Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Мотовилов, Представления для трехчастичной T -матрицы на нефизических листах. II, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 478–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:43:20

А. К. Мотовилов

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ T -МАТРИЦЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ. II

Дается доказательство явных представлений, сформулированных в части I статьи. Проводится обоснование аналогичных представлений для аналитического продолжения трехчастичных матриц рассеяния и резольвенты. Обсуждается алгоритм нахождения резонансов в системе трех квантовых частиц на основании дифференциальных уравнений Фаддеева.

*Работа посвящается памяти
Станислава Петровича Меркурьева, учеником
которого посчастливилось быть автору.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы автора [1], посвященной исследованию строения T -матрицы, а также матриц рассеяния и резольвенты гамильтониана для системы трех частиц после их продолжения на нефизические листы римановой поверхности энергии.

Центральный результат работы [1] – представления для продолжения T -матрицы на нефизические листы в терминах самой этой матрицы, а также матриц рассеяния на физическом листе. В [1] была намечена лишь схема доказательства упомянутых представлений. Основная цель настоящей работы – их полное доказательство. С помощью представлений для T -матрицы мы обосновываем также представления для продолжения матриц рассеяния и резольвенты (см. [1]).

Как и в [1], предполагаем, что потенциалы взаимодействия являются парными и убывают в координатном представлении не медленнее чем экспоненциально. Весь анализ проводим на основе интегральных уравнений Фаддеева [2, 3] для компонент T -матрицы в импульсном представлении. При этом мы строим продолжение уравнений Фаддеева как на соседние, так и на удаленные нефизические листы. Полное описание рассматриваемой части трехчастичной римановой поверхности см. в [1]. Представления для компонент T -матрицы на нефизических листах получаются в результате явного разрешения продолженных уравнений Фаддеева в терминах физического листа.

Отметим, что продолжение s -волновых уравнений Фаддеева на нефизические листы, соседние по отношению к физическому листу, проводилось ранее в работе [4] (см. также [5]) для случая сепарабельных парных потенциалов.

Мы обсуждаем также практическое значение полученных представлений. Согласно этим представлениям (см. равенства (4.34), (5.1) и (6.1)) нетривиальные сингулярности как T -матрицы, так и матриц рассеяния и резольвенты после их продолжения на нефизические листы определяются особенностями операторов, обратных к усеченным матрицам рассеяния на физическом листе. Следовательно, резонансами (полюсами T -матрицы, матрицы рассеяния и резольвенты) оказываются те значения энергии, для которых матрицы рассеяния после их усечения в соответствии с индексом (номером) рассматриваемого нефизического листа имеют нулевое собственное число. Эти свойства трехчастичных матриц рассеяния являются аналогом известных свойств матриц рассеяния в задаче двух частиц и многоканальных задачах с бинарными каналами (см., например, [6–8], а также [5, 9, 10]). Для вычисления трехчастичных резонансов как нулей усечений матрицы рассеяния можно использовать, в частности, дифференциальную формулировку задачи рассеяния [3, 11] с выходом на комплексную плоскость энергии (физический лист).

Опишем структуру работы. В разделе 2 вводятся обозначения. Аналитическое продолжение на нефизические листы уравнений Фаддеева проводится в разделе 3. Раздел 4 посвящен выводу явных представлений для аналитического продолжения на нефизические листы компонент трехчастичной T -матрицы. Аналогичные представления строятся для матрицы рассеяния в разделе 5 и для резольвенты – в разделе 6. В разделе 7 формулируется алгоритм для вычисления трехчастичных резонансов на основе дифференциальных уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

На протяжении всей работы мы строго следуем соглашениям и обозначениям, принятым в [1]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь тем, что приведем их краткую сводку. Отметим сразу, что при использовании формул из статьи [1], что будет происходить довольно часто, мы снабжаем их номер в [1] соответствующей ссылкой 1, например (1,2.1), (1,3.2) и т.д.

Для описания рассматриваемой системы трех частиц в импульсном представлении используем стандартные наборы приведенных относительных импульсов (1,2.1) k_α, p_α , $\alpha = 1, 2, 3$, которые объединяются в шестимерные векторы $P = \{k_\alpha, p_\alpha\}$. Переход от одной пары импульсов $\{k_\alpha, p_\alpha\}$ к другой $\{k_\beta, p_\beta\}$ осуществляется преобразованием поворота в $\mathbf{R}^6$, $k_\alpha = c_{\alpha\beta}k_\beta + s_{\alpha\beta}p_\beta$, $p_\alpha = -s_{\alpha\beta}k_\beta + c_{\alpha\beta}p_\beta$, где коэффициенты $c_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$ зависят лишь от масс частиц [3].

