{q^4 \{2q^{\nu+2} (1 + q^{\nu+4}) [\nu+3]_q + [2\nu+4]_q (1 + 3q^{\nu+3} + 3q^{\nu+4} + q^{2\nu+7})\}}{[4]_q [\nu+1]_q^4 [\nu+2]_q^2 [\nu+3]_q [\nu+4]_q},\end{aligned}$$

где $[a]_q = 1 - q^a$;

б) в случае функции $J_\nu^{(2)}(x; q)$ –

$$\begin{aligned}\zeta_\nu(2; q) &= \frac{q^{\nu+1}}{4[1]_q [\nu+1]_q}, \\ \zeta_\nu(4; q) &= \frac{q^{2\nu+2}}{4^2[2]_q [\nu+1]_q^2} \left\{ \frac{2q}{[\nu+2]_q} + 1 \right\}, \\ \zeta_\nu(6; q) &= \frac{3q^{3\nu+3}}{4^3[3]_q [\nu+1]_q^3} \left\{ \frac{q(1+q^2)}{[\nu+2]_q [\nu+3]_q} + \frac{q^2}{[\nu+3]_q} + \frac{1}{3} \right\}, \\ \zeta_\nu(8; q) &= \frac{q^{4\nu+4}}{4^3[4]_q [\nu+1]_q^4 [\nu+2]_q} \left\{ \frac{q^3(1+q)(1+q^2)}{[\nu+3]_q [\nu+4]_q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q^4}{[\nu+2]_q [\nu+4]_q} + \frac{q^2(1+q)}{[\nu+3]_q} + \frac{q^2}{2[\nu+2]_q} + q + \frac{[\nu+2]_q}{4} \right\}.\end{aligned}$$

Несколько первых коэффициентов разложения (28) имеют вид

а) в случае функции $J_\nu(x; q)$ –

$$\begin{aligned}h_1 &= 1/[\nu+1]_q, \\ h_2 &= \frac{q^{\nu+2}}{[\nu+1]_q^2 [\nu+2]_q}, \\ h_3 &= \frac{q^{\nu+3} (1 + q^{\nu+2})}{[\nu+1]_q^3 [\nu+2]_q [\nu+3]_q}, \\ h_4 &= \frac{q^{\nu+4} (q^{\nu+2} [\nu+3]_q + (1 + q^{\nu+3}) [2\nu+4]_q)}{[\nu+1]_q^4 [\nu+2]_q^2 [\nu+3]_q [\nu+4]_q};\end{aligned}$$

б) в случае функции $J_\nu^{(2)}(x; q) -$

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{q^\nu}{4[\nu+1]_q}, \\ h_2 &= \frac{q^{2\nu+1}}{4^2[\nu+1]_q^2[\nu+2]_q}, \\ h_3 &= \frac{q^{3\nu+2}(1+q)}{4^3[\nu+1]_q^3[\nu+2]_q[\nu+3]_q}, \\ h_4 &= \frac{q^{4\nu+3}\{(1+q)(1+q^2)[\nu+2]_q + q[\nu+3]_q\}}{4^4[\nu+1]_q^4[\nu+2]_q^2[\nu+3]_q[\nu+4]_q}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2

Рассмотрим функцию $J_\nu(x; q)$. Нетрудно проверить, что соответствующий ряд (13) удовлетворяет тождествам

$$J_\nu(x; q) = q^{\nu/2} J_\nu(q^{-1/2}x; q) + x J_{\nu+1}(x; q), \quad (49)$$

$$J_{\nu+1}(x; q) = q^{\frac{\nu+1}{2}} J_{\nu+1}(q^{1/2}x; q) + x J_\nu(x; q). \quad (50)$$

В пределе $q \uparrow 1$ они переходят в известные соотношения для обычных функций Бесселя

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x), \quad J'_{\nu+1}(x) = J_\nu(x) - \frac{\nu+1}{x} J_{\nu+1}(x). \quad (51)$$

Из уравнения (53) вытекает представление

$$\frac{J_{\nu+1}(x; q)}{J_\nu(x; q)} = \frac{1}{x} \left[1 - q^{\nu/2} \frac{J_\nu(q^{-1/2}x; q)}{J_\nu(x; q)} \right] = \frac{1}{x} [1 - H(x^2)]. \quad (52)$$

Последнее равенство вытекает из представления Адамара (18), при этом

$$H(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - t/(qj_{\nu n}^2(q))}{1 - t/j_{\nu n}^2(q)} \right]. \quad (53)$$

Разложение этой функции в окрестности $t = 0$

$$H(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n, \quad |t| < qj_{\nu n}^2(q),$$

содержит те же самые коэффициенты h_n , что и представление (28).

