Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Мотовилов, Представления для трехчастичной T -матрицы на нефизических листах. I, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 450–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:19:43

А. К. Мотовилов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ T -МАТРИЦЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ. I

Формулируются явные представления для аналитического продолжения компонент Фаддеева трехчастичной T -матрицы на нефизические листы римановой поверхности энергии. Согласно этим представлениям T -матрица на нефизических листах выражается в терминах ее компонент, относящихся лишь к физическому листу. На основе представлений для T -матрицы формулируются аналогичные представления для аналитического продолжения матриц рассеяния и резольвенты. Дано описание областей применимости полученных представлений.

*Работа посвящается памяти
Станислава Петровича Меркурьева, учеником
которого посчастливилось быть автору.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых интересных явлений в процессах рассеяния являются резонансы. Проблеме определения и исследования резонансов в квантовой механике уделяется значительное место как в физической, так и в математической литературе. В последние годы все больший интерес представляет исследование резонансов в системах нескольких частиц. Хорошо известна важная роль таких резонансов в физике ядерных реакций и астрофизике.

Разработка методов исследования резонансов имеет давнюю историю, восходящую к работе Гамова [1]. В этой работе, посвященной описанию α -распада, впервые обсуждалась связь резонансных состояний с комплексными полюсами матрицы рассеяния (следует отметить, что комплексные частоты рассматривались и много раньше, например Дж. Дж. Томсоном в 1884 г.). Для сферически-симметричных потенциалов интерпретация резонансов в задаче двух частиц как полюсов аналитического продолжения матрицы рассеяния на нефизический лист энергии была обоснована в известной работе Йоста [2] (по поводу ссылок на последующие работы в этом направлении см., например, книги [3] и [4]).

Способы интерпретации решений уравнения Шредингера (так называемых гамовских векторов), отвечающих резонансам, обсуждались в [5–7] (см. также цитируемую там литературу).

Идея рассматривать резонансы как полюсы аналитического продолжения ядра резольвенты оператора Шредингера (или ее матричных элементов, взятых между подходящими состояниями) реализуется в [8–16] (см. также ссылки, содержащиеся в указан-

ных работах и книгах [17, 18]). На этой основе для резонансов в задаче двух частиц к настоящему времени имеется хорошо разработанная теория возмущений (см. [11, 12, 17]).

В случае, когда носитель взаимодействия в системе двух частиц по их относительной координате является компактным, применим подход [19], разработанный Лаксом и Филлипсом (первоначально для акустических задач). Схема Лакса–Филлипса позволяет описать резонансы как дискретный спектр диссипативного оператора, являющегося генератором некоторой полугруппы сжатий. В настоящее время схема Лакса–Филлипса используется лишь в тех задачах, где риманова поверхность энергии¹⁾ оказывается двумерной (см. [20, 21]). В многоканальной задаче эта схема частично реализована в [22].

С начала 1970-х годов для исследования резонансов используется метод комплексного скейлинга [10, 14, 15] (см. также [18]), позволяющий осуществлять повороты непрерывного спектра гамильтониана системы нескольких частиц так, что приоткрываются определенные секторы на нефизических листах, соседних по отношению к физическому листу. Резонансы, находящиеся в этих секторах, оказываются частью дискретного спектра преобразованного гамильтониана. Метод комплексного скейлинга применим в случае, когда потенциалы являются аналитическими функциями координат. Этот метод позволяет вычислять в конкретных задачах положение резонансов (см., например, [15, 23]). Однако, что касается исследования строения аналитического продолжения матрицы рассеяния и резольвенты на нефизические листы, то здесь он обладает не слишком широкими возможностями.

Как известно, многие принципиальные результаты (см. [24–29]) для физического листа в квантовой задаче рассеяния для системы трех частиц получены на основе уравнений Фаддеева [24] и их модификаций. В частности, подробно изучено строение резольвенты и оператора рассеяния, доказана полнота волновых операторов и исследованы координатные асимптотики волновых функций как в случае быстро убывающих, так и кулоновских²⁾ взаимодействий [24, 28, 29, 32]. Аналогичные результаты получены также и для сингулярных взаимодействий, описываемых граничными условиями различных типов [32, 33]. На основе уравнений Фаддеева разработаны методы исследования конкретных физических систем [29, 32, 34, 35].

Совершенно по-другому обстоит дело в отношении нефизических листов. Здесь при решении конкретных N -частичных задач обычно ограничиваются разработкой того или иного приближенного вычислительного алгоритма для разыскания резонансов, находящихся на нефизических листах, соседних по отношению к физическому. Обзор различных физических подходов к исследованию трехчастичных резонансов в задачах ядерной физики можно найти в [36]. Ряд строгих результатов (см. [18]) получен в рамках метода комплексного скейлинга [10, 14, 15]. Они касаются прежде всего доказательства существования аналитического продолжения резольвенты в задаче N тел с потенциа-

¹⁾Под римановой поверхностью энергии обычно подразумевается риманова поверхность ядра резольвенты гамильтониана системы, рассматриваемого как функция энергии, или ее билинейной формы, сужаемой на подходящие подмножества гильбертова пространства. Риманова поверхность операторнозначных функций, тесно связанных с резольвентой, таких как T -матрица и матрица рассеяния, оказывается той же самой.

²⁾Отметим, что в последнее время разработаны новые подходы [30, 31] (см. также литературу, цитируемую в [31]) в абстрактной теории рассеяния для системы N тел, позволившие доказать существование и асимптотическую полноту волновых операторов в случае парных взаимодействий, убывающих на бесконечности как $r^{-\varrho}$, $\varrho > \sqrt{3} - 1$, т.е. существенно медленнее, чем кулоновские потенциалы.

лами, голоморфными по отношению к масштабным преобразованиям. В [37] доказано существование аналитического продолжения амплитуд процессов $2 \rightarrow 2$ в системе N частиц через ветви непрерывного спектра ниже первого порога развала системы на три кластера.

Целью настоящей работы являются аналитическое продолжение и исследование строения T -матрицы, матриц рассеяния и резольвенты гамильтониана для системы трех частиц на нефизических листах римановой поверхности энергии z . Предполагается, что потенциалы взаимодействия парные и убывают в координатном представлении не медленнее чем экспоненциально. В задаче двух тел с такими взаимодействиями при построении теории резонансов можно использовать как координатное, так и импульсное представление. Ясно, однако, что аналитическое продолжение на нефизические листы z уравнений теории рассеяния [24, 29] для систем трех тел, записанных в координатном представлении, — очень трудная задача, т.к. здесь существуют некомпактные (цилиндрические) области, где взаимодействия не убывают. Между тем аналитически продолженные ядра интегральных операторов этих уравнений оказываются экспоненциально возрастающими. Их решения также должны обладать экспоненциальным ростом. Названное обстоятельство приводит к расходимости интегралов и тем самым к потере смысла интегральных уравнений в координатном представлении. В импульсном же представлении интегральные члены уравнений теории рассеяния, например уравнений Фаддеева для компонент T -матрицы, являются, по существу, интегралами типа Коши, аналитическое продолжение которых (в смысле обобщенных функций) не представляет существенных затруднений. Такого рода продолжение s -волновых уравнений Фаддеева на нефизические листы, соседние по отношению к физическому листу, уже проводилось [38] (см. также [36]) в случае сепарабельных парных потенциалов. В настоящей работе мы строим продолжение уравнений Фаддеева в случае достаточно произвольных парных потенциалов не только на соседние нефизические листы, но также и на все те листы трехчастичной римановой поверхности, на которые можно провести спектральный параметр (энергию) в результате обхода двухчастичных порогов.

Основным результатом работы являются доказательство существования аналитического продолжения на нефизические листы компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, оператора $T(z)$ и построение представлений для них в терминах физического листа (см. формулу (6.8)). Согласно этим представлениям матрица $M(z)$ компонент Фаддеева, $M = \{M_{\alpha\beta}\}$, будучи продолжена на тот или иной нефизический лист, явно выражается через самое эту матрицу на физическом листе, а также усеченные матрицы рассеяния. Характер усечения определяется индексом (номером) рассматриваемого нефизического листа. Отметим, что структура представлений (6.8) совершенно аналогична структуре представлений, найденных в недавних работах автора [39, 40] для аналитического продолжения T -матрицы в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами. Представления для аналитического продолжения трехчастичных матриц рассеяния следуют непосредственно из представлений для продолжения матрицы $M(z)$ (см. равенства (6.9) и (6.11)). Как следует из представлений (6.8), (6.9) и (6.11), сингулярности аналитического продолжения на нефизические листы T -матрицы, матриц рассеяния и резольвенты, отличающиеся от тех сингулярностей, которые присутствуют на физическом листе (полюсы в точках дискретного спектра оператора энергии), суть особенности операторов, обратных к соответствующим усечениям матрицы рассеяния на физическом листе. Тем самым резонансами (полюсами T -матрицы, матрицы рассеяния и резольвенты на нефизических листах) оказываются нули подходящих усечений

матрицы рассеяния на физическом листе.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [41].

Опишем структуру статьи. В разделе 2 вводятся основные обозначения. В разделе 3 приводятся сведения об аналитических свойствах T -матрицы и матрицы рассеяния в задаче двух частиц, необходимые в последующих разделах. Раздел 4 посвящен описанию свойств компонент Фаддеева трехчастичной T -матрицы и матриц рассеяния на физическом листе. В частности, здесь выясняются области голоморфности полуэнергетических компонент Фаддеева и различных усечений матриц рассеяния, входящих в представления (6.8), (6.9) и (6.11). Справедливость этих представлений мы устанавливаем в дальнейшем только на некоторой части трехчастичной римановой поверхности, которая описывается в разделе 5. Аналитическое продолжение на нефизические листы уравнений Фаддеева проводится в разделе 6. В этом же разделе формулируются представления (6.8), (6.9) и (6.11) для аналитического продолжения матрицы $M(z)$, матриц рассеяния и резольвенты.

Автор благодарен С.Альбеверию, В.Б.Беляеву, К.А.Макарову и С.Л.Яковлеву за обсуждение результатов работы. Автор признателен также П.Экснеру за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Академии естественных наук Российской Федерации и Международного научного фонда (грант № RFB000).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы рассматриваем систему трех бесспиновых частиц. Движение центра масс предполагается отделенным. Для описания этой системы используем стандартные наборы относительных импульсов k_α, p_α [29]. Например,

$$\begin{aligned} k_1 &= \left[\frac{m_2 + m_3}{2m_2m_3} \right]^{1/2} \frac{m_2p_3 - m_3p_2}{m_2 + m_3}, \\ p_1 &= \left[\frac{m_1 + m_2 + m_3}{2m_1(m_2 + m_3)} \right]^{1/2} \frac{(m_2 + m_3)p_1 - m_1(p_2 + p_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m_α, p_α – массы и импульсы частиц. Выражения для k_α, p_α при $\alpha = 2, 3$ получаются из (2.1) путем циклической перестановки индексов. Обычно мы будем объединять относительные импульсы k_α, p_α в шестимерные векторы $P = \{k_\alpha, p_\alpha\}$. Выбор определенной пары $\{k_\alpha, p_\alpha\}$ фиксирует декартову систему координат в $\mathbf{R}^6$. Переход от одной пары импульсов к другой осуществляется преобразованием поворота в $\mathbf{R}^6$, $k_\alpha = c_{\alpha\beta}k_\beta + s_{\alpha\beta}p_\beta$, $p_\alpha = -s_{\alpha\beta}k_\beta + c_{\alpha\beta}p_\beta$, где коэффициенты $c_{\alpha\beta}, s_{\alpha\beta}$ зависят лишь от масс частиц [29], $-1 < c_{\alpha\beta} < 0$, $s_{\alpha\beta}^2 = 1 - c_{\alpha\beta}^2$, причем $c_{\beta\alpha} = c_{\alpha\beta}$, $s_{\beta\alpha} = -s_{\alpha\beta}$, $\beta \neq \alpha$.

В импульсном представлении гамильтониан H рассматриваемой системы трех частиц задается выражением $(Hf)(P) = P^2f(P) + \sum_{\alpha=1}^3(v_\alpha f)(P)$, $P^2 = k_\alpha^2 + p_\alpha^2$, $f \in \mathcal{H}_0 \equiv L_2(\mathbf{R}^6)$, где v_α – парные потенциалы, представляющие собой интегральные операторы по переменным k_α с ядрами $v_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha)$.

Для определенности все потенциалы v_α , $\alpha = 1, 2, 3$, мы считаем локальными. Это означает, что ядро v_α зависит лишь от разности переменных k_α и k'_α , $v_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha) = v_\alpha(k_\alpha - k'_\alpha)$. Будем рассматривать два варианта потенциалов v_α . В первом варианте $v_\alpha(k)$ – голоморфные функции переменной $k \in \mathbf{C}^3$, удовлетворяющие оценке

$$|v_\alpha(k)| \leq \frac{c}{(1 + |k|)^{\theta_0}} e^{a_0 |\operatorname{Im} k|} \quad \forall k \in \mathbf{C}^3 \quad (2.2)$$

с некоторыми константами $c > 0$, $a_0 > 0$ и $\theta_0 \in (3/2, 2)$. Во втором варианте потенциалы $v_\alpha(k)$ голоморфны по k лишь в полосе $W_{2b} = \{k : k \in \mathbf{C}^3, |\operatorname{Im} k| < 2b\}$ и подчиняются при $k \in W_{2b}$ оценке (2.2) с $a_0 = 0$:

$$|v_\alpha(k)| \leq \frac{c}{(1 + |k|)^{\theta_0}} \quad \forall k : |\operatorname{Im} k| < 2b. \quad (2.3)$$

Предполагаем, что в обоих вариантах $v_\alpha(-k) = \overline{v_\alpha(k)}$. Последнее условие гарантирует самосопряженность гамильтониана H на множестве $\mathcal{D}(H) = \{f : \int (1 + P^2)^2 |f(P)|^2 dP < \infty\}$ [24].

Отметим, что в первом варианте требования голоморфности $v_\alpha(k)$ во всем $\mathbf{C}^3$ и не более чем экспоненциального роста (2.2) по $|\operatorname{Im} k|$ означают финитность этих потенциалов в координатном представлении. Во втором варианте потенциалы $v_\alpha(k)$, записанные в координатном пространстве, убывают экспоненциально.

Через h_α , $(h_\alpha f)(k_\alpha) = k_\alpha^2 f(k_\alpha) + (v_\alpha f)(k_\alpha)$, обозначаем гамильтониан парной подсистемы α . Оператор h_α действует в $L_2(\mathbf{R}^3)$. Вследствие условий (2.2) и (2.3) его дискретный спектр $\sigma_d(h_\alpha)$ отрицателен и конечен [18]. Нумерацию собственных чисел $\lambda_{\alpha,j} \in \sigma_d(h_\alpha)$, $\lambda_{\alpha,j} < 0$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, $n_\alpha < \infty$, оператора h_α проводим с учетом их кратности: каждое собственное число встречается в нумерации столько раз, какова его кратность. Наибольшее из этих чисел обозначаем $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max} = \max_{\alpha,j} \lambda_{\alpha,j} < 0$. Через $\psi_{\alpha,j}(k_\alpha)$ обозначаем соответствующие собственные функции.

Под $\sigma_d(H)$ и $\sigma_c(H)$ подразумеваем соответственно дискретную и непрерывную компоненты спектра $\sigma(H)$ оператора H . При этом $\sigma_d(H) = (\lambda_{\min}, +\infty)$, где $\lambda_{\min} = \min_{\alpha,j} \lambda_{\alpha,j}$.

Обозначение H_0 используем для оператора кинетической энергии, $(H_0 f)(P) = P^2 f(P)$, обозначения $R_0(z)$ и $R(z)$ — для резольвент операторов H_0 и H , соответственно: $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ и $R(z) = (H - zI)^{-1}$, где в данном случае I — тождественный оператор в $\mathcal{H}_0$.

Пусть $M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha - v_\alpha R(z) v_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, — компоненты Фаддеева [24, 29] трехчастичной T -матрицы $T(z) = V - VR(z)V$, где $V = v_1 + v_2 + v_3$. Операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ подчиняются системе уравнений Фаддеева [24, 29]

$$M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\alpha(z) - \mathbf{t}_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z). \quad (2.4)$$

Оператор $\mathbf{t}_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, имеет ядро

$$\mathbf{t}_\alpha(P, P', z) = t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2) \delta(p_\alpha - p'_\alpha), \quad (2.5)$$

где $t_\alpha(k, k', z)$ — ядро парной T -матрицы $t_\alpha(z) = v_\alpha - v_\alpha r_\alpha(z) v_\alpha$, $r_\alpha(z) = (h_\alpha - z)^{-1}$.

