Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Малафеев, С. А. Немнюгин, Обобщенная динамическая модель движения системы в многокомпонентном внешнем поле, имеющем стохастические составляющие, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 433–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:22:56

О. А. Малафеев, С. А. Немнюгин

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ, ИМЕЮЩЕМ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Построены модели, описывающие динамику системы под влиянием внешних возмущений. Предполагается, что роль возмущений играют многокомпонентные поля, имеющие стохастические

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем два класса моделей, описывающих динамику системы под влиянием внешних возмущений. В первом случае предполагается, что справедлив обобщенный принцип экстремального действия, а движение происходит под действием многокомпонентного внешнего поля, изменяющегося со временем. Часть компонент внешнего поля зависит от времени регулярным образом, а часть представляет собой случайный процесс, описываемый стохастическими дифференциальными уравнениями. Во втором случае динамика задается релаксационными уравнениями как детерминированными, так и стохастическими.

Особенностью рассматриваемых моделей является то, что они могут быть применены для прогноза однопродуктовой экономики. Данная работа имеет, таким образом, междисциплинарный характер. Авторы полагают, что применение как аналитического, так и численного аппарата теоретической физики к решению нетрадиционных для него задач может принести обоюдную пользу, содействуя, с одной стороны, совершенствованию этого аппарата, а с другой стороны – способствуя развитию тех областей знания, в которых используется этот аппарат.

Начало развитию математической экономики было положено работой Курно [1], который ввел фундаментальное понятие экономического равновесия. Позднее это понятие было вновь введено и исследовано Нэшем и Дж. фон Нейманом [2] в контексте теории игр. Теория конфликтно управляемых процессов развивалась в работах Айзекса. Основы этой теории изложены в [3]. В работе [4] впервые были использованы методы дифференциальной топологии. Исследование моделей экономического развития потребовало привлечения методов динамического программирования [5] и методов, основанных на применении принципа максимума Понтрягина. При этом все отчетливее стало вырисовываться определенное сходство моделей математической экономики и моделей, изуча-

емых в рамках современной аналитической динамики и статистической физики.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе обобщенный принцип экстремального действия применяется для построения модели динамики системы во внешнем поле, имеющем стохастические составляющие. В третьем разделе формулируется модель, задаваемая системой релаксационных уравнений, и описывается способ учета стохастического поведения внешних параметров.

Инициатором настоящей работы был Станислав Петрович Меркурьев. Авторы с признательностью вспоминают семинары, которые проводились при его непосредственном участии, интересные и плодотворные дискуссии.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим систему, относительно движения которой будем полагать, что оно подчиняется следующим условиям. Конфигурационное пространство системы одномерно и представляет собой неотрицательную часть вещественной оси: $Q \in \mathbb{R}_+^1$. Движение системы происходит под воздействием набора внешних полей: $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t))$, причем изменение компонент $\mathbf{Z}(t)$ этого вектора со временем описывается дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t)) dt, \\ \mathbf{Z}(t_0) &= \mathbf{Z}_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты $\mathbf{e}(t)$ удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям первого порядка (в общем случае нелинейным):

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}(t) &= \varepsilon_1 \vec{\eta}(\mathbf{e}(t)) dt + \varepsilon_2 \hat{\sigma}(\mathbf{e}(t)) d\vec{\xi}, \\ \mathbf{e}(t_0) &= \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\vec{\eta}(\mathbf{e}(t))$ – вектор-функция, $\hat{\sigma}(\mathbf{e}(t))$ – положительно-определенная матрица, а $\vec{\xi}(t)$ – многомерный случайный процесс. В уравнение введены вещественные параметры ε_i , соотношение между которыми характеризует влияние случайных факторов на динамику системы. Так, при $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \rightarrow 0$ этим влиянием можно пренебречь.

Уравнение (2) определяет траекторию случайного процесса, начинающегося в точке $\mathbf{e}_0$ стохастического подпространства внешних полей. Подставляя $\mathbf{e}(t)$ в уравнение (1) и решая его, получаем $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{e}(t), Q(t), t)$.