Гамильтониан H системы задается выражением $(Hf)(P) = P^2 f(P) + \sum_{\alpha=1}^3 (v_\alpha f)(P)$, $P^2 = k_\alpha^2 + p_\alpha^2$, $f \in \mathcal{H}_0 \equiv L_2(\mathbf{R}^6)$, где v_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – парные потенциалы, считающиеся для определенности локальными. Это означает, что ядра v_α зависят лишь от разности переменных k_α и k'_α , $v_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha) = v_\alpha(k_\alpha - k'_\alpha)$.

Мы рассматриваем два варианта потенциалов v_α . В первом варианте $v_\alpha(k)$ – голоморфные функции переменной $k \in \mathbf{C}^3$, удовлетворяющие оценке (1,2.2). Во втором варианте потенциалы $v_\alpha(k)$ голоморфны по k лишь в полосе $W_{2b} = \{k : k \in \mathbf{C}^3, |\operatorname{Im} k| < 2b\}$ и подчиняются при $k \in W_{2b}$ оценке (1,2.3). В обоих вариантах $v_\alpha(-k) = \overline{v_\alpha(k)}$, что гарантирует самосопряженность гамильтониана H .

В настоящей работе изложение ведется на примере второго варианта потенциалов. Утверждения для первого варианта получаются из утверждений, приводимых в работе, если положить в них $b = +\infty$.

Через h_α обозначаем гамильтониан парной подсистемы α . Нумерация собственных чисел $\lambda_{\alpha,j} \in \sigma_d(h_\alpha)$, $\lambda_{\alpha,j} < 0$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, $n_\alpha < \infty$, проводится с учетом их кратности: каждое собственное число встречается в нумерации столько раз, какова его кратность. Наибольшее из этих чисел обозначаем $\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max} = \max_{\alpha,j} \lambda_{\alpha,j} < 0$. Через $\psi_{\alpha,j}(k_\alpha)$ обозначаются соответствующие собственные функции.

Под $\sigma_d(H)$ и $\sigma_c(H)$ подразумеваются дискретная и непрерывная компоненты спектра $\sigma(H)$ оператора H . При этом $\sigma_c(H) = (\lambda_{\min}, +\infty)$, где $\lambda_{\min} = \min_{\alpha,j} \lambda_{\alpha,j}$.

Обозначение H_0 используется для оператора кинетической энергии, $(H_0 f)(P) = P^2 f(P)$. Через $R_0(z)$ и $R(z)$ обозначаются резольвенты H_0 и H , соответственно: $R_0(z) = (H_0 - zI)^{-1}$ и $R(z) = (H - zI)^{-1}$, где I — тождественный оператор в $\mathcal{H}_0$.

Пусть $M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha - v_\alpha R(z) v_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, — компоненты [2, 3] T -матрицы $T(z) = V - VR(z)V$, где $V = v_1 + v_2 + v_3$. Уравнения Фаддеева [2, 3] для операторов $M_{\alpha\beta}$ записываются в матричной форме

$$M(z) = \mathbf{t}(z) - \mathbf{t}(z)\mathbf{R}_0(z)\Upsilon M(z), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{R}_0(z) = \text{diag}\{R_0(z), R_0(z), R_0(z)\}$, а под Υ подразумевается (3×3) -матрица с элементами $\Upsilon_{\alpha\beta} = 1 - \delta_{\alpha\beta}$. Кроме того, используется обозначение $\mathbf{t}(z) = \text{diag}\{\mathbf{t}_1(z), \mathbf{t}_2(z), \mathbf{t}_3(z)\}$. Здесь операторы $\mathbf{t}_\alpha(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, имеют ядра $\mathbf{t}_\alpha(P, P', z) = t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha, z - p_\alpha^2)\delta(p_\alpha - p'_\alpha)$, где $t_\alpha(k, k', z)$ — ядра соответствующих парных T -матриц $t_\alpha(z)$. Операторы M , $\mathbf{t}$, $\mathbf{R}_0$ и Υ рассматриваются как операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_0 = \oplus_{\alpha=1}^3 L_2(\mathbf{R}^6)$.

Резольвента $R(z)$ гамильтониана H выражается через матрицу $M(z)$ по формуле [3]

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)\Omega M(z)\Omega^\dagger R_0(z), \quad (2.2)$$

где $\Omega, \Omega : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, — оператор, задаваемый матрицей-строкой $\Omega = (1, 1, 1)$. При этом $\Omega^\dagger = \Omega^* = (1, 1, 1)^\dagger$.