Систему (2.4) удобно записывать в матричном виде

$$M(z) = \mathbf{t}(z) - \mathbf{t}(z) \mathbf{R}_0(z) \Upsilon M(z) \quad (2.6)$$

с $\mathbf{t}(z) = \operatorname{diag}\{\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z), \mathbf{t}_3(z)\}$, $\mathbf{R}_0(z) = \operatorname{diag}\{R_0(z), R_0(z), R_0(z)\}$. Через Υ мы обозначаем числовую (3×3) -матрицу с элементами $\Upsilon_{\alpha\beta} = 1 - \delta_{\alpha\beta}$. Под $M(z)$ подразумевается операторная матрица, составленная из компонент $M_{\alpha\beta}(z)$, $M = \{M_{\alpha\beta}\}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. При этом M , $\mathbf{t}$, $\mathbf{R}_0$ и Υ рассматриваются как операторы в гильбертовом

пространстве $\mathcal{G}_0 = \oplus_{\alpha=1}^3 L_2(\mathbf{R}^6)$. Через $\mathcal{Q}^{(k)}(z)$, $\mathcal{Q}^{(k)}(z) = (-\mathbf{t}(z)\mathbf{R}_0(z)\Upsilon)^k \mathbf{t}(z)$, будем обозначать итерации свободного члена $\mathcal{Q}^{(0)}(z) = \mathbf{t}(z)$ в (2.6).

Резольвента $R(z)$ гамильтониана H выражается через матрицу $M(z)$ по формуле [29]

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)\Omega M(z)\Omega^\dagger R_0(z), \quad (2.7)$$

где через Ω , $\Omega : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, мы обозначили оператор, задаваемый матрицей-строкой $\Omega = (1, 1, 1)$. При этом $\Omega^\dagger = \Omega^* = (1, 1, 1)^\dagger$. Здесь и далее значок “ $\dagger$ ” означает операцию транспонирования.

При описании аналитического продолжения уравнений (2.6) нам понадобится еще ряд обозначений.

Всюду под $\sqrt{z - \lambda}$, $z \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, понимаем главную ветвь функции $(z - \lambda)^{1/2}$. Через $\hat{q}$ обычно обозначаем единичный вектор в направлении $q \in \mathbf{R}^N$, $\hat{q} = q/|q|$, и через S^{N-1} — единичную сферу в $\mathbf{R}^N$, $\hat{q} \in S^{N-1}$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^N$ обозначается через $(\cdot, \cdot)$. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ применяется для обозначения скалярного произведения в гильбертовых пространствах.

Пусть $\mathcal{H}^{(\alpha, j)} = L_2(\mathbf{R}^3)$ и $\mathcal{H}^{(\alpha)} = \oplus_{j=1}^{n_\alpha} \mathcal{H}^{(\alpha, j)}$. Через Ψ_α обозначаем оператор, действующий из $\mathcal{H}^{(\alpha)}$ в $\mathcal{H}_0$ по формуле $(\Psi_\alpha f)(P) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \psi_{\alpha, j}(k_\alpha) f_j(p_\alpha)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n_\alpha})^\dagger$. Через Ψ_α^* обозначается оператор, сопряженный к Ψ_α . Обозначение Ψ будем использовать для блочно-диагонального матричного оператора, составленного из Ψ_α , $\Psi = \text{diag}\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$, и действующего из $\mathcal{H}_1 = \oplus_{\alpha=1}^3 \mathcal{H}^{(\alpha)}$ в $\mathcal{G}_0$. Через Ψ^* обозначаем оператор, сопряженный к Ψ . Аналогично операторам Ψ_α , Ψ_α^* , Ψ и Ψ^* введем операторы Φ_α , Φ_α^* , Φ и Φ^* , которые получаются из первых путем замены собственных функций дискретного спектра парных подсистем $\psi_{\alpha, j}(k_\alpha)$ на формфакторы $\phi_{\alpha, j}(k_\alpha) = (v_\alpha \psi_{\alpha, j})(k_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$.

Как известно [24, 29], парная T -матрица $t_\alpha(z)$ является аналитической операторнозначной функцией переменной $z \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$, имеющей в точках $z \in \sigma_d(h_\alpha)$ простые полюсы. Ее ядро допускает представление

$$t_\alpha(k, k', z) = - \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{\phi_{\alpha, j}(k) \overline{\phi_{\alpha, j}(k')}}{\lambda_{\alpha, j} - z} + \tilde{t}_\alpha(k, k', z), \quad (2.8)$$

где $\tilde{t}_\alpha(k, k', z)$ — функция, голоморфная относительно $z \in \mathbf{C} \setminus [0, +\infty)$, поэтому

$$\mathbf{t}_\alpha(z) = -\Phi_\alpha \mathbf{g}_\alpha(z) \Phi_\alpha^* + \tilde{\mathbf{t}}_\alpha(z), \quad (2.9)$$

где мы обозначили через $\tilde{\mathbf{t}}_\alpha(z)$ оператор с ядром $\tilde{t}_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2) \delta(p_\alpha - p'_\alpha)$ и через $\mathbf{g}_\alpha(z)$, $\mathbf{g}_\alpha(z) = \text{diag}\{g_{\alpha, 1}(z), \dots, g_{\alpha, n_\alpha}(z)\}$, — блочно-диагональную операторную матрицу с элементами $g_{\alpha, j}(z)$, представляющими собой операторы в $\mathcal{H}^{(\alpha, j)}$ с сингулярными ядрами

$$g_{\alpha, j}(p_\alpha, p'_\alpha, z) = \delta(p_\alpha - p'_\alpha) / (\lambda_{\alpha, j} - z + p_\alpha^2).$$

Ниже мы будем рассматривать сужения различных функций на энергетическую поверхность

$$k = \sqrt{z} \hat{k}, \quad \hat{k} \in S^2, \quad (2.10)$$

в задаче двух частиц и на энергетические поверхности

$$P = \sqrt{z} \hat{P}, \quad \hat{P} \in S^5, \quad (2.11)$$

$$p_\alpha = \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \hat{p}_{\alpha,j}, \quad \hat{p}_{\alpha,j} \in S^2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, n_\alpha, \quad (2.12)$$

в задаче трех тел. В последнем случае поверхность (2.11) называется трехчастичной, а поверхности (2.12) – двухчастичными.

Пусть $\mathcal{O}(\mathbf{C}^N)$ – преобразование Фурье пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^N$ (мы будем иметь дело с $N = 3$ или $N = 6$). Функция $f(q) \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^N)$ является голоморфной функцией переменной $q = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbf{C}^N$ и удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^{|m|}}{\partial q_1^{m_1} \dots \partial q_N^{m_N}} f(q) \right| \leq c_\theta(f) \exp(a |\operatorname{Im} q|) (1 + |q|)^{-\theta},$$

где a – радиус шара с центром в начале координат, содержащего носитель преобразования Фурье этой функции в $\mathbf{R}^N$, $|m| = m_1 + \dots + m_N$, и $|\operatorname{Im} q| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |\operatorname{Im} q_j|^2}$. В качестве θ может быть выбрано любое сколь угодно большое положительное число. При фиксированном $m = (m_1, \dots, m_N)$ коэффициент $c_\theta > 0$ зависит лишь от θ .

Рассмотрим оператор $j(z)$, реализующий сужение функции $f(k)$, $k \in \mathbf{R}^3$, на энергетическую поверхность (2.10) при $z = E \pm i0$, $E > 0$, и осуществляющий затем аналитическое продолжение, если это возможно, в область комплексных значений энергии z . На множестве $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$ оператор $j(z)$ действует по формуле

$$j(z)f(\hat{k}) = f(\sqrt{z}\hat{k}). \quad (2.13)$$

Его ядром является голоморфная обобщенная функция [42] $j(\hat{k}, k', z) = \delta(\sqrt{z}\hat{k} - k')$.

Через $j^\dagger(z)$ обозначается оператор, “транспонированный” по отношению к $j(z)$. Результатом применения $j^\dagger(z)$ к функциям $\varphi \in L_2(S^2)$ являются обобщенные функции над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$

$$(j^\dagger(z)\varphi)(k) = \int_{S^2} d\hat{k} \delta(k - \sqrt{z}\hat{k}) \varphi(\hat{k}) = \frac{\delta(|k| - \sqrt{z})}{z} \varphi(\hat{k}), \quad (2.14)$$

т. е.

$$(j^\dagger(z)\varphi, f) = \int_{S^2} d\hat{k} f(\sqrt{z}\hat{k}) \varphi(\hat{k}), \quad f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^3). \quad (2.15)$$

Отметим, что в терминах операторов $j(z)$ и $j^\dagger(z)$ парные матрицы рассеяния $s_\alpha(z)$, $s_\alpha(z) : L_2(S^2) \rightarrow L_2(S^2)$, записываются в следующем виде (индекс пары опускаем) [39]:

$$s(z) = \hat{I} + a_0(z)j(z)t(z)j^\dagger(z), \quad (2.16)$$

где $a_0(z) = -\pi i \sqrt{z}$, а $\hat{I}$ – тождественный оператор в $L_2(S^2)$. Область аналитичности $s(z)$, $z \in \mathbf{C}$, определяется в общем случае свойствами парного потенциала v (см., например, [3, 4], а также [39, 40]).

Пусть $J_{\alpha,j}(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, – оператор, осуществляющий сужение на энергетическую поверхность (2.12). Его действие на $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$ задается формулой

$$(J_{\alpha,j}(z)f)(\hat{p}_\alpha) = f(\sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \hat{p}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, n_\alpha.$$

Операторы $J_{\alpha,j}(z)$ обладают ядрами $J_{\alpha,j}(\hat{p}_\alpha, p'_\alpha, z) = \delta(\sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \hat{p}_\alpha - p'_\alpha)$.

Через $J_0(z)$ обозначаем оператор, отвечающий сужению на энергетическую поверхность (2.11). На $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ этот оператор определяется равенством $(J_0(z)f)(\hat{P}) = f(\sqrt{z}\hat{P})$. Его ядро имеет вид $J_0(\hat{P}, P', z) = (\sqrt{z})^{-5} \delta(\sqrt{z}\hat{P} - P') = \delta(\sqrt{z} - |P'|) \delta(\hat{P}, \hat{P}')$.

Обозначения $J_{\alpha,j}^\dagger(z)$ и $J_0^\dagger(z)$ будем использовать для соответствующих “транспонированных” операторов. Их действие определяется подобно (2.14), (2.15) формулами

$$\begin{aligned} (J_{\alpha,j}^\dagger(z)\varphi)(p_\alpha) &= \int_{S^2} d\hat{p}'_\alpha \delta(p_\alpha - \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \hat{p}'_\alpha) \varphi(\hat{p}'_\alpha), \quad \varphi \in \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)}, \\ (J_0^\dagger(z)\varphi)(P) &= \int_{S^5} d\hat{P}' \delta(P - \sqrt{z}\hat{P}') \varphi(\hat{P}'), \quad \varphi \in \hat{\mathcal{H}}_0, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)} \equiv L_2(S^2)$ и $\hat{\mathcal{H}}_0 \equiv L_2(S^5)$. При этом $J_{\alpha,j}^\dagger(z)\varphi$ и $J_0^\dagger(z)\varphi$ оказываются элементами пространств $\mathcal{O}'(\mathbf{C}^3)$ и $\mathcal{O}'(\mathbf{C}^6)$ обобщенных аналитических функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$ и $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$, соответственно.

Из операторов $J_{\alpha,j}$ и $J_{\alpha,j}^\dagger$ составляем блочно-диагональные матрицы $J^{(\alpha)}(z) = \text{diag}\{J_{\alpha,1}(z), \dots, J_{\alpha,n_\alpha}(z)\}$ и $J^{(\alpha)\dagger}(z) = \text{diag}\{J_{\alpha,1}^\dagger(z), \dots, J_{\alpha,n_\alpha}^\dagger(z)\}$. В свою очередь, из последних образуем операторы $J_1(z) = \text{diag}\{J^{(1)}(z), J^{(2)}(z), J^{(3)}(z)\}$ и $J_1^\dagger(z) = \text{diag}\{J^{(1)\dagger}(z), J^{(2)\dagger}(z), J^{(3)\dagger}(z)\}$. Действие операторов $J^{(\alpha)}(z)$ и $J_1(z)$ на элементы пространств соответственно $\mathcal{O}^{(\alpha)} = \times_{\alpha=1}^{n_\alpha} \mathcal{O}^{(\alpha,j)}$, $\mathcal{O}^{(\alpha,j)} \equiv \mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$, и $\mathcal{O}_1 = \times_{\alpha=1}^3 \mathcal{O}^{(\alpha)}$ понятно из определения операторов $J_{\alpha,j}(z)$. Операторы $J^{(\alpha)\dagger}(z)$ действуют из $\hat{\mathcal{H}}^{(\alpha)} \equiv \oplus_{j=1}^{n_\alpha} \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)}$ в пространство аналитических обобщенных функций $\mathcal{O}^{(\alpha)'} \equiv \mathcal{O}'(\mathbf{C}^3)$ над $\mathcal{O}^{(\alpha)}$. В свою очередь, оператор $J_1^\dagger(z)$ действует из $\hat{\mathcal{H}}_1 = \oplus_{\alpha=1}^3 \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)}$ в пространство аналитических обобщенных функций $\mathcal{O}'_1$ над $\mathcal{O}_1$.

Наконец, мы будем использовать блочно-диагональные операторные (3×3) -матрицы $J_0(z) = \text{diag}\{J_0(z), J_0(z), J_0(z)\}$ и $J_0^\dagger(z) = \text{diag}\{J_0^\dagger(z), J_0^\dagger(z), J_0^\dagger(z)\}$, построенные из операторов $J_0(z)$ и $J_0^\dagger(z)$, соответственно, а также операторы $J(z) = \text{diag}\{J_0(z), J_1(z)\}$ и $J^\dagger(z) = \text{diag}\{J_0^\dagger(z), J_1^\dagger(z)\}$. Действие этих операторов ясно из определений операторов $J_0, J_1, J_0^\dagger$ и $J_1^\dagger$. В частности, оператор $J^\dagger(z)$ действует из $\hat{\mathcal{G}}_0 = \oplus_{\alpha=1}^3 \hat{\mathcal{H}}_0$ в пространство $\times_{\alpha=1}^3 \mathcal{O}'(\mathbf{C}^6)$.

Тождественные операторы в пространствах $\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\mathcal{G}}_0, \hat{\mathcal{H}}_1$ и $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ будут обозначаться соответственно через $\hat{I}_0, \hat{I}_0, \hat{I}_1$ и $\hat{I}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ T -МАТРИЦЫ И МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ЧАСТИЦ

В данном разделе мы приведем некоторые сведения об аналитических свойствах парных T -матриц, которые понадобятся нам в дальнейшем при рассмотрении задачи трех тел. Отметим, что эти свойства хорошо известны (см., например, [4, 3], а также [36]) для широкого класса потенциалов $v_\alpha(x)$. В сущности, мы хотим привести здесь лишь представление для двухчастичной T -матрицы на нефизическом листе, являющееся частным случаем явных представлений, найденных в работе автора [39] (см. теорему 2 в [39] и комментарии к ней) для более общей ситуации аналитического продолжения T -матрицы на нефизические листы римановой поверхности энергии в многоканальной задаче с бинарными каналами произвольной размерности.

На протяжении раздела будем рассматривать фиксированную парную подсистему. Поэтому ее индекс в обозначениях опускается. Изложение будем вести для первого варианта потенциалов (2.2). Там, где необходимо, отличающиеся утверждения для второго варианта (2.3) будем приводить в скобках. При этом будем пользоваться обозначением

$$\mathcal{P}_b = \left\{ z : \operatorname{Re} z > -b^2 + \frac{1}{4b^2}(\operatorname{Im} z)^2 \right\}. \quad (3.1)$$

Напомним, что риманова поверхность энергии в задаче двух частиц совпадает с римановой поверхностью функции $z^{1/2}$. На физическом листе $z^{1/2} = \sqrt{z}$, а на нефизическом $-z^{1/2} = -\sqrt{z}$. Для этих листов используем обозначения соответственно Π_0 и Π_1 .