Рассмотрим теперь функцию $\ln H(t)$. Раскладывая ее в окрестности нуля на основе представления (53), получим

$$\ln H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \frac{1 - q^{-m}}{m} \zeta_{\nu}(2m; q). \quad (54)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n &= \ln \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} h_m t^m \right)^n = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_s=n} h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_s}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $k_i \geq 1$. В последней сумме по k_i некоторые (или все) k_i могут быть равны. Следовательно, каждый набор $\{k_i : k_1 + \dots + k_s = n\}$ является разбиением $\lambda_s = (n_1^{r_1} n_2^{r_2} \dots) \vdash n$, в котором $r_1 + r_2 + \dots = s$. С другой стороны, каждое такое разбиение порождает

$$N(\lambda_s) = \frac{s!}{r_1! r_2! \dots}$$

одинаковых членов в сумме по k_i . Поэтому уравнение (55) можно переписать в виде

$$a_n = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{\lambda_s \vdash n} N(\lambda_s) \{h_{n_1}^{r_1} h_{n_2}^{r_2} \dots\}.$$

Сравнивая это выражение с равенством (54), приходим к представлению (30).

Представление (29) также вытекает из (54):

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n = \prod_{n=1}^{\infty} \exp(a_n t^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_n^r}{r!} t^{nr} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{\lambda \vdash n} \left[\frac{a_{n_1}^{r_1}}{r_1!} \frac{a_{n_2}^{r_2}}{r_2!} \dots \right],$$

где последняя сумма берется по всем разбиениям n . Выражая a_n через ζ -функции с помощью равенства (54), получим (29).

Представление (52) позволяет также получить интересную формулу

$$\frac{J_{\nu+1}(x; q)}{J_{\nu}(x; q)} = (1/q - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{j_{\nu n}^2(q) - x^2} \prod_{m \neq n} \frac{j_{\nu m}^2(q) - q^{-1} j_{\nu n}^2(q)}{j_{\nu m}^2(q) - j_{\nu n}^2(q)}, \quad (56)$$

из которой вытекает представление (32) для коэффициентов h_n через нули функции $J_{\nu}(x; q)$.

В случае функции $J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ доказательство теоремы 2 проводится вполне аналогично. При этом вместо тождеств (49), (50) следует использовать аналогичные соотношения [16]

$$J_{\nu}^{(2)}(q^{1/2} x; q) = q^{\nu/2} J_{\nu}^{(2)}(x; q) + q^{\nu+1/2} \frac{x}{2} J_{\nu+1}^{(2)}(q^{1/2} x; q), \quad (57)$$

$$J_{\nu+1}^{(2)}(q^{1/2} x; q) = q^{-\frac{\nu+1}{2}} J_{\nu+1}^{(2)}(x; q) - q^{-\nu-1/2} \frac{x}{2} J_{\nu}^{(2)}(q^{1/2} x; q), \quad (58)$$

которые также переходят в (51) в пределе $q \uparrow 1$.

Аналог представления (56) имеет вид

$$\frac{J_{\nu+1}^{(2)}(x; q)}{J_{\nu}^{(2)}(x; q)} = (1 - q)q^{-\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{j_{\nu n}^2(q) - x^2} \prod_{m \neq n} \frac{j_{\nu m}^2(q) - q^{-1}j_{\nu n}^2(q)}{j_{\nu m}^2(q) - j_{\nu n}^2(q)}.$$

Раскладывая это выражение в ряд при $x \rightarrow 0$, получим представление (32) для коэффициентов h_n .