Всюду под $\sqrt{z - \lambda}$, $z \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, понимается главная ветвь функции $(z - \lambda)^{1/2}$. Через $\hat{q}$ обычно обозначается единичный вектор в направлении $q \in \mathbf{R}^N$, $\hat{q} = q/|q|$, и через S^{N-1} — единичная сфера в $\mathbf{R}^N$, $\hat{q} \in S^{N-1}$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^N$ обозначается через $(\cdot, \cdot)$. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ применяется для обозначения скалярного произведения в гильбертовых пространствах.

Пусть $\mathcal{H}^{(\alpha,j)} = L_2(\mathbf{R}^3)$ и $\mathcal{H}^{(\alpha)} = \oplus_{j=1}^{n_\alpha} \mathcal{H}^{(\alpha,j)}$. Через Ψ_α обозначается оператор, действующий из $\mathcal{H}^{(\alpha)}$ в $\mathcal{H}_0$ по формуле $(\Psi_\alpha f)(P) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \psi_{\alpha,j}(k_\alpha) f_j(p_\alpha)$. Обозначение Ψ используется для блочно-диагонального матричного оператора, составленного из Ψ_α , $\Psi = \text{diag}\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$, и действующего из $\mathcal{H}_1 = \oplus_{\alpha=1}^3 \mathcal{H}^{(\alpha)}$ в $\mathcal{G}_0$.

Операторы Φ_α и Φ получаются из Ψ_α и Ψ путем замены собственных функций $\psi_{\alpha,j}(k_\alpha)$ формфакторами $\phi_{\alpha,j}(k_\alpha) = (v_\alpha \psi_{\alpha,j})(k_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$.

Через $\mathcal{O}(\mathbf{C}^N)$ обозначается преобразование Фурье пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^N$.

Оператор $J_{\alpha,j}(z)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, реализует сужение функции $f(p_\alpha)$, $p_\alpha \in \mathbf{R}^3$, на энергетическую поверхность $\lambda_{\alpha,j} + |p_\alpha|^2 = E$ при $z = E \pm i0$, $E > \lambda_{\alpha,j}$, и осуществляет затем, если это возможно, ее аналитическое продолжение в область комплексных значений энергии z . На множестве $\mathcal{O}(\mathbf{C}^3)$ оператор $J_{\alpha,j}(z)$ действует по формуле $(J_{\alpha,j}(z)f)(\hat{p}_\alpha) = f(\sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}\hat{p}_\alpha)$. Через $J_{\alpha,j}^\dagger(z)$ обозначается оператор, “транспонированный” по отношению к $J_{\alpha,j}(z)$ (см [1]).

Оператор $J_0(z)$ определяется на $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ аналогично $J_{\alpha,j}(z)$ формулой $(J_0(z)f)(\hat{P}) = f(\sqrt{z}\hat{P})$. Обозначение $J_0^\dagger(z)$ используется для соответствующего “транспонированного” оператора [1].

Из операторов $J_{\alpha,j}$ и $J_{\alpha,j}^\dagger$ составляются диагональные матрицы $J^{(\alpha)}(z) = \text{diag}\{J_{\alpha,1}(z), \dots, J_{\alpha,n_\alpha}(z)\}$ и $J^{(\alpha)\dagger}(z) = \text{diag}\{J_{\alpha,1}^\dagger(z), \dots, J_{\alpha,n_\alpha}^\dagger(z)\}$. В свою очередь, из последних образуются операторы $J_1(z) = \text{diag}\{J^{(1)}(z), J^{(2)}(z), J^{(3)}(z)\}$ и $J_1^\dagger(z) = \text{diag}\{J^{(1)\dagger}(z), J^{(2)\dagger}(z), J^{(3)\dagger}(z)\}$. Кроме перечисленных, в работе используются блочно-диагональные операторные (3×3) -матрицы $\mathbf{J}_0(z) = \text{diag}\{J_0(z), J_0(z), J_0(z)\}$ и $\mathbf{J}_0^\dagger(z) = \text{diag}\{J_0^\dagger(z), J_0^\dagger(z), J_0^\dagger(z)\}$, а также операторы $\mathbf{J}(z) = \text{diag}\{J_0(z), J_1(z)\}$ и $\mathbf{J}^\dagger(z) = \text{diag}\{J_0^\dagger(z), J_1^\dagger(z)\}$.

Наряду с $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{H}_1$, введенными выше, рассматриваются гильбертовы пространства $\hat{\mathcal{H}}_0 = L_2(S^5)$, $\hat{\mathcal{G}}_0 = \oplus_{\alpha=1}^3 \hat{\mathcal{H}}_0$ и $\hat{\mathcal{H}}_1 = \oplus_{\alpha=1}^3 \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha)}$, где $\hat{\mathcal{H}}^{(\alpha)} \equiv \oplus_{j=1}^{n_\alpha} \hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)}$, $\hat{\mathcal{H}}^{(\alpha,j)} = L_2(S^2)$. Тожественные операторы в $\hat{\mathcal{H}}_0$, $\hat{\mathcal{G}}_0$, $\hat{\mathcal{H}}_1$ и $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ обозначаются соответственно через $\hat{I}_0$, $\hat{I}_0$, $\hat{I}_1$ и $\hat{\mathbf{I}}$.