Представление для продолжения $t(z)$ на нефизический лист, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, описывается в следующем утверждении, представляющем собой одноканальный вариант теоремы 2 из [39].

ТЕОРЕМА 1. *T -матрица $t(z)$ допускает аналитическое продолжение по переменной z на лист Π_1 (на область $\mathcal{P}_b \cap \Pi_1$) как ограниченный оператор в $L_2(\mathbf{R}^3)$. Результат этого продолжения $t(z)|_{\Pi_1}$ ($t(z)|_{\mathcal{P}_b \cap \Pi_1}$) выражается через T - и S -матрицы на физическом листе:*

$$t(z)|_{\Pi_1} = t(z) - a_0(z)\tau(z), \quad (3.2)$$

где $\tau(z) = (tj^\dagger s^{-1}jt)(z)$. При этом ядро $t(k, k', z)|_{\Pi_1}$ голоморфно по совокупности переменных $k, k' \in \mathbf{C}^3$, $z \in \Pi_1 \setminus (\sigma_{\text{res}} \cup \sigma_d(h))$ ($k, k' \in W_b, z \in \mathcal{P}_b \cap \Pi_1 \setminus (\sigma_{\text{res}} \cup \sigma_d(h))$), где σ_{res} — множество точек $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\sigma(h)}$ ($z \in \mathcal{P}_b \setminus \overline{\sigma(h)}$), для которых оператор $[s(z)]^{-1}$ не существует.

Подчеркнем, что для второго варианта потенциалов (2.3) существование продолжения $t(z)$ на нефизический лист гарантировано теоремой 1 лишь для области $\mathcal{P}_b \cap \Pi_1$, ограниченной параболой $\operatorname{Im} \sqrt{z} = b$, внутри которой функция $v(\sqrt{z}(\hat{k} - \hat{k}'))$ голоморфна по z при произвольных $\hat{k}, \hat{k}' \in S^2$. Отметим также, что оператор $(jtj^\dagger)(z)$, входящий в (2.16), компактен в $C(S^2)$ [39]. Следовательно, на области его аналитичности $\Pi_0 \setminus \overline{\sigma(h)}$ ($\mathcal{P}_b \cap \Pi_0 \setminus \overline{\sigma(h)}$) на физическом листе к уравнению

$$s(z)\mathcal{A} = 0 \quad (3.3)$$

применима альтернатива Фредгольма [18] (см. [39]). Это означает, что множество σ_{res} счетно и не имеет точек накопления в $\mathbf{C} \setminus \overline{\sigma(h)}$ ($\mathcal{P}_b \setminus \overline{\sigma(h)}$).

Напомним, что на физическом листе Π_0 парная T -матрица допускает представление (2.8). Из уравнения Липпмана–Швингера для ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\phi_j(k) = - \int_{\mathbf{R}^3} dq v(k, q) \frac{1}{q^2 - \lambda_j} \phi_j(q), \quad \lambda_j < 0, \quad (3.4)$$

следует, что формфактор $\phi_j(k)$ допускает аналитическое продолжение по k на $\mathbf{C}^3$ (на W_{2b}) и при этом удовлетворяет оценке типа (2.2), где следует заменить θ_0 на число θ , $1 <$

$\theta < \theta_0$, которое может быть выбрано сколь угодно близким к θ_0 [24]. Отсюда следует, что собственная функция

$$\psi_j(k) = -\frac{\phi_j(k)}{k^2 - \lambda_j} \quad (3.5)$$

оператора h также допускает аналитическое продолжение на $\mathbf{C}^3$ (на W_{2b}) с исключенным множеством $\{k \in \mathbf{C}^3 : k^2 = \lambda_j\}$, где $\psi_j(k)$ имеет особенность (превращающуюся при $k = \sqrt{z}\hat{k}$, $\hat{k} \in S^2$, в полюс по энергии z при $z = \lambda_j$).

Регулярная часть $\tilde{t}(k, k'z)$ ядра $t(z)$ на физическом листе голоморфна по $k, k' \in \mathbf{C}^3$, $z \in \Pi_0$ ($k, k' \in W_b$, $z \in \mathcal{P}_b \cap \Pi_0$) и допускает оценку

$$|\tilde{t}(k, k'z)| < c(1 + |k - k'|)^{-\theta} \exp[a(|\operatorname{Im} k| + |\operatorname{Im} k'|)]$$

с произвольными $\theta \in (1, \theta_0)$.

Что касается продолжения $t(z)|_{\Pi_1}$, то из (3.2) следует, что точки $z \in \sigma_d(h)$ дают ему, вообще говоря, полюсы первого порядка. Легко, однако, проверить, что если собственное число $\lambda \in \sigma_d(h)$ является простым, то соответствующие сингулярности обоих слагаемых (3.2) компенсируются и полюс у $t(z)|_{\Pi_1}$ при $z = \lambda$ не возникает. Из аналитической альтернативы Фредгольма [18] для уравнения (3.3) следует лишь, что полюсы $t(z)|_{\Pi_1}$ при $z \in \sigma_{\text{res}}$ имеют конечный порядок, но не более того. Нетрудно показать, что если $\mathcal{A}(\hat{k})$ – нетривиальное решение уравнения (3.3) для $z \in \sigma_{\text{res}}$, $z \notin \sigma_d(h)$, то уравнение Шредингера имеет при этом z ненулевое (резонансное) решение ψ_{res} . Его асимптотика в координатном представлении оказывается экспоненциально растущей: $\psi_{\text{res}}(x) = x \rightarrow \infty (\mathcal{A}(-\hat{x}) + o(1)) \frac{e^{-i\sqrt{z}|x|}}{|x|}$. Функция $\psi_{\text{res}}(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, представляет собой так называемый гамовский вектор, отвечающий резонансу при энергии z (см., например, [3, 6, 7]). Функция $\mathcal{A}(\hat{k})$ имеет смысл амплитуды развала резонансного состояния³⁾.

Формула для аналитического продолжения на нефизический лист Π_1 (на множество $\mathcal{P}_b \cap \Pi_1$) для матрицы рассеяния следует непосредственно из (3.2) (см. [39]):

$$s(z)|_{\Pi_1} = \mathcal{E}[s(z)]^{-1}\mathcal{E}, \quad (3.6)$$

где $\mathcal{E}$ обозначает инверсию в $L_2(S^2)$, $(\mathcal{E}f)(\hat{k}) = f(-\hat{k})$.

Используя (3.2), легко получить явное представление в терминах физического листа и для аналитического продолжения на лист Π_1 (на $\mathcal{P}_b \cap \Pi_1$) ядра резольвенты⁴⁾ $r(z)$:

$$r(z)|_{\Pi_1} = r + a_0(I - rv)\mathbf{j}^\dagger s^{-1}\mathbf{j}(I - vr). \quad (3.7)$$

Это продолжение понимается в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$: продолжается билинейная форма $\Phi(z) = (r(z)f_1, f_2) \equiv \int_{\mathbf{R}^3} dk \int_{\mathbf{R}^3} dk' f_2(k)r(k, k', z)f_1(k')$.

³⁾ Аналогичное утверждение имеет место и в многоканальной задаче с m бинарными каналами: решение $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m)$ уравнения $s_l(z)\mathcal{A} = 0$ при резонансной энергии $z \in \sigma_{\text{res}}^l$ (в обозначениях [39]) дает амплитуды (коэффициенты при сферических волнах в координатной асимптотике канальных компонент решения уравнения Шредингера) $\mathcal{A}_1(\hat{k}_1), \mathcal{A}_2(\hat{k}_2), \dots, \mathcal{A}_m(\hat{k}_m)$ развала резонанса на листе Π_l в каналы $1, 2, \dots, m$, соответственно.

⁴⁾ Представление для аналитического продолжения ядер резольвенты многоканального гамильтониана на лист Π_l в обозначениях [39] имеет вид $r(z)|_{\Pi_l} = r + (I - rv)\mathbf{J}^\dagger A L s_l^{-1} \mathbf{J}(I - vr)$.

4. МАТРИЦА $M(z)$ И ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ НА ФИЗИЧЕСКОМ ЛИСТЕ

Сначала напомним вкратце основные свойства [24, 29] уравнений Фаддеева (2.6) для матрицы $M(z)$, а также свойства ядер $M_{\alpha\beta}(P, P', z)$ при вещественных аргументах $P, P' \in \mathbf{R}^6$. Чтобы сформулировать эти свойства, приведем следующее определение [24].

Говорят, что операторнозначная функция $Q_{\alpha\beta}(z)$ переменной $z \in \mathbf{C}$, $Q_{\alpha\beta}(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, является функцией типа $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, если она представляется в виде

$$Q_{\alpha\beta}(z) = \mathcal{F}_{\alpha\beta}(z) + \Phi_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha}(z) \mathcal{I}_{\alpha\beta}(z) + \\ + \mathcal{J}_{\alpha\beta}(z) \mathbf{g}_{\beta}(z) \Phi_{\beta}^* + \Phi_{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha}(z) \mathcal{K}_{\alpha\beta}(z) \mathbf{g}_{\beta}(z) \Phi_{\beta}^*. \quad (4.1)$$

При этом операторнозначные функции $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, $\mathcal{I}_{\alpha\beta}(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}^{(\alpha)}$, $\mathcal{J}_{\alpha\beta}(z) : \mathcal{H}^{(\beta)} \rightarrow \mathcal{H}_0$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}(z) : \mathcal{H}^{(\beta)} \rightarrow \mathcal{H}^{(\alpha)}$ называются компонентами функции $Q_{\alpha\beta}(z)$. Если $Q_{\alpha\beta}(z)$ является интегральным оператором, то его ядро называется ядром типа $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$.

Пусть $\mathcal{N}(P, \theta) = \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} (1 + |p_{\alpha}|)^{-\theta} (1 + |p_{\beta}|)^{-\theta}$. Функция $Q(z)$ типа $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ называется функцией класса $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta, \mu)$, если ее компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{I}_{\alpha\beta}$, $\mathcal{J}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$ являются интегральными операторами и для ядер $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, P', z)$ при $P, P', \Delta P, \Delta P' \in \mathbf{R}^6$ выполняются оценки

$$|\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, P', z)| \leq c \mathcal{N}(P, \theta) (1 + p_{\beta}'^2)^{-1}, \quad (4.2)$$

$$|\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P + \Delta P, P' + \Delta P', z + \Delta z) - \mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, P', z)| \leq \\ \leq c \mathcal{N}(P, \theta) (1 + p_{\beta}'^2)^{-1} (|\Delta P|^{\mu} + |\Delta P'|^{\mu} + |\Delta z|^{\mu}) \quad (4.3)$$

с некоторыми $c > 0$, а ядра $\mathcal{I}_{\alpha, j; \beta}(p_{\alpha}, P', z)$, $\mathcal{J}_{\alpha; \beta, k}(P, p_{\beta}', z)$ и $\mathcal{K}_{\alpha, j; \beta, k}(p_{\alpha}, p_{\beta}', z)$ удовлетворяют оценкам, которые получаются из (4.2) и (4.3), если положить соответственно $k_{\alpha} = 0$, $k'_{\beta} = 0$ или одновременно $k_{\alpha} = 0$, $k'_{\beta} = 0$.

Пусть $Q^{(n)}(z)$ – итерации свободного члена уравнений (2.6). В отличие от $Q^{(0)}(z) = \mathbf{t}(z)$ ядра операторов $Q^{(n)}(z)$ при $n > 0$ не содержат δ -функций. Более того, из представления (2.9) для оператора $\mathbf{t}_{\alpha}(z)$, явно выделяющего вклад дискретного спектра парных подсистем, следует, что матричные элементы $Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, операторов $Q^{(n)}(z)$ с $n \geq 1$ оказываются функциями типа $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$. Их компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$, $\mathcal{I}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$, $\mathcal{J}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ и $\mathcal{K}_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ при $z \in \mathbf{C} \setminus [\lambda_{\min}, +\infty)$ являются ограниченными интегральными операторами, зависящими от z аналитически. В случае потенциалов (2.2) и (2.3) гильдеровский показатель гладкости μ их ядер по переменным P, P', p_{α} и p'_{β} при $z \notin [\lambda_{\min}, +\infty)$ равен единице. Если $n \leq 3$, то при $\text{Im } z \rightarrow 0$, $\text{Re } z \in [\lambda_{\min}, +\infty)$ ядра $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^{(n)}$, $\mathcal{I}_{\alpha, j; \beta}^{(n)}$, $\mathcal{J}_{\alpha; \beta, k}^{(n)}$ и $\mathcal{K}_{\alpha, j; \beta, k}^{(n)}$ имеют так называемые *второстепенные* (трехчастичные) особенности (см. [24, 29]), ослабляющиеся по мере увеличения n . При $n \geq 4$ такие особенности не возникают вовсе и эти ядра оказываются гильдеровскими функциями всех своих переменных, включая предельные значения $z = E \pm i0$, $E \in (\lambda_{\min}, +\infty)$. Более точное утверждение [24] таково: операторнозначные функции $Q_{\alpha\beta}^{(n)}(z)$ при $n \geq 4$ принадлежат типу $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta, \mu)$, $0 < \theta < \theta_0$, $0 < \mu < \frac{1}{8}$ (равномерно по z), меняющемуся на произвольном ограниченном множестве в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом по лучу $[\lambda_{\min}, +\infty)$.

При этом в качестве θ можно выбирать любое число, сколь угодно близкое к θ_0 , так что вместо $M(z)$ оказывается удобным [24] перейти к новой неизвестной $\mathcal{W}(z) = M(z) - \sum_{n=0}^3 \mathcal{Q}^{(n)}(z)$, подчиняющейся уравнению

$$\mathcal{W}(z) = \mathcal{W}^{(0)}(z) - \mathbf{t}(z)\mathbf{R}_0(z)\Upsilon\mathcal{W}(z), \quad (4.4)$$

аналогичному (2.6), но с другим свободным членом $\mathcal{W}^{(0)}(z) = \mathcal{Q}^{(4)}(z)$.

Погружение уравнения (4.4.) в банахово пространство $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ (описание этого пространства см. в [24, с. 34] или [29, с. 90]) приводит к следующей важной теореме.

ТЕОРЕМА 2. (Фаддеев [24]). *Единственным решением уравнений (2.6) при $z \notin \overline{\sigma_d(H)}$ является $M(z)$ вида*

$$M(z) = \sum_{n=0}^3 \mathcal{Q}^{(n)}(z) + \mathcal{W}(z), \quad (4.5)$$

где операторнозначная функция $\mathcal{W}(z)$ голоморфна по z при $z \notin \overline{\sigma(H)}$, а ее компоненты $\mathcal{W}_{\alpha\beta}(z)$ принадлежат классам $\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\theta, \mu)$, $\frac{3}{2} < \theta < \theta_0$, $0 < \mu < \frac{1}{8}$ (равномерно по z), меняющимся на произвольном ограниченном множестве в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом по лучу $[\lambda_{\min}, +\infty)$ и удаленными окрестностями точек из $\sigma_d(H)$.

Напомним теперь строение оператора рассеяния $\mathbf{S}$ [24, 29] для системы трех частиц. С этой целью введем операторнозначную функцию $\mathcal{T}(z)$, $\mathcal{T}(z) : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, переменной $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\sigma(H)}$:

$$\mathcal{T}(z) \equiv \begin{pmatrix} \Omega M(z)\Omega^\dagger & \Omega M(z)\Upsilon\Psi \\ \Psi^*\Upsilon M(z)\Omega^\dagger & \Psi^*(\Upsilon\mathbf{v} + \Upsilon M(z)\Upsilon)\Psi \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{v} = \text{diag}\{v_1, v_2, v_3\}$. При этом $\mathcal{T}_{00}(z) = T(z)$, $\mathcal{T}_{00}(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$. Остальные компоненты $\mathcal{T}_{01}(z) : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0$, $\mathcal{T}_{10}(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{T}_{11}(z) : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ выражаются через операторы перехода [29] (см. также [34]) $U_0(z) = \Omega M(z)\Upsilon$, $U_0^\dagger = \Upsilon M(z)\Omega^\dagger$ и $U(z) = \Upsilon\mathbf{v} + \Upsilon M(z)\Upsilon$: $\mathcal{T}_{01} = U_0\Psi$, $\mathcal{T}_{10} = \Psi^*U_0^\dagger$ и $\mathcal{T}_{11} = \Psi^*U\Psi$. Оператор $\mathcal{T}(z)$ является матричным интегральным оператором, свойства ядер $\mathcal{T}_{00}(P, P', z)$, $\mathcal{T}_{\alpha, i; 0}(p_\alpha, P', z)$, $\mathcal{T}_{0; \beta, j}(P, p'_\beta, z)$ и $\mathcal{T}_{\alpha, i; \beta, j}(p_\alpha, p'_\beta, z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$, $\beta = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\beta$, которого, включая предельные точки $z = E \pm i0$, $E > \lambda_{\min}$, определяются теоремой 2.