Доказательство теоремы 3

Рассмотрим функцию $J_{\nu}(x; q)$. Из тождества (50) вытекает равенство

$$\begin{aligned} T_{\nu}(x; q) &\equiv \frac{J_{\nu+1}(x; q)}{J_{\nu}(x; q)} = x + q^{\frac{\nu+1}{2}} \frac{J_{\nu+1}(q^{1/2}x; q)}{J_{\nu}(x; q)} = \\ &= x + q^{\frac{\nu+1}{2}} T_{\nu}(q^{1/2}x; q) \frac{J_{\nu}(q^{1/2}x; q)}{J_{\nu}(x; q)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Из уравнения (49) получим

$$\frac{J_{\nu}(x; q)}{J_{\nu}(q^{1/2}x; q)} = q^{-\nu/2} - q^{-\nu/2+1/2} x T_{\nu}(q^{1/2}x; q).$$

Используя это равенство в (59), придем к уравнению

$$[1 - x T_{\nu}(x; q)] \left[q^{1/2} T_{\nu}(q^{-1/2}x; q) - x \right] = q^{\nu+1} T_{\nu}(x; q).$$

Подставляя в него ряд (28) для T_{ν} и сравнивая степени z , получим рекуррентные соотношения (31).

В случае функции $J_{\nu}^{(2)}(x; q)$ соответствующие соотношения доказываются аналогично на основе тождеств (57), (58).

Список литературы

- [1] *P.B.Gilkey*. Invariance Theory, The Heat Equation, and the Atiya–Singer Index Theorem. Wilmington: Publish of Perish, 1984.
- [2] *C.Itzykson, P.Moussa, J.M.Luck* // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. L111–L115.
- [3] *M.V.Berry, M.Robnik* // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 649–668.
- [4] *M.V.Berry* // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 2281–2296.
- [5] *S.Leseduardte, A.Romeo* // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2483–2495; *E.Elizalde, S.Leseduardte, A.Romeo* // J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 2409–2419.
- [6] *G.N.Watson*. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1944.
- [7] *N.Kishore* // Proc. Am. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 527–533.
- [8] *F.H.Jackson* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1903. V. 41. P. 1–28.
- [9] *F.H.Jackson* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1903. V. 41. P. 105–118.

- [10] *F.H.Jackson* // Proc. London Math. Soc. (2) 1903–1904. V. 2. P. 192–220; 1904–1905. V. 3. P. 1–20.
- [11] *W.Hahn* // Z. Angew. Math. Mech. 1953. V. 33. P. 270–272.
- [12] *H.Exton*. *q*-Hypergeometric Functions and Applications. Chichester: Ellis Horwood, 1983.
- [13] *T.H.Koornwinder, R.F.Swarttouw* // Trans. Am. Math. Soc. 1992. V. 333. P. 445–461.
- [14] *H.T.Koelink, R.F.Swarttouw* // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186. P. 690–710.
- [15] *W.Hahn* // Math. Nachr. 1949. V. 2. P. 340–379.
- [16] *M.E.H.Ismail* // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 86. P. 1–19.
- [17] *M.E.H.Ismail, M.E.Muldon* // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 135. P. 187–207.
- [18] *B.Ja.Levin*. Distribution of Zeros of Entire Functions. Providence: Am. Math. Soc., 1964.
- [19] *A.A.Kvitsinsky* // J. Phys. A (to appear).
- [20] *D.Dickinson* // Proc. Am. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 946–956.
- [21] *A.A.Kvitsinsky* // J. Math. Anal. Appl. (to appear).
- [22] *G.Gasper, M.Rahman*. Basic Hypergeometric Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [23] *A.B.Olde Daalhuis* // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186. P. 896–913.

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

A. A. Kvitsinsky

SPECTRAL FUNCTIONS OF ZEROS FOR q -BESSEL FUNCTIONS

Zeta functions $\zeta_\nu(z; q) = \sum_{n=1}^{\infty} [j_{\nu n}(q)]^{-z}$ and partition functions $Z_\nu(t; q) = \sum_n \exp[-t j_{\nu n}^2(q)]$ related to the zeros $j_{\nu n}(q)$ of the q -Bessel functions $J_\nu(x; q)$ and $J_\nu^{(2)}(x; q)$ are studied. Explicit formulas for $\zeta_\nu(2n; q)$ at $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ are obtained. Poles of $\zeta_\nu(z; q)$ in complex plane and corresponding residues are found. Asymptotics of the partition functions $Z_\nu(t; q)$ as $t \downarrow 0$ is derived.