Операторнозначная функция $T(z)$, $T(z) : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, переменной $z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\sigma(H)}$ определяется равенством

$$T(z) \equiv \begin{pmatrix} \Omega M(z) \Omega^\dagger & \Omega M(z) \Upsilon \Psi \\ \Psi^* \Upsilon M(z) \Omega^\dagger & \Psi^* (\Upsilon \mathbf{v} + \Upsilon M(z) \Upsilon) \Psi \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{v} = \text{diag}\{v_1, v_2, v_3\}$. Усеченные трехчастичные матрицы рассеяния выражаются через $T(z)$ по формулам

$$S_l(z) \equiv \hat{\mathbf{I}} + (\tilde{L} \hat{T} L A)(z) \quad \text{и} \quad S_l^\dagger(z) \equiv \hat{\mathbf{I}} + (A L \hat{T} \tilde{L})(z), \quad (2.4)$$

где $\hat{T}(z) = (\mathbf{J} T \mathbf{J}^\dagger)(z)$, $\hat{T}(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$. Мультииндекс

$$l = (l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}) \quad (2.5)$$

имеет компоненты $l_0 = 0$ или $l_0 = \pm 1$ и $l_{\alpha,j} = 0$ или $l_{\alpha,j} = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$. Через L и $\tilde{L}$ обозначаются диагональные матрицы, отвечающие мультииндексу l : $L = \text{diag}\{L_0, L_1\}$, $\tilde{L} = \text{diag}\{|L_0|, L_1\}$, где $L_0 = l_0$ и $L_1 = \text{diag}\{l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$. Через $A(z)$ обозначается диагональная матрица-функция $A(z) = \text{diag}\{A_0(z), A_{\alpha,j}(z), \alpha = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n_\alpha\}$ с элементами $A_0(z) = -\pi i z^2$ и $A_{\alpha,j}(z) = -\pi i \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}$.

Область голоморфности оператора $(L \hat{T} L')(z)$ по переменной $z \in \mathbf{C}$ обозначается через $\Pi_{ll'}^{\text{hol}}$. Матрицы $S_l(z)$ и $S_l^\dagger(z)$, а также произведения $(L_0 \mathbf{J}_0 M)(z)$, $(L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon M)(z)$ и $(M \mathbf{J}_0^\dagger L_0)(z)$, $(M \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger L_1)(z)$ голоморфны по z на областях $\Pi_l^{(\text{hol})} = \Pi_{ll'}^{\text{hol}}$. Описание областей $\Pi_{ll'}^{\text{hol}}$ и $\Pi_l^{(\text{hol})}$ см. в [1, раздел 4].

Рассматриваемая нами часть трехчастичной римановой поверхности обозначается $\mathfrak{R}$. Листы $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$ отвечают точкам ветвления $z = \lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, а также $z = 0$, и нумеруются мультииндексом (2.5). При $l_0 = 0$ его компоненты $l_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, могут принимать любое из двух значений 0 и 1. В этом случае Π_l представляют собой экземпляры комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом по лучу $[\lambda_{\min}, +\infty)$. Если $l_0 = \pm 1$, то все остальные компоненты $l_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, мультииндекса l считаются равными единице. Принимается, что при $l_0 = +1$ лист Π_l совпадает с верхней полуплоскостью $\mathbf{C}^+ = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z > 0\}$, а при $l_0 = -1$ — с нижней, $\mathbf{C}^- = \{z \in \mathbf{C} : \text{Im } z < 0\}$. Предполагаем дополнительно, что на листах Π_l с $l_0 = \pm 1$ сделаны разрезы по лучам, составляющим $Z_{\text{res}} = \bigcup_{\alpha=1}^3 Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$. Здесь $Z_{\text{res}}^{(\alpha)} = \{z : z = z_r \rho, 1 \leq \rho < +\infty, z_r \in \sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}\}$ — совокупность лучей, уходящих из множества резонансов $\sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$ подсистемы α на бесконечность в направлениях $\hat{z}_r = z_r/|z_r|$, $z_r \in \sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$. Более подробное описание поверхности $\mathfrak{R}$ и, в частности, способа склейки листов Π_l см. в разделе 5 работы [1].