Через $\hat{\mathcal{T}}(z)$, $\hat{\mathcal{T}}(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$, будем обозначать аналитическое продолжение в $\mathbf{C}^\pm$ (см. теоремы 3, 6 и 7) операторов $\hat{\mathcal{T}}(E \pm i0)$, ядра которых имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{T}}(E \pm i0))_{00}(\hat{P}, \hat{P}') &= \mathcal{T}_{00}(\pm\sqrt{E}\hat{P}, \pm\sqrt{E}\hat{P}', E \pm i0), \quad E > 0, \\ (\hat{\mathcal{T}}(E \pm i0))_{0; \beta, j}(\hat{P}, \hat{p}'_\beta) &= \mathcal{T}_{0; \beta, j}(\pm\sqrt{E}\hat{P}, \pm\sqrt{E - \lambda_{\beta, j}}\hat{p}'_\beta, E \pm i0), \quad E > 0, \\ (\hat{\mathcal{T}}(E \pm i0))_{\alpha, i; 0}(\hat{p}_\alpha, \hat{P}') &= \mathcal{T}_{\alpha, i; 0}(\pm\sqrt{E - \lambda_{\alpha, i}}\hat{p}_\alpha, \pm\sqrt{E}\hat{P}', E \pm i0), \quad E > 0, \\ (\hat{\mathcal{T}}(E \pm i0))_{\alpha, i; \beta, j}(\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) &= \mathcal{T}_{\alpha, i; \beta, j}(\pm\sqrt{E - \lambda_{\alpha, i}}\hat{p}_\alpha, \pm\sqrt{E - \lambda_{\beta, j}}\hat{p}'_\beta, E \pm i0), \\ &E > \max\{\lambda_{\alpha, i}, \lambda_{\beta, j}\}. \end{aligned}$$

Считаем, что по определению произведение $(\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J}^\dagger)(z)$ совпадает с $\hat{T}(z)$,

$$(\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J}^\dagger)(z) = \begin{pmatrix} (\mathbf{J}_0\mathcal{T}_{00}\mathbf{J}_0^\dagger)(z) & (\mathbf{J}_0\mathcal{T}_{01}\mathbf{J}_1^\dagger)(z) \\ (\mathbf{J}_1\mathcal{T}_{10}\mathbf{J}_0^\dagger)(z) & (\mathbf{J}_1\mathcal{T}_{11}\mathbf{J}_1^\dagger)(z) \end{pmatrix} \equiv \hat{T}(z). \quad (4.7)$$

Элементы матрицы $(\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J}^\dagger)(z)$ выражаются через амплитуды различных процессов, имеющих место в рассматриваемой системе трех частиц [29].

Оператор рассеяния $\mathbf{S}$ является унитарным оператором в пространстве $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ и так же, как и $\mathbf{T}$, обладает естественной блочной структурой. Его компоненты $\mathbf{S}_{00}$, $\mathbf{S}_{0;\beta,j}$, $\mathbf{S}_{\alpha,i;0}$, $\mathbf{S}_{\alpha,i;\beta,j}$ имеют ядра соответственно

$$\mathbf{S}_{00}(P, P') = \delta(P - P') - 2\pi i \delta(P^2 - P'^2) \mathcal{T}_{00}(P, P', P'^2 + i0), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{S}_{0;\beta,j}(P, p'_\beta) = -2\pi i \delta(P^2 - p'^2_\beta - \lambda_{\beta,j}) \mathcal{T}_{0;\beta,j}(P, p'_\beta, \lambda_{\beta,j} + p'^2_\beta + i0), \quad (4.9)$$

$$\mathbf{S}_{\alpha,i;0}(p_\alpha, P') = -2\pi i \delta(\lambda_{\alpha,i} + p_\alpha^2 - P'^2) \mathcal{T}_{\alpha,i;0}(p_\alpha, P', P'^2 + i0), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\alpha,i;\beta,j}(p_\alpha, p'_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(p_\alpha - p'_\beta) - 2\pi i \delta(\lambda_{\alpha,i} + p_\alpha^2 - \lambda_{\beta,j} - p'^2_\beta) \times \\ &\times \mathcal{T}_{\alpha,i;\beta,j}(p_\alpha, p'_\beta, \lambda_{\beta,j} + p'^2_\beta + i0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Матрицы рассеяния возникают из $\mathbf{S}$ в спектральном представлении для H и оказываются операторами, действующими на “срезе” (при фиксированной энергии) пространства $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ в соответствующем прямом интеграле Неймана [28]. Выделению в $\mathbf{S}$ матрицы рассеяния отвечают, в сущности, замена переменных $|P|^2 \rightarrow E$, $\lambda_{\alpha,i} + p_\alpha^2 \rightarrow E$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$, в соотношениях (4.8)–(4.11) и факторизация зависимости ядер $\mathbf{S}$ от энергий E, E' ,

$$\mathbf{S}(E, E') = -\pi i \delta(E - E') \tilde{\vartheta}(E) S'(E + i0) \tilde{\vartheta}(E'), \quad (4.12)$$

где $\tilde{\vartheta}(E)$ – диагональная матрица-функция, составленная из функций Хевисайда $\vartheta(E)$ и $\vartheta(E - \lambda_{\beta,j})$, $\tilde{\vartheta}(E) = \text{diag}\{\vartheta(E), \vartheta(E - \lambda_{1,1}), \dots, \vartheta(E - \lambda_{1,n_1}), \vartheta(E - \lambda_{2,1}), \dots, \vartheta(E - \lambda_{2,n_2}), \vartheta(E - \lambda_{3,1}), \dots, \vartheta(E - \lambda_{3,n_3})\}$. Под $S'(z)$ при $z \in \mathbf{C}$ мы понимаем операторнозначную функцию $S'(z) = A^{-1}(z) \hat{\mathbf{I}} + \hat{T}(z)$. Здесь и всюду далее $A(z) = \text{diag}\{A_0(z), A_1(z)\}$ с $A_0(z) = -\pi i z^2$ и $A_1(z) = \text{diag}\{A^{(1)}(z), A^{(2)}(z), A^{(3)}(z)\}$, где, в свою очередь, $A^{(\alpha)}(z) = \text{diag}\{A_{\alpha,1}(z), \dots, A_{\alpha,n_\alpha}(z)\}$ с $A_{\alpha,j}(z) = -\pi i \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}$.

Проводя дальнейшую факторизацию, $S'(z) = S(z) A^{-1}(z) = A^{-1}(z) S^\dagger(z)$, отвечающую выделению в (4.12) множителя $-\pi i A^{-1}(E + i0)$ в качестве производной меры в интеграле Неймана для $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ [28], приходим к матрицам рассеяния

$$S(z) = \hat{\mathbf{I}} + (\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J}^\dagger A)(z) \quad \text{и} \quad S^\dagger(z) = \hat{\mathbf{I}} + (A\mathbf{J}\mathbf{T}\mathbf{J}^\dagger)(z). \quad (4.13)$$

В отличие от [28] в настоящей работе нам удобнее рассматривать именно такую, несимметризованную, форму матриц рассеяния. Матрицы $S(z)$ и $S^\dagger(z)$ представляют собой операторы, действующие в $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$. При $z = E + i0$, $E > 0$, они унитарны. При $z = E + i0$, $E < 0$, унитарными в $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ оказываются усечения $S(z)$ и $S^\dagger(z)$, отвечающие числу открытых каналов, а именно матрицы $\hat{S}(E) = \hat{\mathbf{I}} + \tilde{\vartheta}(E)(S(E + i0) - \hat{\mathbf{I}})\tilde{\vartheta}(E)$ и $\hat{S}^\dagger(E) = \hat{\mathbf{I}} + \tilde{\vartheta}(E)(S^\dagger(E + i0) - \hat{\mathbf{I}})\tilde{\vartheta}(E)$. Из (4.13) следует, что оператор $\mathbf{T}$ является своего рода “многоканальной T -матрицей” (ср. с [39]) для системы трех частиц.

Отметим, что матрицу $\mathcal{T}(z)$ в (4.13) можно заменить матрицей $\mathcal{T}^\dagger(z)$, получающейся из $\mathcal{T}(z)$ путем замены $\Upsilon \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} \Upsilon$ (соответственно $U \rightarrow U^\dagger = \mathbf{v} \Upsilon + \Upsilon M \Upsilon$) во второй компоненте нижней строки (4.6). Чтобы показать, что $(\mathbf{J} \mathcal{T}^\dagger \mathbf{J}^\dagger)(z) = (\mathbf{J} \mathcal{T} \mathbf{J}^\dagger)(z)$, достаточно убедиться в том, что при $z = E \pm i0$, $E > \lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$,

$$(\mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon \mathbf{v} \Psi \mathbf{J}_1^\dagger)(z) = (\mathbf{J}_1 \Psi^* \mathbf{v} \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger)(z). \quad (4.14)$$

Действительно, согласно (3.4) и (3.5),

$$\begin{aligned} (\Psi^* \Upsilon \mathbf{v} \Psi)_{\alpha,i;\beta,j}(p_\alpha, p'_\beta) &= \\ &= -\frac{1 - \delta_{\alpha\beta}}{|s_{\alpha\beta}|^3} \frac{\bar{\phi}_{\alpha,i}(\tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(p_\alpha, p'_\beta)) \phi_{\beta,j}(\tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(p'_\beta, p_\alpha))}{[\tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(p_\alpha, p'_\beta)]^2 - \lambda_{\alpha,i}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} (\Psi^* \mathbf{v} \Upsilon \Psi)_{\alpha,i;\beta,j}(p_\alpha, p'_\beta) &= \\ &= -\frac{1 - \delta_{\beta\alpha}}{|s_{\alpha\beta}|^3} \frac{\bar{\phi}_{\alpha,i}(\tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(p_\alpha, p'_\beta)) \phi_{\beta,j}(\tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(p'_\beta, p_\alpha))}{[\tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(p'_\beta, p_\alpha)]^2 - \lambda_{\beta,j}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

$$\tilde{k}_\gamma^{(\delta)}(q, q') = \frac{-c_{\gamma\delta} q + q'}{s_{\gamma\delta}}, \quad \gamma, \delta = 1, 2, 3, \quad (4.17)$$

$q, q' \in \mathbf{R}^3$ (в дальнейшем $q, q' \in \mathbf{C}^3$). Нетрудно видеть, что на энергетических поверхностях $|p_\alpha| = \sqrt{E - \lambda_{\alpha,i}}$, $|p'_\beta| = \sqrt{E - \lambda_{\beta,j}}$, $E > \lambda_{\alpha,i}$, $E > \lambda_{\beta,j}$, знаменатели (4.15) и (4.16) совпадают,

$$\begin{aligned} (\tilde{k}_\alpha^{(\beta)})^2 - \lambda_{\alpha,i} &= (\tilde{k}_\beta^{(\alpha)})^2 - \lambda_{\beta,j} = \frac{1}{|s_{\alpha\beta}|^2} \left(E - \lambda_{\alpha,i} + E - \lambda_{\beta,j} - \right. \\ &\quad \left. - 2c_{\alpha\beta} \sqrt{E - \lambda_{\alpha,i}} \sqrt{E - \lambda_{\beta,j}} (\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) - s_{\alpha\beta}^2 E \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

При этом выражение (4.18) при $E > \lambda_{\alpha,i}$, $E > \lambda_{\beta,j}$ в нуль не обращается (см. лемму 2). Из (4.15), (4.16) и (4.18) немедленно следует (4.14).

Наряду с $S(z)$ и $S^\dagger(z)$ нами будут рассматриваться также *усеченные* матрицы рассеяния

$$S_l(z) \equiv \hat{\mathbf{I}} + (\tilde{L} \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{J}^\dagger L A)(z) \quad \text{и} \quad S_l^\dagger(z) \equiv \hat{\mathbf{I}} + (A L \mathbf{J} \mathbf{T} \mathbf{J}^\dagger \tilde{L})(z), \quad (4.19)$$

где мультииндекс

$$l = (l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}) \quad (4.20)$$

имеет компоненты $l_0 = 0$ или $l_0 = \pm 1$ и $l_{\alpha,j} = 0$ или $l_{\alpha,j} = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$. Через L и $\tilde{L}$ обозначаем диагональные матрицы

$$L = \text{diag}\{l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\} \quad (4.21)$$

и

$$\tilde{L} = \text{diag}\{|l_0|, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}, \quad (4.22)$$

отвечающие мультииндексу l . Очевидно, матрица $\tilde{L}$ задает проектор в $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ на подпространство $\hat{\mathcal{H}}_1^{(l)}$, если $l_0 = 0$, или подпространство $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1^{(l)}$, если $l_0 \neq 0$. Здесь в обоих случаях $\hat{\mathcal{H}}_1^{(l)} = \oplus_{l_{\alpha,j} \neq 0} \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)}$.

Как видно из формул (4.13) и (4.6), в матрицы рассеяния $S(z)$ и $S^\dagger(z)$ входят ядра $M_{\alpha\beta}(P, P', z)$ на энергетической поверхности: их аргументы $P \in \mathbf{R}^6$ и $P' \in \mathbf{R}^6$ связаны с энергией $z = E + i0$ формулами (2.11), $E > 0$, или (2.12), $E > \lambda_{\alpha,j}$. Мы установим ниже (см. соотношение (6.8)), что аналитическое продолжение матрицы $M(z)$ на нефизические листы энергии z выражается через аналитическое продолжение в область комплексных z (на физическом листе) усеченных матриц рассеяния $S_l(z)$ или $S_l^\dagger(z)$ и полуэнергетических компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$, точнее, матриц $(L_0 \mathbf{J}_0 M)(z)$, $(L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon M)(z)$ и $(M \mathbf{J}_0^\dagger L_0)(z)$, $(M \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger L_1)(z)$. Здесь и далее l – некоторые мультииндексы (4.20), а $L = \text{diag}\{L_0, L_1\}$ – соответствующие им матрицы (4.21), $L_0 = l_0$.

В настоящем разделе мы приведем ряд утверждений (теоремы 3–7), касающихся существования аналитического продолжения и областей голоморфности перечисленных операторных матриц. Ввиду ограниченности места мы не будем давать полные доказательства этих утверждений. Отметим лишь, что доказательства основываются на анализе [24] уравнений Фаддеева (2.6). При этом приходится дополнительно останавливаться на исследовании областей голоморфности по z функций

$$\left[p_\alpha^2 + p_\beta'^2 - 2c_{\alpha\beta}(p_\alpha, p_\beta') - s_{\alpha\beta}^2 z \right]^{-1}, \quad (4.23)$$

у которых один или оба аргумента p_α и p_β' находятся на энергетических поверхностях (2.11) или (2.12). Функции (4.23) возникают при итерациях уравнений (2.6) вследствие присутствия множителя $\mathbf{R}_0$ в операторе $-\mathbf{t}\mathbf{R}_0\Upsilon$, а также как проявление сингулярностей (3.5) собственных функций $\psi_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$.

Области голоморфности функций (4.23) по переменной z в случае, когда аргументы p_α и/или p_β' находятся на энергетических поверхностях (2.12), $p_\alpha = \sqrt{z - \lambda_{\alpha,i}} \hat{p}_\alpha$ и $p_\beta' = \sqrt{z - \lambda_{\beta,j}} \hat{p}_\beta'$, определяются следующими простыми леммами.

ЛЕММА 1. Область

$$\text{Re } z > \frac{\lambda}{c^2} + \frac{c^2}{4s^2|\lambda|} (\text{Im } z)^2 \quad (4.24)$$

ни при каких $\rho \geq 0$, $-1 \leq \eta \leq 1$ не содержит корней z уравнения

$$z - \lambda + \rho + 2c\sqrt{z - \lambda}\sqrt{\rho}: \eta - s^2 z = 0, \quad (4.25)$$

где $\lambda < 0$, $0 < |c| < 1$, $s^2 = 1 - c^2$. Каким бы ни было число $z \in \mathbf{C}$, находящееся вне этой области, всегда найдутся такие значения параметров $\rho \geq 0$ и η , $-1 \leq \eta \leq 1$, что левая часть (4.25) в точке z обратится в нуль.