Будем полагать, что движение системы происходит таким образом, что оно доставляет максимум функционалу “действия”:

$$W[\mathbf{Z}, \mathbf{e}, Q, t] = \mathcal{M}_{(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0)} \int_{t_0}^T \mathcal{L}(\mathbf{Z}(\mathbf{e}(s), Q(s), s), \mathbf{e}(s), Q(s)) ds,$$

где $\mathcal{M}_{(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0)}$ обозначает величину математического ожидания, которая может быть определена как интеграл по траекториям, начинающимся в точке $(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0)$. Если предположить, что $\vec{\xi}(t)$ – броуновское движение, то в определении функционала $W[\mathbf{Z}, \mathbf{e}, Q, t]$

можно использовать стандартную конструкцию интеграла Винера. Относительно “лагранжиана” $\mathcal{L}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t))$ сделаем достаточно общие предположения, а именно, будем считать, что он удовлетворяет требованиям, обеспечивающим существование функционала $W[\mathbf{Z}, \mathbf{e}, Q, t]$. Можно считать также, что он может быть представлен в виде разности функций $\Pi(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t))$ и $C(\mathbf{e}(t), Q(t))$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t)) = \Pi(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t)) - C(\mathbf{e}(t), Q(t)),$$

что для дальнейших выкладок несущественно, но понадобится нам при трактовке данной модели в экономических терминах.

Поставим задачу вывода уравнений движения

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, t_0) &= \max_{Q \in \{Q\}|_{[t_0, T]}} W[\mathbf{Z}, \mathbf{e}, Q, t], \\ \mathbf{Z}(t_0) &= \mathbf{Z}_0, \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}_0, \quad Q(t_0) = Q_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{Q\}|_{[*], [*]}$ – набор всех допустимых траекторий на временном интервале $[*, *]$.

Экстремальное значение функционала $W[\mathbf{Z}, \mathbf{e}, Q, t]$ можно рассматривать как функцию от начального момента времени t_0 и начальных условий $\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0$. В этом случае для вывода уравнений движения можно применить принцип динамического программирования Беллмана [5].

Предположим, что функция V дважды непрерывно дифференцируема по первой и второй группам аргументов, а также имеет непрерывную производную по времени. Для того чтобы конкретизировать задачу, будем считать, что $\xi(\vec{t})$ является броуновским движением со свойствами

- а) $\mathcal{M}(d\vec{\xi}(t)) = 0$,
- б) $\mathcal{M}(\xi_i(t)\xi_j(s)) = \delta_{ij} \min_{t,s}(t, s)$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Используя принцип оптимальности Беллмана, получаем

$$\begin{aligned} V(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, t_0) &= \max_{Q \in \{Q\}|_{[t_0, t_0+h]}} \left\{ \mathcal{M}_{(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0)} \int_{t_0}^{t_0+h} \mathcal{L}(\mathbf{Z}(\mathbf{e}(s), Q(s), s)) ds + \right. \\ &\quad \left. + V(\mathbf{Z}(t_0+h), \mathbf{e}(t_0+h), t_0+h) \right\} = \\ &= \max_{Q_0} \{ \mathcal{L}(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0)h + V(\mathbf{Z}_0(h), \mathbf{e}_0(h), t_0+h) \} + o(h^2), \end{aligned}$$

где $Q_0 \equiv Q(t_0)$, $\mathbf{Z}_0(h)$ и $\mathbf{e}_0(h)$ – значения величин $\mathbf{Z}(\mathbf{e}(t), Q(t), t)$ и $\mathbf{e}(t)$ в момент t_0+h . Заменяем их отрезком ряда Тейлора до второго порядка по h :

$$\begin{aligned} Z_{i0}(h) &\simeq Z_{i0} + f_i(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0)h + \langle \nabla_e Z_i, \vec{\eta} \rangle h + \\ &\quad + \langle \nabla_e Z_i, \hat{\sigma} d\vec{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma} d\vec{\xi}, Z_i'' \hat{\sigma}' d\vec{\xi} \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где i – индекс компоненты, $\langle \dots \rangle$ обозначает скалярное произведение,

$$Z_i'' \equiv \left\| \frac{\partial^2 Z_i}{\partial e_i \partial e_j} \right\|, \quad \mathbf{e}_0(h) = \mathbf{e}_0 + \vec{\eta}(\mathbf{e}_0)h + \hat{\sigma}(\mathbf{e}_0)d\vec{\xi}.$$

Последний член в (4) линеен по h в силу свойства “б” случайного процесса.