Лист Π_l , для которого все компоненты мультииндекса l равны нулю, $l_0 = l_{\alpha,j} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, называется физическим. Нефизические листы Π_l с $l_0 = 0$ называются двухчастичными, поскольку они отвечают обходам лишь двухчастичных порогов $z = \lambda_{\alpha,j}$, а трехчастичный порог $z = 0$ не обходится. Листы Π_l при $l_0 = \pm 1$ называются трехчастичными.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ДЛЯ КОМПОНЕНТ T -МАТРИЦЫ НА НЕФИЗИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ

Целью настоящего раздела является аналитическое продолжение на нефизические листы поверхности $\mathfrak{R}$ свободных членов и ядер уравнений Фаддеева (2.1), а также их итераций. Аналитическое продолжение осуществляется в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$. Результаты продолжения представляются в явных терминах, относящихся к физическому листу.

Через $L^{(\alpha)}$, $L^{(\alpha)} = L^{(\alpha)}(l)$, обозначаются диагональные матрицы, составленные из компонент $l_{\alpha,1}, l_{\alpha,2}, \dots, l_{\alpha,n_\alpha}$ мультииндекса l листа $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$: $L^{(\alpha)} = \text{diag}\{l_{\alpha,1}, l_{\alpha,2}, \dots, l_{\alpha,n_\alpha}\}$. При этом $L_1(l) = \text{diag}\{L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}\}$ и $L(l) = \text{diag}\{L_0, L_1\}$ с $L_0 \equiv l_0$. Аналогично, $A^{(\alpha)}(z) = \text{diag}\{A_{\alpha,1}(z), A_{\alpha,2}, \dots, A_{\alpha,n_\alpha}(z)\}$ и $A_1(z) = \text{diag}\{A^{(1)}(z), A^{(2)}(z), A^{(3)}(z)\}$, так что $A(z) = \text{diag}\{A_0(z), A_1(z)\}$.

Через $\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)$ обозначается оператор, задаваемый в $\hat{\mathcal{H}}_0$ формулой

$$\mathbf{s}_{\alpha,l}(z) = \hat{I}_0 + \mathbf{J}_0(z) \mathbf{t}_\alpha(z) \mathbf{J}_0^\dagger(z) A_0(z) L_0, \quad z \in \Pi_0. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что $\mathbf{s}_{\alpha,l} = \hat{I}_0$ при $l_0 = 0$. Если $l_0 = \pm 1$, то согласно (1.4.42)–(1.4.44) оператор $\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)$ определен при $z \in \mathcal{P}_b \cap \mathbf{C}^\pm$, $\mathcal{P}_b = \{z : \text{Re } z > -b^2 + (\text{Im } z)^2 / (4b^2)\}$, и действует на $f \in \hat{\mathcal{H}}_0$ по формуле

$$(\mathbf{s}_{\alpha,l}(z)f)(\hat{P}) = \int_{S^2} d\hat{k}' s_\alpha(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha, z \cos^2 \omega) f(\cos \omega_\alpha \hat{k}'_\alpha, \sin \omega_\alpha \hat{p}_\alpha), \quad (3.2)$$

где $\omega_\alpha, \hat{k}_\alpha, \hat{p}_\alpha$ – координаты [3] точки $\hat{P}$ на гиперсфере S^5 , $\omega_\alpha \in [0, \pi/2]$, $\hat{k}_\alpha, \hat{p}_\alpha \in S^2$. При этом $\hat{P} = \{\cos \omega_\alpha \hat{k}_\alpha, \sin \omega_\alpha \hat{p}_\alpha\}$. Через s_α обозначается матрица рассеяния (1,2.16) для парной подсистемы α . В сущности, оператор $s_{\alpha,l}$ – это матрица рассеяния s_α , записанная в трехчастичном импульсном пространстве.

Из (3.2) немедленно вытекает, что если $z \in \mathcal{P}_b \cap \mathbb{C}^\pm \setminus Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$, то существует ограниченный обратный оператор $s_{\alpha,l}^{-1}(z)$:

$$(s_{\alpha,l}^{-1}(z)f)(\hat{P}) = \int_{S^2} d\hat{k}' s_\alpha^{-1}(\hat{k}_\alpha, \hat{k}'_\alpha, z \cos^2 \omega_\alpha) f(\cos \omega_\alpha \hat{k}'_\alpha, \sin \omega_\alpha \hat{p}_\alpha),$$

где $s_\alpha^{-1}(\hat{k}, \hat{k}', \zeta)$ – ядро обратной парной матрицы рассеяния $s_\alpha(\zeta)$.