ЛЕММА 2. Пусть в уравнении

$$z - \lambda_1 + z - \lambda_2 + 2c\sqrt{z - \lambda_1}\sqrt{z - \lambda_2}: \eta - s^2 z = 0 \quad (4.26)$$

параметр η изменяется на интервале $[-1, 1]$ и, кроме того, $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, $0 < c < 1$, а $s^2 = 1 - c^2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $|\lambda_2| > c^2|\lambda_1|$, то при всяком $\eta \in [-1, 1]$ уравнение (4.26) имеет единственный корень z , и этот корень вещественный. Более того, $z = z_+$, если $\eta \geq 0$, и $z = z_-$, если $\eta \leq 0$, где

$$z_{\pm} = \frac{(1 + c^2 - 2c^2\eta^2)(\lambda_1 + \lambda_2) \pm 2\sqrt{c^2\eta^2[\lambda_1\lambda_2s^4 - (\lambda_2 - \lambda_1)^2c^2(1 - \eta^2)]}}{(1 + c^2)^2 - 4c^2\eta^2}. \quad (4.27)$$

Когда η пробегает интервал $[-1, 1]$, корень z заполняет промежуток $[z_{\text{lt}}, z_{\text{rt}}]$ с

$$z_{\text{lt}} = \frac{1}{s^2}[-|\lambda_1| - |\lambda_2| - 2c\sqrt{|\lambda_1| \cdot |\lambda_2|}] \quad (4.28)$$

и

$$z_{\text{rt}} = \frac{1}{s^2}[-|\lambda_1| - |\lambda_2| + 2c\sqrt{|\lambda_1| \cdot |\lambda_2|}], \quad z_{\text{rt}} < \lambda_1; \quad (4.29)$$

2) если $|\lambda_2| = c^2|\lambda_1|$, то уравнение (4.26) имеет два вещественных корня:

- а) корень $z = \lambda_1$, который существует при всех $\eta \in [-1, 1]$,
- б) корень $z = z_-$, задаваемый выражением (4.27), который существует лишь при $-1 \leq \eta \leq 0$.

При изменении η в промежутке $-1 \leq \eta \leq 1$ эти корни заполняют интервал $[z_{\text{lt}}, \lambda_1]$; где $z_{\text{lt}} = -|\lambda_1|(1 + 2c^4/s^2)$;

3) если $|\lambda_2| < c^2|\lambda_1|$, то:

- а) при $-1 \leq \eta \leq \eta^*$, $\eta^* = \frac{\sqrt{c^2 - \rho}\sqrt{1 - c^2\rho}}{c(1 - \rho)}$, $\rho = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$, уравнение (4.26) имеет два вещественных корня $z_{\pm}$, задаваемых выражением (4.27) и заполняющих промежуток $[z_{\text{lt}}, z_{\text{rt}}]$, определяемый соотношениями (4.28) и (4.29), причем $z_{\text{rt}} < \lambda_1$,
- б) при $\eta^* < \eta \leq 0$ у (4.26) существуют два комплексных корня $z_{\pm}$, задаваемых выражением (4.27) и заполняющих при движении η эллипс с центром в точке $z_c = -|\lambda_1| \left[1 + \frac{(c^2 - \rho)^2}{s^2(1 + c^2)(1 + \rho)} \right]$ и полюсами $a = |\lambda_1| \frac{(c^2 - \rho)(1 - c^2\rho)}{(1 + c^2)s^2(1 + \rho)}$ (вдоль вещественной оси) и $b = |\lambda_1| \frac{(c^2 - \rho)(1 - c^2\rho)}{(1 + c^2)s^2(1 - \rho)\sqrt{(1 + c^2)^2 - 4c^2\eta^{*2}}}$ (вдоль мнимой оси), при этом правая вершина эллипса находится в точке $z_{\text{rt}}^{(e)} = z_c + a = -\frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{1 + c^2}$, расположенной между λ_1 и λ_2 , левая же его вершина находится в точке $z_{\text{lt}}^{(e)} = z_c - a$, расположенной левее z_{rt} .

Пусть $\Pi_b^{(\beta, j)}$ – область на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом по лучу $[\lambda_{\min}, +\infty)$, где одновременно при всех $\alpha = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta$, выполняются неравенства (4.24) с $\lambda = \lambda_{\beta, j}$ и $c = c_{\alpha\beta}$, а также условия

$$\operatorname{Re} z > \lambda_{\beta, j} - s_{\alpha\beta}^2 b^2 + \frac{1}{4s_{\alpha\beta}^2 b^2} (\operatorname{Im} z)^2. \quad (4.30)$$

В случае потенциалов (2.2) следует положить $b = +\infty$ в (4.30).

Через $\mathcal{R}_{\alpha, i; \beta, j}$, $\alpha \neq \beta$, обозначим область в $\mathbf{C} \setminus [\lambda_{\min}, +\infty)$, дополнительную к множеству, заметаемому корнями уравнения (4.26) в случае, когда $\lambda_1 = \min\{\lambda_{\alpha, i}, \lambda_{\beta, j}\}$, $\lambda_2 = \max\{\lambda_{\alpha, i}, \lambda_{\beta, j}\}$, $c = |c_{\alpha\beta}|$, а $\eta = (\hat{p}_{\alpha}, \hat{p}'_{\beta})$ пробегает интервал $[-1, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. Матричный интегральный оператор $L'_1 \hat{T}_{11}(z) L''_1$, $z = E \pm i0$, действующий в $\hat{\mathcal{H}}_1$, допускает аналитическое продолжение по z с луча $E \in (\lambda, +\infty)$, $\lambda = \max_{\substack{l'_{\gamma,k} \neq 0 \\ l''_{\gamma,k} \neq 0}} \lambda_{\gamma,k}$, в область

$$\Pi_{l'l''}^{(\text{hol})} = \left[\bigcap_{\substack{l'_{\alpha,i} \neq 0 \\ l''_{\beta,j} \neq 0}} \mathcal{R}_{\alpha,i;\beta,j} \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{l'_{\gamma,k} \neq 0 \\ l''_{\gamma,k} \neq 0}} \Pi_b^{(\gamma,k)} \right] \setminus \overline{\sigma(H)}, \quad (4.31)$$

где $l'_1 = \text{diag}(l'_0, l'_{1,1}, \dots, l'_{1,n_1}, l'_{2,1}, \dots, l'_{2,n_2}, l'_{3,1}, \dots, l'_{3,n_3})$, $l''_1 = \text{diag}(l''_0, l''_{1,1}, \dots, l''_{1,n_1}, l''_{2,1}, \dots, l''_{2,n_2}, l''_{3,1}, \dots, l''_{3,n_3})$ с $l'_0 = l''_0 = 0$. При этом его нетривиальные ядра $\left(L'_1 \hat{T}_{11}(z) L''_1 \right)_{\alpha,i;\beta,j}(\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta, z)$, $l'_{\alpha,i} \neq 0$, $l''_{\beta,j} \neq 0$, оказываются функциями, голоморфными относительно переменной $z \in \Pi_{l'l''}^{(\text{hol})}$ и вещественно-аналитичными относительно $\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta \in S^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Области $\Pi_{l'l''}^{(\text{hol})}$ и $\Pi_{l''l'}^{(\text{hol})}$ совпадают, $\Pi_{l'l''}^{(\text{hol})} = \Pi_{l''l'}^{(\text{hol})}$.

Если $l' = l'' = l$, то для $\Pi_{l'l''}^{(\text{hol})}$ будем использовать обозначения $\Pi_l^{(\text{hol})}$,

$$\Pi_l^{(\text{hol})} = \Pi_{ll}^{(\text{hol})}. \quad (4.32)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $L_0 = l_0 = 0$. Тогда матрицы $(M \Upsilon \Psi J_1^\dagger L_1)(z)$ и $(L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M)(z)$, $z = E \pm i0$, допускают аналитическое продолжение по z с луча $E \in (\lambda, +\infty)$, $\lambda = \max(\beta, j) : l_{\beta,j} \neq 0$, в область $\Pi_l^{(\text{hol})} \setminus \overline{\sigma(H)}$ как ограниченные при $z \notin [\lambda_{\min}, +\infty)$ операторнозначные функции переменной z , $(M \Upsilon \Psi J_1^\dagger L_1)(z) : \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ и $(L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M)(z) : \mathcal{G}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_1$.

Продолжение полуэнергетических матриц $(\mathbf{J}_0 M)(z)$, $(M \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$, $z = E \pm i0$, $E > 0$, в область комплексных z рассматривается в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$. Например, для $M \mathbf{J}_0^\dagger$ рассматриваем продолжение билинейной формы

$$(F, (M \mathbf{J}_0^\dagger)(E \pm i0)) \equiv \sum_{\alpha, \beta} \int_{\mathbf{R}^6} dP \int_{S^5} d\hat{P}' F_\alpha(P) M_{\alpha\beta}(P, \pm \sqrt{E} \hat{P}', E \pm i0) f_\beta(\hat{P}'),$$

где $F = (F_1, F_2, F_3)$ с $F_\alpha \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ и $f = (f_1, f_2, f_3)$ с $f_\alpha \in \hat{\mathcal{H}}_0$.

При построении аналитического продолжения этой формы, а также аналогичной формы для $(\mathbf{J}_0 M)(E \pm i0)$ мы опираемся на два простых утверждения, касающихся областей аналитичности функции (4.23) в случае, когда аргумент P' оказывается на трехчастичной энергетической поверхности (2.11) и тем самым $p'_\beta = \sqrt{z} \nu' \hat{p}'_\beta$, $\nu' \in [0, 1]$.

ЛЕММА 3. Корни ρ уравнения

$$\rho + z\nu' + 2c\sqrt{z}\sqrt{\nu'}\sqrt{\rho}\eta - s^2 z = 0,$$

где $c > 0$, $s^2 = 1 - c^2$, $z \in \mathbf{C}$, при изменении параметров ν' и η в интервалах $0 \leq \nu' \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ замечают множество, состоящее из отрезка $[0, z]$ на комплексной плоскости и круга с центром в начале координат, имеющего радиус $c^2|z|$.

ЛЕММА 4. *Корни z уравнения*

$$z - \lambda + z\nu + 2c\sqrt{z}\sqrt{z - \lambda}\sqrt{\nu}\eta - s^2z = 0, \quad (4.33)$$

где $\nu \in [0, 1]$, $\eta \in [-1, 1]$, $\lambda < 0$, $c \in (0, 1)$ и $s^2 = 1 - c^2$, при изменении ν и η в указанных пределах заполняют интервал $(-\infty, \lambda/(1 + c^4)]$, а также круг с центром в точке $z_c = \lambda/(1 - c^4)$, имеющий радиус $r = c^2\lambda/(1 - c^4)$.

Пусть $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}, \tilde{\Pi}_b^{(0)\pm} \subset \mathbf{C}^\pm$, — области, получающиеся из $\mathbf{C}^\pm$ в результате удаления точек, принадлежащих кругам с центрами $z_c = \lambda_{\alpha,j}/(1 - c_{\alpha\beta}^4)$ и радиусами $r = c_{\alpha\beta}^2|\lambda_{\alpha,j}|/(1 - c_{\alpha\beta}^4)$, где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\beta \neq \alpha$ и $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$. В случае потенциалов (2.3) области $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ подчиняются дополнительным условиям

$$\operatorname{Re} z > -\frac{|s_{\alpha\beta}|^2 b^2}{(1 + |c_{\alpha\beta}|)^2} + \frac{(1 + |c_{\alpha\beta}|)^2}{4|s_{\alpha\beta}|^2 b^2} (\operatorname{Im} z)^2 \quad (4.34)$$

при всех $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\beta \neq \alpha$.

Используя леммы 3 и 4, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Ядра матриц $(M\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ и $(\mathbf{J}_0 M)(z)$, $z = E \pm i0$, $E > 0$, допускают аналитическое продолжение по z в области соответственно $\tilde{\Pi}_b^{(0)+}$ и $\tilde{\Pi}_b^{(0)-}$, $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm} \subset \mathbf{C}^\pm$. При этом продолжение ядер матриц $(\mathcal{Q}^{(n)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ и $(\mathbf{J}_0\mathcal{Q}^{(n)})(z)$, $n \leq 3$, входящих в представление (4.5) матрицы $M(z)$, понимается в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$. Ядра*

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, \sqrt{z}\hat{P}', z), \quad \mathcal{I}_{\alpha,j;\beta}(p_\alpha, \sqrt{z}\hat{P}', z), \\ &\mathcal{J}_{\alpha;\beta,k}(P, \sqrt{z}\sqrt{\nu'}\hat{p}'_\beta, z) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{\alpha,j;\beta,k}(p_\alpha, \sqrt{z}\sqrt{\nu'}\hat{p}'_\beta, z), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots, n_\alpha, \quad k = 1, 2, \dots, n_\beta,$

матриц $(\mathcal{Q}^{(n)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$, $n \geq 4$, и $(\mathcal{W}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$, а также ядра

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\alpha\beta}(\sqrt{z}\hat{P}, P', z), \quad \mathcal{I}_{\alpha,j;\beta}(\sqrt{z}\sqrt{\nu}\hat{p}_\alpha, P', z), \\ &\mathcal{J}_{\alpha;\beta,k}(\sqrt{z}\hat{P}, p'_\beta, z) \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{\alpha,j;\beta,k}(\sqrt{z}\sqrt{\nu}\hat{p}_\alpha, p'_\beta, z) \end{aligned} \quad (4.36)$$

матриц $(\mathbf{J}_0\mathcal{Q}^{(n)})(z)$, $n \geq 4$, и $(\mathbf{J}_0\mathcal{W})(z)$ продолжаются в области $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ как голоморфные функции переменной z . Будучи гильдеровскими функциями переменных $\hat{P}' \in S^5$ или $\sqrt{\nu'}\hat{p}'_\beta$, $0 \leq \nu' \leq 1$, $\hat{p}'_\beta \in S^2$ ($\hat{P} \in S^5$ или $\sqrt{\nu}\hat{p}_\alpha$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\hat{p}_\alpha \in S^2$) с показателем $\mu' \in (0, 1/8)$, ядра (4.35) (ядра (4.36)), рассматриваемые как функции переменных $P \in \mathbf{R}^6$, $p_\alpha \in \mathbf{R}^3$ (переменных $P' \in \mathbf{R}^6$, $p'_\beta \in \mathbf{R}^3$), вкладываются в совокупности в $\mathcal{B}(\theta, \mu)$ с произвольными $\theta \in (\frac{3}{2}, \theta_0)$ и $\mu \in (0, \frac{1}{8})$. При $|\operatorname{Im} z| \geq \delta > 0$ можно брать $\mu = 1$.

Прокомментируем утверждение теоремы на примере матриц $(M\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$. Отметим, в частности, что продолжение на $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ формы

$$(F, (\mathcal{Q}^{(0)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)f) = \sum_{\alpha} (F_{\alpha}, (\mathbf{t}_{\alpha}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)f_{\alpha})$$

описывается равенствами

$$(F_\alpha, (\mathbf{t}_\alpha \mathbf{J}_0^\dagger)(z)f_\alpha) \equiv \int_{\mathbf{R}^3} dk_\alpha \int_{S^2} d\hat{k}'_\alpha \int_{S^2} d\hat{p}'_\alpha \int_0^{\pi/2} d\omega'_\alpha \sin^2 \omega'_\alpha \cos^2 \omega'_\alpha \times \\ \times t_\alpha(k_\alpha, \sqrt{z} \cos \omega'_\alpha \hat{k}'_\alpha, z \cos^2 \omega'_\alpha) F_\alpha(k_\alpha, \pm \sqrt{z} \sin \omega'_\alpha \hat{p}'_\alpha) f_\alpha(\omega'_\alpha, \hat{k}'_\alpha, \hat{p}'_\alpha), \quad (4.37)$$

где $\omega'_\alpha, \hat{k}'_\alpha, \hat{p}'_\alpha$ – координаты [29] точки $\hat{P}'$ на гипербфере S^5 , $\omega'_\alpha \in [0, \pi/2]$, $\hat{k}'_\alpha, \hat{p}'_\alpha \in S^2$. При этом $\hat{P}' = \{\cos \omega'_\alpha \hat{k}'_\alpha, \sin \omega'_\alpha \hat{p}'_\alpha\}$, а $d\hat{P}' = \sin^2 \omega'_\alpha \cos^2 \omega'_\alpha d\omega'_\alpha d\hat{k}'_\alpha d\hat{p}'_\alpha$ – мера на S^5 .