Теперь можно записать

$$V(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, t) \simeq \max_{Q_0} \{ P(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0)h + V(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, t_0 + h) + \\ + \langle \nabla_Z V, u \rangle h + \varepsilon_1 \langle \nabla_e V, \vec{\eta} \rangle h \} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 (\text{Tr}[\hat{\sigma}^T V_1'' \hat{\sigma}] + \text{Tr}[V_2'' W])h.$$

Введем следующие обозначения:

$$V_1'' \equiv \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial e_i \partial e_j} \right\|, \quad V_2'' \equiv \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial Z_i \partial Z_j} \right\|$$

– матрицы вторых производных функции V ,

$$W_{ij} \equiv \langle \hat{\sigma}^T \nabla_e Z_i, \hat{\sigma}^T \nabla_e Z_j \rangle$$

и

$$u_l \equiv f_l(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0) + \varepsilon_1 \langle \nabla_e Z_l, \vec{\eta} \rangle + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \text{Tr}[\hat{\sigma}^T Z_l'' \hat{\sigma}].$$

Здесь член $\text{Tr}[\dots]$ появляется из корреляционных свойств случайного процесса $\vec{\xi}(t)$. Окончательно получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 (\text{Tr}[\hat{\sigma}^T V_1'' \hat{\sigma}] + \text{Tr}[V_2'' W]) + \\ + \max_{Q_0} \{ \langle \nabla_Z V, u \rangle + \varepsilon_1 \langle \nabla_e V, \vec{\eta} \rangle + \mathcal{L}(\mathbf{Z}_0, \mathbf{e}_0, Q_0) \} = 0 \quad (5)$$

с очевидным начальным условием $V(T) = 0$. Граничные условия по переменным внешнего поля не являются столь очевидными и зависят от конкретной рассматриваемой ситуации.

Уравнение (5) представляет собой уравнение Гамильтона–Якоби, описывающее движение системы при сделанных нами предположениях.

Как было отмечено выше, проведенное формальное построение допускает естественную микроэкономическую трактовку. Пусть $\Pi(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t))$ – прибыль, получаемая фирмой в процессе производства, а $C(\mathbf{e}(t), Q(t))$ – расходы, связанные с затратами на сырье, рабочую силу и т.д. Тогда лагранжиан $\mathcal{L}(\mathbf{Z}(t), \mathbf{e}(t), Q(t))$ приобретает смысл чистой прибыли, получаемой производителем в единицу времени. Процесс производства описывается набором “внутренних” параметров $\mathbf{Z} = (p(t), X(t))$, где $p(t)$ – цена продукта, $X(t)$ – спрос на него, и “внешних” параметров $\mathbf{e} = (w, p_m, p_0, Y)$, причем w является ставкой заработной платы, p_m – ценой сырья, p_0 – индексом цен всех прочих товаров и Y – доходом покупателей. При описании одномерной динамики системы, для которой величина выпуска Q играет роль координаты, эти параметры можно рассматривать как внешние поля. Задача состоит в том, чтобы выбрать стратегию производства (траекторию $Q(t)$), доставляющую максимальную прибыль на заданном временном интервале.

3. МОДЕЛЬ РЕЛАКСАЦИИ

Предположим теперь, что состояние системы дается координатами точки $\mathbf{Y} = (p, S)$ в $\mathbb{R}_+^2$. Рассмотрим семейство моделей, в которых временная эволюция в $\mathbb{R}_+^2$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= \gamma(X(p) - \sum_{k=1}^n Q_k) + \lambda(S^0(p) - S(t)), \\ \dot{S}(t) &= \sum_{k=1}^n Q_k - X(p),\end{aligned}\tag{6}$$

где $\gamma, \lambda > 0$ – константы, $S^0(p), X(p)$ – известные функции p , а $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}_+^n$ – точка конфигурационного пространства. Пусть задано отображение $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^2$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}).\tag{7}$$

Будем считать также, что в каждый момент времени координаты $\mathbf{Q}$ принимают значения, определяемые из системы уравнений

$$\frac{\partial H_i(Q)}{\partial Q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.\tag{8}$$

Если предположить, что $\mathbb{R}_+^n$ является конфигурационным пространством системы n одномерных взаимодействующих частиц, то $H_i(Q)$ играет роль потенциальной энергии i -й частицы.