Оператор $s_{\alpha,l}^{-1}(z)$ становится неограниченным для предельных точек z , находящихся на берегах разрывов (“резонансных” лучей), входящих в $Z_{\text{res}}^{(\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 1. *Свободные члены $t_\alpha(P, P', z)$ и ядра $(t_\alpha R_0)(P, P', z)$ уравнений Фаддеева (2.1) допускают аналитическое продолжение в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbb{C}^6)$ как на двухчастичные, так и на трехчастичные листы Π_l римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Продолжение на лист Π_l , $l = (l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3})$, $l_0 = 0$, $l_{\beta,j} = 0, 1$ или $l_0 = \pm 1$, $l_{\beta,j} = 1$ (в обоих случаях $\beta = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\beta$), записывается в виде*

$$t_\alpha^l(z) \equiv t_\alpha(z)|_{\Pi_l} = t_\alpha - L_0 A_0 t_\alpha J_0^{\dagger} s_{\alpha,l}^{-1} J_0 t_\alpha - \Phi_\alpha J^{(\alpha)t} L^{(\alpha)} A^{(\alpha)} J^{(\alpha)} \Phi_\alpha^*, \quad (3.3)$$

$$[t_\alpha(z) R_0(z)]|_{\Pi_l} = t_\alpha^l(z) R_0^l(z), \quad (3.4)$$

где $R_0^l(z) \equiv R_0(z)|_{\Pi_l} = R_0(z) + L_0 A_0(z) J_0^{\dagger}(z) J_0(z)$ – продолжение [9] на Π_l свободной функции Грина $R_0(z)$. Если $l_0 = 0$ (и, следовательно, Π_l является двухчастичным нефизическим листом), то продолжение (3.3), (3.4) возможно на весь лист Π_l . При $l_0 = \pm 1$ (т.е. в случае, когда лист Π_l – трехчастичный) продолжение в виде (3.3), (3.4) возможно лишь на область $\mathcal{P}_b \cap \Pi_l$. Все ядра в правых частях равенств (3.3) относятся к физическому листу.

Доказательство теоремы проведем на примере наиболее сложного продолжения на трехчастичные нефизические листы Π_l с $l_0 = \pm 1$. Для определенности будем рассматривать случай $l_0 = +1$. Для $l_0 = -1$ доказательство аналогично.

При $z \in \Pi_0$, $\text{Im } z < 0$, рассмотрим билинейную форму

$$(f, t_\alpha R_0(z) f') = \int_{\mathbb{R}^3} dk \int_{\mathbb{R}^3} dk' \int_{\mathbb{R}^3} dp \frac{t_\alpha(k, k', z - p^2)}{k'^2 + p^2 - z} \tilde{f}(k, k', p), \quad (3.5)$$

где $\tilde{f}(k, k', p) = f(k, p) f'(k', p)$, $f, f' \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^6)$, $k = k_\alpha$, $k' = k'_\alpha$, $p = p_\alpha$. Сделаем замены переменных $|k'| \rightarrow \rho = |k'|^2$, $|p| \rightarrow \lambda = z - |p|^2$, в результате чего интеграл (3.5) перейдет в

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} dk \int_{S^2} d\hat{k}' \int_{S^2} d\hat{p} \int_{z-\infty}^z d\lambda \sqrt{z-\lambda} \int_0^\infty d\rho \sqrt{\rho} \frac{t_\alpha(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \lambda)}{\rho - \lambda} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \sqrt{z-\lambda} \hat{p}). \quad (3.6)$$

Существование аналитического продолжения ядра $(t_\alpha R_0)(z)$ на лист Π_l , $l_0 = \pm 1$, вытекает из возможности провести непрерывную деформацию контура интегрирования по переменной ρ в любой сектор области аналитичности $\mathcal{P}_b \cap \sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$ подынтегрального выражения по переменной λ так, как показано на рис. 1. Кроме того, это связано с возможностью при движении z с листа Π_0 на лист Π_l , $l_0 = +1$, провести необходимую деформацию контура интегрирования по λ так, чтобы он был всегда отделен от контура интегрирования по ρ .

Рис. 1. Деформация контура интегрирования по переменной ρ . Контур интегрирования по переменным ρ и λ помечены буквами в скобках. Крестом “ $\times$ ” отмечены собственные числа $\lambda_{\alpha,j}$ оператора h_α на отрицательной полуоси физического листа и парные резонансы из множества $\sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$ на листе Π_l , $l_0 = +1$. Обозначены также разрезы на листе Π_l , $l_0 = +1$, исходящие из точек $\sigma_{\text{res}}^{(\alpha)}$.