Аналитическое продолжение на $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ формы $(F, (\mathcal{Q}^{(1)} \mathbf{J}_0^\dagger)(E \pm i0)f)$ определяется формулами

$$(F, (\mathcal{Q}^{(1)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)f) = \sum_{\alpha, \beta, \alpha \neq \beta} Q_{1, \alpha \beta}^\pm(z) + Q_{2, \alpha \beta}^\pm(z), \quad (4.38)$$

где

$$Q_{1, \alpha \beta}^\pm(z) = \pm \frac{\sqrt{z}}{4} \frac{1}{|s_{\alpha \beta}|} \times \\ \times \int_{\mathbf{R}^3} dk_\alpha \int_{S^2} d\hat{p}_\alpha \int_{S^2} dk'_\beta \int_{S^2} d\hat{p}'_\beta \int_0^1 d\nu \sqrt{\nu} \int_0^1 d\nu' \sqrt{\nu'} \sqrt{1 - \nu'} \times \\ \times \frac{F_\alpha(k_\alpha, \sqrt{z} \sqrt{\nu} \hat{p}_\alpha) f_\beta(\sqrt{1 - \nu'} \hat{k}'_\beta, \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta)}{\nu + \nu' - 2c_{\alpha \beta} \sqrt{\nu} \sqrt{\nu'} (\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) - s_{\alpha \beta}^2 \mp i0} \times \\ \times t_\alpha(k_\alpha, \tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(\sqrt{z} \sqrt{\nu} \hat{p}_\alpha, \sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta), z(1 - \nu)) \times \\ \times t_\beta(\tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(\sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta, \sqrt{z} \sqrt{\nu} \hat{p}_\alpha), \sqrt{z} \sqrt{1 - \nu'} \hat{k}'_\beta, z(1 - \nu')) \quad (4.39)$$

и

$$Q_{2, \alpha \beta}^\pm(z) = \pm \frac{1}{4} \frac{1}{|s_{\alpha \beta}|} \times \\ \times \int_{\mathbf{R}^3} dk_\alpha \int_{S^2} d\hat{p}_\alpha \int_{S^2} dk'_\beta \int_{S^2} d\hat{p}'_\beta \int_{\Gamma_\pm} d\rho \sqrt{\rho} \int_0^1 d\nu' \sqrt{\nu'} \sqrt{1 - \nu'} \times \\ \times \frac{F_\alpha(k_\alpha, \pm \sqrt{\rho} \hat{p}_\alpha) f_\beta(\sqrt{1 - \nu'} \hat{k}'_\beta, \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta)}{\rho + z\nu' - 2c_{\alpha \beta} \sqrt{z} \sqrt{\rho} \sqrt{\nu'} (\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) - s_{\alpha \beta}^2 z} \times \\ \times t_\alpha(k_\alpha, \tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(\pm \sqrt{\rho} \hat{p}_\alpha, \sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta), z - \rho) \times \\ \times t_\beta(\tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(\sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta, \pm \sqrt{\rho} \hat{p}_\alpha), \sqrt{z} \sqrt{1 - \nu'} \hat{k}'_\beta, z(1 - \nu')). \quad (4.40)$$

Здесь под Γ_z^+ (Γ_z^-) подразумевается путь интегрирования, начинающийся в точке z и проходящий по часовой стрелке (против часовой стрелки) вдоль окружности $C_{|z|}$ радиуса $|z|$ с центром в начале координат до пересечения с вещественной осью. Оставшаяся часть контура Γ_z^+ (Γ_z^-) состоит из точек $\rho = \lambda + i0$ ($\rho = \lambda + i0$), $\lambda \in (|z|, +\infty)$.

Границы областей $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ голоморфности формы $(F, (\mathcal{Q}^{(1)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)f)$ в $\mathbf{C}^+$ и $\mathbf{C}^-$ определяются в существенном исходя из условий, чтобы в этих областях не проявлялись полюсы T -матриц $t_\alpha(\cdot, \cdot, z(1 - \nu))$ и $t_\beta(\cdot, \cdot, z(1 - \nu'))$, присутствующие в интеграле (4.39),

и, кроме того, полюсы T -матрицы $t_\alpha(\cdot, \cdot, z - \rho)$ в интеграле (4.40). Если $z \notin (-\infty, \lambda_{\max}]$, то условия $z(1 - \nu) = \lambda_{\alpha,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, $z(1 - \nu') = \lambda_{\beta,k}$, $k = 1, 2, \dots, n_\beta$, возникновения полюсов T -матриц $t_\alpha(\cdot, \cdot, z(1 - \nu))$ и $t_\beta(\cdot, \cdot, z(1 - \nu'))$ не выполняются ни при каких $\nu, \nu' \in [0, 1]$. Условия $z - \rho = \lambda_{\alpha,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, появления полюсов $t_\alpha(\cdot, \cdot, z - \rho)$ могут реализоваться, когда контуры $\Gamma_z^\pm$ содержат в себе более четверти окружности $C_{|z|}$. Однако их вклад в $Q_{2,\alpha\beta}^\pm(z)$ при пересечении точками $\rho = z - \lambda_{\alpha,j}$ контуров $\Gamma_z^\pm$ всегда можно учесть, пользуясь теоремой о вычетах. Мы не будем приводить здесь соответствующих формул. Заметим лишь, что взятие вычетов в точках $\rho = z - \lambda_{\alpha,j}$ превращает трехчастичную полюсную особенность подынтегральных выражений $Q_{2,\alpha\beta}^\pm(z)$ в особенность типа $(z - \lambda_{\alpha,j} + z\nu' - 2c_{\alpha\beta}\sqrt{z}\sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}\sqrt{\nu'}\eta - s_{\alpha\beta}^2)^{-1}$. Местоположение особенностей такого типа описывается леммой 4.

Компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, P', z)$, $\mathcal{I}_{\alpha,j;\beta}(p_\alpha, P', z)$, $\mathcal{J}_{\alpha;\beta,k}(P, p'_\beta, z)$ и $\mathcal{K}_{\alpha,j;\beta,k}(p_\alpha, p'_\beta, z)$, $P, P' \in \mathbf{R}^6$, $p_\alpha, p'_\beta \in \mathbf{R}^3$, итерации $\mathcal{Q}^{(2)}(z)$ свободного члена (2.6) имеют более слабые сингулярности [24, 29], чем компоненты $\mathcal{Q}^{(1)}(z)$. При проведении аналитического продолжения формы $(F, (\mathcal{Q}^{(2)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)f)$ мы получаем для нее представления, отличающиеся от (4.38)–(4.40) главным образом заменой обобщенных функций $\{z(\nu + \nu' - 2c_{\alpha\beta}\sqrt{\nu}\sqrt{\nu'}(\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) - s_{\alpha\beta}^2 \mp i0)\}^{-1}$, $0 \leq \nu \leq 1$, $0 \leq \nu' \leq 1$, функциями, сингулярными как

$$\frac{1}{z|c_{\alpha\gamma}\nu\hat{p}_\alpha - c_{\beta\gamma}\nu'\hat{p}'_\beta|} \ln \frac{\sqrt{s_{\alpha\gamma}^2(1 - \nu^2)} + \sqrt{s_{\beta\gamma}^2(1 - \nu'^2)} + |c_{\alpha\gamma}\nu\hat{p}_\alpha - c_{\beta\gamma}\nu'\hat{p}'_\beta|}{\sqrt{s_{\alpha\gamma}^2(1 - \nu^2)} + \sqrt{s_{\beta\gamma}^2(1 - \nu'^2)} - |c_{\alpha\gamma}\nu\hat{p}_\alpha - c_{\beta\gamma}\nu'\hat{p}'_\beta|}. \quad (4.41)$$

Компоненты $\mathcal{F}_{\alpha\beta}(P, P', z)$, $\mathcal{I}_{\alpha,j;\beta}(p_\alpha, P', z)$, $\mathcal{J}_{\alpha;\beta,k}(P, p'_\beta, z)$ и $\mathcal{K}_{\alpha,j;\beta,k}(p_\alpha, p'_\beta, z)$ итерации $\mathcal{Q}^{(3)}(z) = (-\mathbf{t}(z)\mathbf{R}_0(z)\Upsilon)^3 \mathbf{t}(z)$ все еще остаются сингулярными. Хотя их особенности и оказываются слабыми, продолжение ядер $(\mathcal{Q}^{(3)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ в области $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$ будем понимать по-прежнему в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ и реализуем его по той же схеме, что и продолжение $(\mathcal{Q}^{(1)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ и $(\mathcal{Q}^{(2)}\mathbf{J}_0^\dagger)(z)$.

ТЕОРЕМА 6. Матрица $(\mathbf{J}_0 M \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ (оператор $(J_0 T \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$) допускает аналитическое продолжение по z с берегов разреза $z = E \pm i0$, $E > 0$, на области $\tilde{\Pi}_b^{(0)\pm} \in \mathbf{C}^\pm$ как ограниченный оператор в $\hat{\mathcal{G}}_0$ (в $\hat{\mathcal{H}}_0$). При этом $(\mathbf{J}_0 M \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$, $z \in \tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$, допускает представление (ср. с (4.5)) $(\mathbf{J}_0 M \mathbf{J}_0^\dagger)(z) = \sum_{n=0}^3 (\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(n)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z) + (\mathbf{J}_0 \mathcal{W} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$. Операторы $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(0)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ и $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(1)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ являются ограниченными матричными интегральными операторами в $\hat{\mathcal{G}}_0$ с сингулярными ядрами. Обладая ядрами со слабыми особенностями, матрицы $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(n)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$, $n = 2, 3$, являются компактными операторами в $\hat{\mathcal{G}}_0$. Наконец, ядра матрицы $(\mathbf{J}_0 \mathcal{W} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ являются гильберовскими функциями своих аргументов с показателем $\mu \in (0, 1/8)$.

В качестве комментария к теореме приведем явные формулы для ядер операторов $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(0)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$ и $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(1)} \mathbf{J}_0^\dagger)(z)$.

Первые из них имеют вид $(\mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(0)} \mathbf{J}_0^\dagger)_{\alpha\beta}(\hat{P}, \hat{P}', z) = \delta_{\alpha\beta} (J_0 \mathbf{t}_\alpha \mathbf{J}_0^\dagger)(\hat{P}, \hat{P}', z)$, где

$$\begin{aligned} (J_0 \mathbf{t}_\alpha \mathbf{J}_0^\dagger)(\hat{P}, \hat{P}', z) &= t_\alpha(\sqrt{z} \cos \omega_\alpha \hat{k}_\alpha, \sqrt{z} \cos \omega'_\alpha \hat{k}'_\alpha, z \cos^2 \omega_\alpha) \times \\ &\times \delta(\sqrt{z} \sin \omega_\alpha \hat{p}_\alpha - \sqrt{z} \sin \omega'_\alpha \hat{p}'_\alpha). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь $\omega_\alpha, \hat{k}_\alpha, \hat{p}_\alpha$ и $\omega'_\alpha, \hat{k}'_\alpha, \hat{p}'_\alpha$ – координаты точек $\hat{P} = \{k_\alpha, p_\alpha\}$ и $\hat{P}' = \{k'_\alpha, p'_\alpha\}$ на гиперсфере S^5 . Мы подразумеваем при этом, что

$$\delta(\sqrt{z} \sin \omega \hat{p} - \sqrt{z} \sin \omega' \hat{p}') = \text{sign Im } z \frac{\delta(\hat{p}, \hat{p}') \delta(\omega - \omega')}{(\sqrt{z})^3 \sin^2 \omega \cos \omega}, \quad (4.43)$$

где $\delta(\hat{p}, \hat{p}')$ – ядро тождественного оператора в $L_2(S^2)$. Знаменатель $(\sqrt{z})^3 \sin^2 \omega \cos \omega$ правой части (4.43) представляет собой аналитическое продолжение якобиана соответствующей замены переменных.

Таким образом, оператор $(J_0 \mathbf{t}_\alpha J_0^\dagger)(z)$, $\text{Im } z \neq 0$, действует на $f \in \hat{\mathcal{H}}_0$ по формуле

$$\begin{aligned} ((J_0 \mathbf{t}_\alpha J_0^\dagger)(z)f)(\hat{P}) &= \frac{\text{sign Im } z}{(\sqrt{z})^3} \int_{S^2} dk'_\alpha \times \\ &\times t_\alpha(\sqrt{z} \cos \omega_\alpha \hat{k}_\alpha, \sqrt{z} \cos \omega_\alpha \hat{k}'_\alpha, z \cos^2 \omega_\alpha) f(\cos \omega_\alpha \hat{k}'_\alpha, \sin \omega_\alpha \hat{p}_\alpha). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Операторы $(J_0 \mathcal{Q}^{(1)} J_0^\dagger)(z)$, $z \in \tilde{\Pi}_b^{(0)\pm}$, имеют ядра

$$(J_0 \mathcal{Q}^{(1)} J_0^\dagger)_{\alpha\beta}(\hat{P}, \hat{P}', z) = \frac{1}{z} \frac{1 - \delta_{\alpha\beta}}{|s_{\alpha\beta}|} \frac{t_\alpha(k_\alpha, k_\alpha^{(\beta)}, z(1-\nu)) t_\beta(k_\beta^{(\alpha)}, k'_\beta, z(1-\nu'))}{\nu + \nu' - 2c_{\alpha\beta} \sqrt{\nu} \sqrt{\nu'} (\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta) - s_{\alpha\beta}^2 \mp i0},$$

где $k_\alpha = \sqrt{z} \sqrt{1-\nu} \hat{k}_\alpha$, $k'_\beta = \sqrt{z} \sqrt{1-\nu'} \hat{k}'_\beta$, $k_\alpha^{(\beta)} = \tilde{k}_\alpha^{(\beta)}(\sqrt{z} \sqrt{\nu} \hat{p}_\alpha, \sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta)$ и $k_\beta^{(\alpha)} = \tilde{k}_\beta^{(\alpha)}(\sqrt{z} \sqrt{\nu'} \hat{p}'_\beta, \sqrt{z} \sqrt{\nu} \hat{p}_\alpha)$, а $\nu = \sin^2 \omega_\alpha$ и $\nu' = \sin^2 \omega'_\beta$.

Главные особенности по $\hat{P}, \hat{P}'$ ядер $(J_0 \mathcal{Q}^{(2)} J_0^\dagger)_{\alpha\beta}(\hat{P}, \hat{P}', z)$ описываются формулами (4.41). Особенности ядер $(J_0 \mathcal{Q}^{(3)} J_0^\dagger)_{\alpha\beta}(\hat{P}, \hat{P}', z)$ являются еще более слабыми.

ТЕОРЕМА 7. Операторы $(J_0 M \Upsilon \Psi J_1^\dagger)(z) : \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_0$, $(J_1 \Psi^* \Upsilon M J_0^\dagger)(z) : \hat{\mathcal{G}}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_1$, $\hat{T}_{01}(z) : \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0$, и $\hat{T}_{10}(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_1$ допускают аналитическое продолжение с берегов разреза $z = E \pm i0$, $E > 0$, в полуплоскости $\mathbf{C}^\pm$ на области $\Pi_b^{(0)\pm}$, состоящие из тех точек $z \in \tilde{\Pi}_b^{(0)\pm} \cap \bigcap_{\beta,j} \Pi_b^{(\beta,j)}$, которые удовлетворяют дополнительно условиям

$$\text{Re } z > \frac{|s_{\beta\gamma}|^2}{(1 + |c_{\beta\gamma}|)^2} \lambda_{\beta,j} + \frac{(1 + |c_{\beta\gamma}|)^2}{4|s_{\beta\gamma}|^2 |\lambda_{\beta,j}|} (\text{Im } z)^2$$

при любых $\beta, \gamma = 1, 2, 3$, $\beta \neq \gamma$ и $j = 1, 2, \dots, n_\beta$. Для всех $z \in \Pi_b^{(0)\pm}$, включая предельные точки $z = E \pm i0$, $E > 0$, эти операторы являются компактными.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения

$$\Pi_{l^\pm}^{(\text{hol})} \equiv \Pi_b^{(0)\pm} \bigcap \Pi_{l^{(1)}}^{(\text{hol})}, \quad (4.45)$$

где $l^\pm = (l_0^\pm, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3})$ с $l_0^\pm = \pm 1$ и $l_{\alpha,j} = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, а $l^{(1)} = (0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3})$ с теми же $l_{\alpha,j}$, что и $l^\pm$. Напомним, что множества $\Pi_{l^{(1)}}^{(\text{hol})} \equiv \Pi_{l^{(1)}l^{(1)}}^{(\text{hol})}$ определяются равенствами (4.31).