Предположим, что $\mathbf{F}(\mathbf{Q}), X(p)$ и $S^0(p)$ являются линейными функциями. Тогда можно выделить следующие основные типы движения системы:

1. Экспоненциальное приближение к точке равновесия (p^*, S^*) , положение которой определяется конкретным видом функций $H_i(Q), X(p)$ и $S^0(p)$.
2. Неограниченное экспоненциальное удаление от точки $(p(0), S(0))$.
3. Затухающие колебания относительно точки (p^*, S^*) .
4. Колебания относительно точки (p^*, S^*) с неограниченно возрастающей амплитудой.

Дадим, как и в предыдущем разделе, интерпретацию данной модели в экономических терминах. Можно считать, что $p(t)$ – цена продажи продукта, $S(t)$ – величина запаса, а Q_k – объемы выпуска. При наличии посредника, скупающего продукт у производителя по одной цене и продающего его с надбавкой, динамические уравнения (6) возникают естественным образом. При разработке моделей экономической динамики важным является учет взаимодействия между рынком и производителем (уравнение (7)), а также между производителями (уравнение (8)). Функция $X(p)$ описывает сбыт продукции, а $H_i(Q)$ – прибыль от продажи продукта.

Сформулированная модель описывает переход к равновесию или удаление от него и является обобщением модели, предложенной в [6].

На динамику рассматриваемой системы, как правило, оказывает влияние большое число как детерминированных, так и случайных факторов. Учесть это влияние можно, предположив, что моделью динамики внешних параметров является случайный процесс

с подходящими свойствами. Тогда, исключив для простоты из рассмотрения $S(t)$, получим вместо обыкновенного дифференциального уравнения (6) стохастическое дифференциальное уравнение

$$dp(t) = F(\mathbf{Z}) dt + \langle \mathbf{A}, d\vec{\Xi}(t) \rangle,$$

где $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{A}$ – векторы, компоненты которых определяются параметрами модели, а $\vec{\Xi}(t)$ – многомерный случайный процесс. Это уравнение допускает точное решение [7]. Более подробное изложение моделей такого типа дано в [8].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сформулированы два класса моделей, которые описывают динамику систем под воздействием внешних возмущений. Особенностью этих моделей является то, что они могут быть естественным образом истолкованы в микроэкономических терминах. С другой стороны, авторы стремились описать эти модели на языке, более привычном для физика-теоретика. Дальнейшее их развитие связано с выбором как стохастической, так и детерминированной динамики для внешних и внутренних параметров, адекватной конкретной ситуации. После того как такая динамика задана, модель может быть исследована точными или приближенными методами теоретической и вычислительной физики.

Авторы благодарят за поддержку Российский гуманитарный научный фонд (грант № 95-06-17744) и Конкурсный центр по фундаментальным исследованиям в области экономики (грант № 30, 1995 г.) (О.А.М.). Эта работа была также частично поддержана грантом Гуманитарного фонда Сороса, присужденным Американским физическим обществом (С.А.Н.).

Список литературы

- [1] *A. O. Cournot*. Recherches sur les principes mathematiques de la theorie de richesses. Paris, 1838.
- [2] *J. von Neumann* // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 295.
- [3] *О.А.Малафеев*. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемых динамических процессов. Л.: ЛГУ, 1990.
- [4] *G. Debreu* // Econometrica. 1970. V. 38. P. 387.
- [5] *Р.Беллман, Э.Энджел*. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
- [6] *A. R. Bergstrom*. The Construction and Use of Economic Models. London: Engl. Univ. Press, 1968.
- [7] *И.И.Гихман, А.В.Скорород*. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
- [8] *О.А.Малафеев, С.А.Немнюгин, Н.А.Тарасова*. Динамика развития отрасли, Труды II международной кондратьевской конференции (Санкт-Петербург, 15–17 марта 1995 г.), с. 511.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

О. А. Malafeev, S. A. Nemnyugin

GENERALIZED DYNAMICAL MODEL IN EXTERNAL FIELD WITH STOCHASTIC COMPONENTS

Models describing dynamics of a system under external perturbations are proposed. It is supposed that external fields with stochastic components play a role of perturbations.