Чтобы получить представление (3.4) для конкретной точки $z = z_0$, выберем специальное конечное положение контуров интегрирования по λ и ρ после их последовательной деформации (рис. 2). Особенность внутреннего интеграла (по переменной ρ) после такой деформации остается интегрируемой благодаря наличию множителя $\sqrt{\rho}$. В целом интеграл (3.6) переходит в

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} dk \int_{S^2} d\hat{k}' \int_{S^2} d\hat{p} \times \\ & \times \left\{ \int_{G_1} d\lambda \sqrt{z - \lambda} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} d\rho \sqrt{\rho} \frac{t'_\alpha(k, \sqrt{\rho}\hat{k}', \lambda)}{\rho - \lambda} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho}\hat{k}', \sqrt{z - \lambda}\hat{p}) + \right. \\ & + \int_{G_2} d\lambda \sqrt{z - \lambda} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} d\rho \sqrt{\rho} \frac{t_\alpha(k, \sqrt{\rho}\hat{k}', \lambda)}{\rho - \lambda} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho}\hat{k}', \sqrt{z - \lambda}\hat{p}) + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n_\alpha} 2\pi i \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \int_0^{+\infty} d\rho \sqrt{\rho} \frac{\phi_{\alpha,j}(k) \bar{\phi}_{\alpha,j}(k')}{\rho - \lambda_{\alpha,j}} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho}\hat{k}', \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}\hat{p}) \right\}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

где через t'_α обозначено аналитическое продолжение парной T -матрицы $t_\alpha(z)$ на нефизический лист (по отношению к $t_\alpha(\lambda)$ контур $G_1 \ni \lambda$ оказывается на втором листе). Последнее слагаемое возникает как результат взятия вычетов в точках $\lambda_{\alpha,j} \in \sigma_d(h_\alpha)$.

Очевидно, что область изменения переменной $z \in \Pi_l, l_0 = +1$, куда можно провести аналитическое продолжение формы (3.5) в виде (3.7), определяется условиями $\Gamma_1 \subset \mathcal{P}_b$ и $\Gamma_1 \cap Z_{\text{res}}^{(\alpha)} = \emptyset$. Мы можем выполнить эти условия лишь при $z \in \mathcal{P}_b$.

Рис. 2. Конечное положение контуров интегрирования по переменным ρ ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$) и λ ($G_1 \cup G_2$). Контур Γ_1 представляет собой петлю, охватывающую по часовой стрелке контур G_1 – отрезок $[0, z]$; $\Gamma_2 = [0, +\infty)$; $G_2 = (z - \infty, i \operatorname{Im} z] \cup [i \operatorname{Im} z, 0)$.

Заметим, что значения внутренних интегралов по Γ_1 при $\lambda \in G_1$ определяются вычетами в точках $\rho = \lambda$. В то же время $\int_{G_2} d\lambda \cdots \int_{\Gamma_1} \cdots = 0$ в силу голоморфности по $\rho \in \operatorname{Int} \Gamma_1$ подынтегральных функций при $\lambda \in G_2$, так что

$$\begin{aligned}
 (f, t_\alpha R_0(z) f')|_{z \in \Pi_l, l_0 = +1} &= \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^3} dk \int_{S^2} d\hat{k}' \int_{S^2} d\hat{p} \times \\
 &\times \left\{ \int_{G_1} d\lambda \sqrt{z - \lambda} (-2\pi i) \sqrt{\lambda} t'_\alpha(k, \sqrt{\lambda} \hat{k}', \lambda) \tilde{f}(k, \sqrt{\lambda} \hat{k}', \sqrt{z - \lambda} \hat{p}) + \right. \\
 &+ \int_{G_1} d\lambda \sqrt{z - \lambda} \int_{\Gamma_2} d\rho \sqrt{\rho} \frac{t_\alpha(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \lambda) + \pi i \sqrt{\lambda} \tau_\alpha(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \lambda)}{\rho - \lambda} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \sqrt{z - \lambda} \hat{p}) + \\
 &+ \int_{G_2} d\lambda \sqrt{z - \lambda} \int_{\Gamma_2} d\rho \sqrt{\rho} \frac{t_\alpha(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \lambda)}{\rho - \lambda} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \sqrt{z - \lambda} \hat{p}) + \\
 &\left. + \sum_{j=1}^{n_\alpha} 2\pi i \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \int_0^{+\infty} d\rho \sqrt{\rho} \frac{\phi_{\alpha,j}(k) \bar{\phi}_{\alpha,j}(k')}{\rho - \lambda_{\alpha,j}} \tilde{f}(k, \sqrt{\rho} \hat{k}', \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \hat{p}) \right\}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Во втором слагаемом (3.8) мы воспользовались представлением (1,3.2) для парной T -матрицы на нефизическом листе. Выражение для $\tau_\alpha(k, k', \zeta)$ см. в [1, раздел 3]. Напомним, что $t'_\alpha(\zeta) = t_\alpha(\zeta) + \pi i \sqrt{\zeta} \tau_\alpha(\zeta)$.