Как следует из теорем 3, 6 и 7, полная трехчастичная матрица рассеяния $S(z)$, $z = E \pm i0$, $E > 0$, допускает аналитическое продолжение как голоморфная операторнозначная функция, $S(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$, на область $\Pi_{l_+}^{(\text{hol})} \subset \mathbf{C}^+$. При всяком $z \in \Pi_{l_+}^{(\text{hol})}$ оператор $S(z)$ ограничен. В равной степени это относится и матрице рассеяния $S^\dagger(z)$.

5. ОПИСАНИЕ (ЧАСТИ) ТРЕХЧАСТИЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Под *трехчастичной римановой поверхностью энергии* мы будем подразумевать риманову поверхность ядра $R(P, P', z)$ резольвенты $R(z)$ гамильтониана H , рассматриваемого как функция параметра z – энергии системы трех частиц.

Следует ожидать, что эта поверхность, как и поверхность свободной функции Грина $R_0(P, P', z)$, содержит бесконечное число листов хотя бы уже по той причине, что порог $z = 0$ является логарифмической точкой ветвления. Риманова поверхность функции $R(P, P', z)$ на самом деле имеет значительно более сложное строение, чем риманова поверхность $R_0(P, P', z)$, поскольку наряду с $z = 0$ точками ветвления (корневыми) оказываются также парные пороги $z = \lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$. Точками ветвления оказываются также резонансы в парных подсистемах. Дополнительные точки ветвления порождаются границами носителей особенностей функций (4.23) на энергетических поверхностях, описанными в леммах 1, 2 и 4.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением лишь той “небольшой” части полной трехчастичной римановой поверхности, для которой нам удалось получить явные представления, выражающие аналитическое продолжение функции Грина $R(P, P', z)$, ядер матрицы $M(z)$, а также матрицы рассеяния $S(z)$ в терминах физического листа (см. формулы (6.8), (6.9) и (6.11)). А именно, в римановой поверхности функции $R(P, P', z)$ мы рассматриваем два соседних “трехчастичных” нефизических листа, непосредственно примыкающих к физическому листу по *трехчастичной* ветви непрерывного спектра $[0, +\infty)$. Кроме того, мы рассматриваем все “двухчастичные” нефизические листы, т.е. листы, на которые можно провести параметр z , когда разрешаются обходы двухчастичных порогов $z = \lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, но не допускается переход интервала $[0, +\infty)$. Очевидно, описываемая часть трехчастичной римановой поверхности включает в себя все листы, соседние по отношению к физическому листу и являющиеся наиболее интересными в приложениях.

Конкретное описание интересующей нас части трехчастичной римановой поверхности мы дадим, используя вспомогательную вектор-функцию $f(z) = (f_0(z), f_1(z), f_2(z), f_3(z))$, где $f_0(z) = \ln z$, а $f_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, суть вектор-функции

$$f_\alpha(z) = ((z - \lambda_{\alpha,1})^{1/2}, (z - \lambda_{\alpha,2})^{1/2}, \dots, (z - \lambda_{\alpha,n_\alpha})^{1/2}).$$

Риманова поверхность вектор-функции $f(z)$ состоит из бесконечного числа экземпляров комплексной плоскости $\mathbf{C}'$ с разрезом по лучу $[\lambda_{\min}, +\infty)$, которые соответствующим образом склеиваются по берегам разрезов между соседними точками из множества порогов $\lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, и $\lambda_0 = 0$. Лист $\Pi_{l_0 l_1 l_2 l_3}$ этой поверхности, где l_0 – целое число, а l_α , $\alpha = 1, 2, 3$ – мультииндексы, $l_\alpha = (l_{\alpha,1}, l_{\alpha,2}, \dots, l_{\alpha,n_\alpha})$, $l_{\alpha,j} = 0, 1$, идентифицируется тем, каким ветвям функций $f_{\alpha,j}(z) = (z - \lambda_{\alpha,j})^{1/2}$ и $f_0(z) = \ln z$ он соответствует. Главной ветви функции $f_{\alpha,j}(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, мы сопоставляем $l_{\alpha,j} = 0$, неглавной – $l_{\alpha,j} = 1$. В случае, если среди порогов есть совпадающие, т.е. $\lambda_{\alpha,i} = \lambda_{\beta,j}$ при $\alpha \neq \beta$ и/или $i \neq j$ (это означает, что дискретные спектры гамильтонианов хотя бы у двух из парных подсистем частично совпадают либо хотя бы у одной из парных подсистем имеется кратный дискретный спектр), то на каждом листе $\Pi_{l_0 l_1 l_2 l_3}$ индексы $l_{\alpha,i}$ и $l_{\beta,j}$ также совпадают, $l_{\alpha,i} = l_{\beta,j}$. В качестве l_0 выбираем номер ветви функции $\ln z$, $\ln z = \ln |z| + i\varphi_0 + i2\pi l_0$, где φ_0 – аргумент z , $z = |z|e^{i\varphi_0}$,

$\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. Листы $\Pi_{l_0 l_1 l_2 l_3}$ склеиваются (по берегам разрезов) так, что если параметр z , уходя с листа $\Pi_{l_0 l_1 l_2 l_3}$, пересекает участок разреза между двумя соседними порогами $\lambda_{\alpha, i}$ и $\lambda_{\beta, j}$, $\lambda_{\alpha, i} < \lambda_{\beta, j}$ (или $\lambda_{\max}$ и λ_0), то он оказывается на листе $\Pi_{l'_0 l'_1 l'_2 l'_3}$, где все индексы $l_{\gamma, k}$, отвечающие $\lambda_{\gamma, k} \leq \lambda_{\alpha, i}$ ($\lambda_{\gamma, k} \leq \lambda_{\max}$), изменяются на единицу. При этом если $l_{\gamma, k} = 0$, то $l'_{\gamma, k} = 1$; если $l_{\gamma, k} = 1$, то $l'_{\gamma, k} = 0$. Индексы $l_{\gamma, k}$ при $\lambda_{\gamma, k} > \lambda_{\alpha, i}$ и индекс l_0 остаются неизменными: $l'_{\gamma, k} = l_{\gamma, k}$, $l'_0 = l_0$. В том случае, когда параметр z пересекает разрез правее трехчастичного порога λ_0 (в точках $E > \lambda_0$), все индексы $l_{\gamma, k}$ изменяются так, как было только что описано. Но, кроме того, изменяется на единицу также и индекс l_0 . Если при этом z пересекает разрез снизу вверх, то $l'_0 = l_0 + 1$, иначе $l'_0 = l_0 - 1$. В дальнейшем через l будем обозначать мультииндекс $l = (l_0, l_1, l_2, l_3)$.

Итак, мы описали риманову поверхность вспомогательной вектор-функции $f(z)$.

Как говорилось выше, мы будем рассматривать лишь часть трехчастичной римановой поверхности, которую условимся обозначать через $\mathfrak{R}$. В $\mathfrak{R}$ включаются все листы Π_l римановой поверхности вектор-функции $f(z)$ с $l_0 = 0$. Мы относим к $\mathfrak{R}$ также верхнюю полуплоскость, $\text{Im } z > 0$, листа Π_l с $l_0 = +1$ и нижнюю полуплоскость, $\text{Im } z < 0$, листа Π_l с $l_0 = -1$. За названными частями сохраняем обозначения Π_l , $l_0 = \pm 1$, предполагая дополнительно, что на них сделаны разрезы по лучам, входящим в множество $Z_{\text{res}} = \bigcup_{\alpha=1}^3 Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$. Здесь $Z_{\text{res}}^{(\alpha)} = \{z : z = z_r \rho, 1 \leq \rho < +\infty, z_r \in \sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}\}$ – совокупность лучей, уходящих из резонансов $z_r \in \sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$ подсистемы α на бесконечность в направлениях $\hat{z}_r = z_r / |z_r|$.

Лист Π_l , для которого все компоненты мультииндекса l равны нулю, $l_0 = l_{\alpha, j} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, называется физическим. Нефизические листы Π_l с $l_0 \neq 0$ называются двухчастичными, поскольку они отвечают обходам лишь двухчастичных порогов, а трехчастичный порог λ_0 не обходится. Листы Π_l при $l_0 = \pm 1$ называются трехчастичными.

Используя результаты раздела 4, можно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Для каждого двухчастичного нефизического листа Π_l поверхности $\mathfrak{R}$ можно указать путь с физического листа Π_0 в область $\Pi_l^{(\text{hol})}$ на Π_l , проходящий лишь по двухчастичным листам $\Pi_{l'}$, такой, что при движении по нему параметр z всегда находится в соответствующих областях $\Pi_{l'}^{(\text{hol})} \subset \Pi_{l'}$.*

6. ПРОДОЛЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ $M(z)$, МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ И РЕЗОЛЬВЕНТЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ

В этом разделе мы сформулируем основные результаты настоящей работы. Их доказательства будут приведены во второй части статьи. Здесь же мы намечаем лишь схему этих доказательств.

Начнем с описания продолжения на нефизические листы уравнений Фаддеева (2.4).

Пусть $L^{(\alpha)} = \text{diag}\{l_{\alpha, 1}, l_{\alpha, 2}, \dots, l_{\alpha, n_\alpha}\}$ – диагональная числовая матрица, составленная из компонент $l_{\alpha, 1}, l_{\alpha, 2}, \dots, l_{\alpha, n_\alpha}$ мультииндекса l листа $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$. При этом $L_1(l) = \text{diag}\{L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}\}$ и $L(l) = \text{diag}\{L_0, L_1\}$ с $L_0 \equiv l_0$.

Обозначим через $s_{\alpha, l}(z)$ оператор, задаваемый в $\hat{\mathcal{H}}_0$ формулой

$$s_{\alpha, l}(z) = \hat{I}_0 + J_0(z) t_\alpha(z) J_0^\dagger(z) A_0(z) L_0, \quad z \in \Pi_0. \quad (6.1)$$

Из (6.1) следует, что $\mathbf{s}_{\alpha,l} = \hat{I}_0$ при $l_0 = 0$. Если $l_0 = \pm 1$, то согласно (4.42)–(4.44) оператор $\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)$ определен при $z \in \mathcal{P}_b \cap \mathbf{C}^\pm$ и действует на $f \in \hat{\mathcal{H}}_0$ по формуле

$$(\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)f)(\hat{P}) = \int_{S^2} d\hat{k}' s_{\alpha}(\hat{k}_{\alpha}, \hat{k}'_{\alpha}, z \cos^2 \omega) f(\cos \omega_{\alpha} \hat{k}'_{\alpha}, \sin \omega_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}), \quad (6.2)$$

где $\hat{P} = \{\cos \omega_{\alpha} \hat{k}_{\alpha}, \sin \omega_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}\}$, а s_{α} – матрица рассеяния (2.16) для парной подсистемы α . Мы учли здесь то обстоятельство, что $l_0 \cdot \text{sign Im } z = 1$ как при $l_0 = 1$, так и при $l_0 = -1$. Напомним, что при $l_0 = 1$ Π_l представляет собой верхнюю полуплоскость, а при $l_0 = -1$ – нижнюю (в соответствии с нашим выбором в разделе 5 части $\mathfrak{R}$ полной римановой поверхности в задаче трех частиц). Мы видим поэтому, что операторы $\mathbf{s}_{\alpha,l}$ на обоих трехчастичных листах Π_l , $l_0 = \pm 1$, описываются одной и той же формулой (6.2). В сущности, оператор $\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)$ представляет собой матрицу рассеяния (2.16) для парной подсистемы α , записанную в трехчастичном импульсном пространстве.

Из (6.2) немедленно вытекает, что если $z \in \mathcal{P}_b \cap \mathbf{C}^\pm \setminus Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$, то существует ограниченный обратный оператор $\mathbf{s}_{\alpha,l}^{-1}(z)$,

$$(\mathbf{s}_{\alpha,l}^{-1}(z)f)(\hat{P}) = \int_{S^2} d\hat{k}' s_{\alpha}^{-1}(\hat{k}_{\alpha}, \hat{k}'_{\alpha}, z \cos^2 \omega_{\alpha}) f(\cos \omega_{\alpha} \hat{k}'_{\alpha}, \sin \omega_{\alpha} \hat{p}_{\alpha}),$$

где $s_{\alpha}^{-1}(\hat{k}, \hat{k}', \zeta)$ – ядро обратной парной матрицы рассеяния $s_{\alpha}(\zeta)$.

Оператор $\mathbf{s}_{\alpha,l}^{-1}(z)$ становится неограниченным для предельных точек z , находящихся на берегах разрезов (“резонансных” лучей), входящих в $Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 8. *Свободные члены $\mathbf{t}_{\alpha}(P, P', z)$ и ядра $(\mathbf{t}_{\alpha} R_0)(P, P', z)$ уравнений Фаддеева (2.4) допускают аналитическое продолжение в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ как на двухчастичные, так и на трехчастичные листы Π_l римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Продолжение на лист Π_l , $l = (l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3})$, $l_0 = 0$, $l_{\beta,j} = 0, 1$ или $l_0 = \pm 1$, $l_{\beta,j} = 1$ (в обоих случаях $\beta = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_{\beta}$), записывается в виде*

$$\mathbf{t}_{\alpha}^l(z) \equiv \mathbf{t}_{\alpha}(z)|_{\Pi_l} = \mathbf{t}_{\alpha} - L_0 A_0 \mathbf{t}_{\alpha} J_0^{\dagger} \mathbf{s}_{\alpha,l}^{-1} J_0 \mathbf{t}_{\alpha} - \Phi_{\alpha} J^{(\alpha)t} L^{(\alpha)} A^{(\alpha)} J^{(\alpha)} \Phi_{\alpha}^*, \quad (6.3)$$

$$[\mathbf{t}_{\alpha}(z) R_0(z)]|_{\Pi_l} = \mathbf{t}_{\alpha}^l(z) R_0^l(z), \quad (6.4)$$

где $R_0^l(z) \equiv R_0(z)|_{\Pi_l} = R_0(z) + L_0 A_0(z) J_0^{\dagger}(z) J_0(z)$ – продолжение [39] на Π_l свободной функции Грина $R_0(z)$. Если $l_0 = 0$ (и, следовательно, Π_l является двухчастичным нефизическим листом), то продолжение (6.3), (6.4) возможно на весь лист Π_l . При $l_0 = \pm 1$ (т.е. в случае, когда лист Π_l трехчастичный) продолжение в виде (6.3), (6.4) возможно лишь на область $\mathcal{P}_b \cap \Pi_l$. Все ядра в правых частях равенств (6.3) относятся к физическому листу.

Доказательство этой теоремы основывается на использовании свойств интегралов типа Коши (см. лемму из раздела 2 статьи [39]), каковыми являются интегральные члены уравнений (2.4).

Используя (6.3) и (6.4), мы можем записать продолжение уравнений Фаддеева на лист Π_l с учетом (2.6) в матричном виде

$$M^l(z) = \mathbf{t}^l(z) - \mathbf{t}^l(z) \mathbf{R}_0^l(z) \Upsilon M^l(z), \quad (6.5)$$

где

$$\mathbf{t}^l(z) = \mathbf{t} - L_0 A_0 \mathbf{t} \mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{t} - \Phi \mathbf{J}_1^\dagger L_1 A_1 \mathbf{J}_1 \Phi^*, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{R}_0^l(z) = \mathbf{R}_0(z) + L_0 A_0(z) \mathbf{J}_0^\dagger(z) \mathbf{J}_0(z). \quad (6.7)$$

Здесь $\mathbf{s}_l(z) = \text{diag}\{\mathbf{s}_{1,l}(z), \mathbf{s}_{2,l}(z), \mathbf{s}_{3,l}(z)\}$. Через $M^l(z)$ обозначено предполагаемое аналитическое продолжение на лист Π_l матрицы компонент Фаддеева $M(z)$.

ТЕОРЕМА 9. *Ядра итераций $\mathcal{Q}^{(n)}(z) = ((-\mathbf{t} \mathbf{R}_0 \Upsilon)^n \mathbf{t})(z)$, $n \geq 1$, свободных членов уравнений Фаддеева (2.6) допускают в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ аналитическое продолжение на область $\Pi_l^{(\text{hol})}$ каждого нефизического листа $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$. Это продолжение описывается равенствами $\mathcal{Q}^{(n)}(z)|_{\Pi_l} = ((-\mathbf{t}^l \mathbf{R}_0^l \Upsilon)^n \mathbf{t}^l)(z)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возникающие при подстановке в $\mathcal{Q}^{(n)}(z)|_{\Pi_l}$ соотношений (6.6) и (6.7) произведения $L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon \mathcal{Q}^{(m)}$, $\mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger L_1$, $\tilde{L}_0 \mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(m)}$, $\mathcal{Q}^{(m)} \mathbf{J}_0^\dagger \tilde{L}_0$, $L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon \mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger L_1$, $\tilde{L}_0 \mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(m)} \mathbf{J}_0^\dagger \tilde{L}_0$, $L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon \mathcal{Q}^{(m)} \mathbf{J}_0^\dagger \tilde{L}_0$ и $\tilde{L}_0 \mathbf{J}_0 \mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger L_1$, $0 \leq m < n$, должны пониматься в соответствии с определениями из раздела 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 9 означает, что мы можем рассматривать продолженные уравнения Фаддеева (6.5) лишь на областях $\Pi_l^{(\text{hol})} \subset \Pi_l$.

Построение представлений для $M^l(z)$ состоит в явном “решении” продолженных уравнений Фаддеева (6.5) по той же схеме, которая применялась в работах [39, 40] при построении представлений типа (3.2) для аналитического продолжения T -матрицы на нефизические листы римановой поверхности энергии в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами. Используя выражения (6.6) для $\mathbf{t}^l(z)$ и (6.7) для $\mathbf{R}_0^l(z)$, сначала переносим в левую часть (6.5) все слагаемые с $M^l(z)$, не содержащие операторов $\mathbf{J}_0$ и $\mathbf{J}_1$. Затем (при $z \notin \sigma(H)$) обращаем операторы $\mathbf{I} + \mathbf{t}(z) \mathbf{R}_0(z) \Upsilon$, пользуясь соотношением $(\mathbf{I} + \mathbf{t} \mathbf{R}_0 \Upsilon)^{-1} = \mathbf{I} - M \Upsilon \mathbf{R}_0$ (см. [29]). Вводя новые неизвестные

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{(l)} &= |L_0| \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{R}_0) \Upsilon M^l, \\ \mathbf{X}_1^{(l)} &= -L_1 \left[\mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{R}_0 + A_0 L_0 \mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{J}_0 \right] \Upsilon M^l, \end{aligned}$$

мы получаем для них замкнутую систему уравнений, которую удастся разрешить явно. Выражая $M^l(z)$ через $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}$, приходим к искомым представлениям для $M^l(z)$.

ТЕОРЕМА 10. *Матрица $M(z)$, составленная из ядер компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$ оператора $T(z)$, допускает в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ аналитическое продолжение по z в области $\Pi_l^{(\text{hol})}$ нефизических листов Π_l римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Это продолжение описывается формулой*

$$M^l = M - \left(M \Omega^\dagger \mathbf{J}_0^\dagger, \Phi \mathbf{J}_1^\dagger + M \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger \right) L A S_l^{-1} \tilde{L} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 \Omega M \\ \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon M + \mathbf{J}_1 \Phi^* \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где $S_l(z)$ – усеченная матрица рассеяния (4.19), $L = \text{diag}\{l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$ и $\tilde{L} = \text{diag}\{|l_0|, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$. Ядра

всех операторов, присутствующих в правой части (6.8), берутся на физическом листе.

Отметим, что $LAS_l^{-1}(z)\tilde{L} = \tilde{L}[S_l^\dagger(z)]^{-1}AL$. Так что соотношения (6.8) можно переписать также и в терминах матриц рассеяния $S_l^\dagger(z)$. Ясно также, что их можно записать в терминах (усеченных) симметризованных матриц рассеяния [28].

Представления для продолжения (усеченных) матриц рассеяния $S_l(z), S_l(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ и $S_l^\dagger(z), S_l^\dagger(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$, следуют из представлений (6.8) для $M^l(z)$. Перед тем как привести конечные формулы, сделаем несколько замечаний.

Прежде всего отметим, что функция $A_0(z)$ однозначна, и, следовательно, на всех листах Π_l она имеет один и тот же вид $A_0(z) = -\pi i z^2$. В то же время при продолжении с Π_0 на Π_l функция $A_{\beta,j}(z) = -\pi i \sqrt{z - \lambda_{\beta,j}}$ сохраняет свой вид, если только $l_{\beta,j} = 0$. Если $l_{\beta,j} = 1$, то она переходит в $A'_{\beta,j}(z) = -A_{\beta,j}(z)$. Аналогичная инверсия имеет (или не имеет) место и для аргументов $\hat{P}, \hat{P}', \hat{p}_\alpha$ и $\hat{p}'_\beta$ ядер операторов $J_0 \Omega M \Omega^\dagger J_0^\dagger, J_0 \Omega M \Upsilon \Psi J_1^\dagger, J_1 \Psi^* \Upsilon M \Omega^\dagger J_0^\dagger$ и $J_1 \Psi^* (\Upsilon \mathbf{v} + \Upsilon M \Upsilon) \Psi J_1^\dagger$. Напомним, что на физическом листе Π_0 действие $J_0(z)$ ($J_0^\dagger(z)$) превращает $P \in \mathbf{R}^6$ в $\sqrt{z}\hat{P}$ ($P' \in \mathbf{R}^6$ в $\sqrt{z}\hat{P}'$). В то же время $p_\alpha \in \mathbf{R}^3$ ($p'_\beta \in \mathbf{R}^3$) под действием $J_{\alpha,i}(z)$ ($J_{\beta,j}^\dagger(z)$) превращается в $\sqrt{z - \lambda_{\alpha,i}}\hat{p}_\alpha$ ($\sqrt{z - \lambda_{\beta,j}}\hat{p}'_\beta$). Поэтому введем в рассмотрение операторы $\mathcal{E}(l) = \text{diag}\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1\}$, где $\mathcal{E}_0$ – тождественный оператор в $\hat{\mathcal{H}}_0$, если $l_0 = 0$, и $\mathcal{E}_0$ – инверсия, $(\mathcal{E}_0 f)(\hat{P}) = f(-\hat{P})$, если $l_0 = \pm 1$. Аналогично $\mathcal{E}_1(l) = \text{diag}\{\mathcal{E}_{1,1}, \dots, \mathcal{E}_{1,n_1}; \mathcal{E}_{2,1}, \dots, \mathcal{E}_{2,n_2}; \mathcal{E}_{3,1}, \dots, \mathcal{E}_{3,n_3}\}$, где $\mathcal{E}_{\beta,j}$ – тождественный оператор в $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta,j)}$, если $l_{\beta,j} = 0$, и $\mathcal{E}_{\beta,j}$ – инверсия, $(\mathcal{E}_{\beta,j} f)(\hat{p}'_\beta) = f(-\hat{p}'_\beta)$, если $l_{\beta,j} = 1$. Через $e_1(l)$ обозначим диагональную матрицу, $e_1(l) = \text{diag}\{e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}; e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}; e_{3,1}, \dots, e_{3,n_3}\}$ с элементами $e_{\beta,j} = 1$, если $l_{\beta,j} = 0$, и $e_{\beta,j} = -1$, если $l_{\beta,j} = 1$. Пусть $e(l) = \text{diag}\{e_0, e_1\}$, где $e_0 = +1$.

ТЕОРЕМА 11. Если существует путь на поверхности $\mathfrak{R}$, при движении по которому из области $\Pi_l^{(\text{hol})}$ на листе Π_0 в область $\Pi_l^{(\text{hol})} \cap \Pi_{l''}^{(\text{hol})}$ на листе $\Pi_{l'}$ параметр z остается на промежуточных листах $\Pi_{l''}$ в областях $\Pi_l^{(\text{hol})} \cap \Pi_{l''}^{(\text{hol})}$, то усеченные матрицы рассеяния $S_l(z)$ и $S_l^\dagger(z)$ допускают аналитическое продолжение по z на лист $\Pi_{l'}$ в область $\Pi_l^{(\text{hol})} \cap \Pi_{l''}^{(\text{hol})}$. Это продолжение описывается формулами

$$S_l(z)|_{\Pi_{l'}} = \mathcal{E}(l') \left[\hat{\mathbf{I}} + \tilde{L} \hat{T} L A e(l') - \tilde{L} \hat{T} L' A S_{l'}^{-1} \tilde{L}' \hat{T} L A e(l') \right] \mathcal{E}(l'), \quad (6.9)$$

$$S_l^\dagger(z)|_{\Pi_{l'}} = \mathcal{E}(l') \left[\hat{\mathbf{I}} + e(l') A L \hat{T} \tilde{L} - e(l') A L \hat{T} \tilde{L}' [S_{l'}^\dagger]^{-1} A L' \hat{T} \tilde{L} \right] \mathcal{E}(l'), \quad (6.10)$$

где $L' = \{l'_0, l'_{1,1}, \dots, l'_{1,n_1}, l'_{2,1}, \dots, l'_{2,n_2}, l'_{3,1}, \dots, l'_{3,n_3}\}$ и $\tilde{L}' = \{l'_0, l'_{1,1}, \dots, l'_{1,n_1}, l'_{2,1}, \dots, l'_{2,n_2}, l'_{3,1}, \dots, l'_{3,n_3}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $l_0 = 0$, то представление (6.9) для аналитического продолжения $S_l(z)$ на (“свой”) лист Π_l приобретает простой вид (ср. с (3.6))

$$S_l(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) \left[\hat{\mathbf{I}} + e(l) - S_l^{-1}(z)e(l) \right] \mathcal{E}(l) = \mathcal{E}(l) S_l^{-1}(z) \mathcal{E}(l).$$

Точно так же $S_l^\dagger(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) [S_l^\dagger(z)]^{-1} \mathcal{E}(l)$.

Как мы установили, ядра всех операторов, присутствующих в правой части выражения (2.7) для резольвенты $R(z)$, допускают в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ аналитическое продолжение на области $\Pi_l^{(\text{hol})}$ нефизических листов Π_l поверхности $\mathfrak{R}$. Следовательно, такое продолжение допускает и ее ядро $R(P, P', z)$.

ТЕОРЕМА 12. *Аналитическое продолжение в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ резольвенты $R(z)$ на лист Π_l в область $\Pi_l^{(\text{hol})}$ описывается формулой*

$$R(z)|_{\Pi_l} = R + ([I - RV]J_0^\dagger, \Omega[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0 M \Upsilon] \Psi J_1^\dagger) \times \\ \times LAS_l^{-1} \tilde{L} \left(\begin{array}{c} J_0[I - VR] \\ J_1 \Psi^* [\mathbf{I} - \Upsilon M \mathbf{R}_0] \Omega^\dagger \end{array} \right). \quad (6.11)$$

Ядра всех операторов, присутствующих в правой части (6.11), относятся к физическому листу.

Отметим, что по своей структуре представление (6.11) аналогично представлению (3.7) для аналитического продолжения на нефизический лист двухчастичной функции Грина. Его доказательство основывается на непосредственном использовании представлений (6.8) для $M^l(z)$.

Список литературы

- [1] *G. Gamow* // Z. Phys. 1928. V. 51. P. 204–212.
- [2] *R. Jost* // Helv. Phys. Acta. 1947. V. 20. P. 250–266.
- [3] *Р. Ньютон*. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
- [4] *В. де Альфаро, Т. Редже*. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1986.
- [5] *G. Parravicini, V. Gorini, E. C. G. Sudarshan* // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2208–2226.
- [6] *A. Böhm* // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2813–2823.
- [7] *А. Бюм*. Квантовая механика: основы и приложения. М.: Мир, 1990.
- [8] *J. Schwinger* // Ann. Phys. 1960. V. 9. P. 169–193.
- [9] *A. Grossmann* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 1025–1037.
- [10] *E. Balslev, J. M. Combes* // Commun. Math. Phys. 1971. V. 22. P. 280–294.
- [11] *J. S. Howland* // J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 50. P. 415–437.
- [12] *J. Rauch* // J. Funct. Anal. 1980. V. 35. P. 304–315.
- [13] *L. P. Horwitz, E. Katznelson* // J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 848–859.
- [14] *E. Balslev, E. Skibsted* // Ann. Inst. H. Poincaré. 1985. V. 43. P. 369–397.
- [15] *Resonances* / E. Brandas, N. Elander. Springer-Verlag, 1987.
- [16] *W. Hunziker* // Commun. Math. Phys. 1990. V. 132. P. 177–188.
- [17] *С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден*. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [18] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики Т. I–IV. М.: Мир, 1977–1982.
- [19] *П. Лакс, Р. Филлипс*. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971; Теория рассеяния для автоморфных функций. М.: Мир, 1977.
- [20] *Б. С. Павлов, С. И. Федоров* // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 2. С. 132–169.
- [21] *С. И. Федоров* // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 6. С. 132–169.
- [22] *А. К. Мотовилов* // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 248–265.
- [23] *С.-Y. Hu, A. K. Bhatia* // Muon Catalyzed Fusion, Vol. 5/6, 1990/91. P. 439–444.
- [24] *Л. Д. Фаддеев* // Тр. МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 1–125.
- [25] *J. Ginibre, M. Moulin* // Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A. 1974. V. 21. P. 97–145.
- [26] *Д. Р. Яфаев* // Матем. сб. 1978. Т. 106. С. 622–640.
- [27] *Д. Р. Яфаев* // ТМФ. 1978. Т. 37. № 1. С. 48–57.
- [28] *С. П. Меркурьев*. Теория рассеяния для системы трех частиц в конфигурационном пространстве: Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.-м.н.. Л.: ЛГУ, 1978.

- [29] *С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев*. Теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [30] *V.Enss* // *Lecture Notes in Math.* 1985. V. 1159. P. 39–176.
- [31] *J.Derezinski* // *Ann. Math.* 1993. V. 138. P. 427–476.
- [32] *А.А.Квицинский, Ю.А.Куперин, С.П.Меркурьев, А.К.Мотовилов, С.Л.Яковлев* // *ЭЧАЯ* 1986. Т. 17. №2. С. 267–317.
- [33] *Yu.A.Kuperin, K.A.Makarov, S.P.Merkuriev, A.K.Motovilov, B.S.Pavlov* // *J. Math. Phys.* 1990. V. 31. P. 1681–1690.
- [34] *Э.Шмид, Х.Цигельман*. Проблема трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.
- [35] *В.Б.Беляев*. Лекции по теории малочастичных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [36] *К.Меллер, Ю.В.Орлов* // *ЭЧАЯ*. 1989. Т. 20. С. 1341–1395.
- [37] *J.J.Derezinski* // *Math. Phys.* 1987. V. 28. P. 1080–1088.
- [38] *Ю.В.Орлов, В.В.Туровцев* // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 86. №5. С. 1600–1617.
- [39] *А.К.Мотовилов* // *ТМФ*. 1993. Т. 95. №3. С. 427–438.
- [40] *А.К.Мотовилов* // *ЯФ*. 1993. Т. 56. №7. С. 61–65.
- [41] *А.К.Мотовилов* // *Proc. of 14th Intern. Conf. on Few Body Problems in Physics Williamsburg, USA, May 26–31, 1994*. P. 816–819.
- [42] *И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов*. Пространства основных и обобщенных функций. Т. 1. М.: Физматгиз, 1958.

Объединенный институт ядерных исследований
 Лаборатория теоретической физики
 E-mail: motovilv@thsun1.jinr.dubna.su

Поступила в редакцию
 19.VI.1995 г.

A. K. Motovilov
REPRESENTATIONS FOR THREE-BODY
 T -MATRIX ON UNPHYSICAL SHEETS. I

Explicit representations are formulated for the Faddeev components of three-body T -matrix continued analytically on unphysical sheets of the energy Riemann surface. According to the representations, the T -matrix is obviously expressed in terms of its components taken on the physical sheet only. The representations for T -matrix are used to construct similar representations for analytical continuation of three-body scattering matrices and resolvent. Domains on unphysical sheets are described where the representations obtained can be applied.