Объединим далее слагаемые, содержащие ядро t_α на физическом листе, в один интеграл $\int_{G_1 \cup G_2} \dots$ и, пользуясь голоморфностью подынтегральной функции относительно переменной λ , спрямим контур $G_1 \cup G_2$, превратив его в луч $(z - \infty, z]$. Получим билинейную форму, отвечающую произведению $(t_\alpha R_0)(z)$, взятому на физическом листе.

Последнее слагаемое (3.8) соответствует ядру $-\Phi_\alpha J^{(\alpha)\dagger} L^{(\alpha)} A^{(\alpha)} J^{(\alpha)} \Phi^* R_0$.

Возвращаясь в оставшихся слагаемых, содержащих t'_α и τ_α , к исходным переменным k' и p' и пользуясь определением (3.1), найдем, что эти слагаемые отвечают выражению

$$L_0 A_0 \left[t_\alpha - L_0 A_0 J_0^\dagger s_{\alpha,l}^{-1} J_0 t_\alpha \right] J_0^\dagger J_0 - L_0 A_0 t_\alpha J_0^\dagger s_{\alpha,l}^{-1} J_0 t_\alpha R_0.$$

Собирая полученные результаты, мы обнаружим, что аналитическое продолжение ядра $t_\alpha R_0$ на лист Π_l , $l_0 = +1$, записывается в виде

$$\begin{aligned} [t_\alpha R_0(z)]|_{\Pi_l} = & (t_\alpha - L_0 A_0 t_\alpha J_0^\dagger s_{\alpha,l}^{-1} J_0 t_\alpha - \Phi_\alpha J^{(\alpha)\dagger} L^{(\alpha)} A^{(\alpha)} J^{(\alpha)} \Phi_\alpha^*) \times \\ & \times (R_0 + L_0 A_0 J_0^\dagger J_0) + L_0 A_0 \Phi_\alpha J^{(\alpha)\dagger} L^{(\alpha)} A^{(\alpha)} J^{(\alpha)} \Phi_\alpha^* J_0^\dagger J_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для того чтобы убедиться в факторизации (3.4), остается лишь заметить, что последнее слагаемое (3.9) равно нулю. В самом деле, легко убедиться, что при $\text{Im } z \neq 0$ или $\text{Im } z = 0$ и $z > \max_j \lambda_{\alpha,j}$ выполняются равенства

$$(J^{(\alpha)} \Phi_\alpha^* J_0^\dagger)(z) = 0, \quad (J_0 \Phi_\alpha J^{(\alpha)\dagger})(z) = 0. \quad (3.10)$$

Тем самым последнее слагаемое (3.9) исчезает, и, следовательно, выполнено (3.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ядро $[t_\alpha R_0](z)|_{\Pi_l}$ отвечает, в сущности, задаче двух частиц и должно быть трансляционно-инвариантным относительно переменной p_α . Это обстоятельство можно усмотреть, если ввести обобщенную функцию $\theta_z(p)$ на $\mathcal{O}(\mathbb{C}^3)$, действующую по правилу $(\theta_z, f) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_z} d\xi \sqrt{\xi} \int_{S^2} d\hat{p} f(\sqrt{\xi} \hat{p})$, где γ_z — отрезок прямой на комплексной плоскости, соединяющий точки $\xi = 0$ и $\xi = z$. Из представления (3.8) следует, что ядро $[t_\alpha R_0](z)|_{\Pi_l}$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (t_\alpha R_0)^l(P, P', z) = & \delta(p - p') \left\{ \frac{t_\alpha(k, k', z - p^2)}{k'^2 + p^2 - z} + \right. \\ & + \pi i L_0 \left[\theta_z(p) \sqrt{z - p^2} \frac{\tau_\alpha(k, k', z - p^2)}{k'^2 + p^2 - z} - \right. \\ & \left. - \theta_z(k') \sqrt{z - k'^2} t'_\alpha(k, k', k'^2) \frac{\delta(\sqrt{z - k'^2} - |p|)}{|p|^2} \right] + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n_\alpha} 2\pi i l_{\alpha,j} \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \frac{\phi_{\alpha,j}(k) \bar{\phi}_{\alpha,j}(k')}{k^2 - \lambda_{\alpha,j}} \frac{\delta(|p| - \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}})}{|p|^2} \right\}, \\ & k = k_\alpha, \quad k' = k'_\alpha, \quad p = p_\alpha, \quad p' = p'_\alpha, \end{aligned}$$

где благодаря наличию множителя $\delta(p - p')$ трансляционная инвариантность подчеркивается явно. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_\alpha^l(P, P', z) = & \left\{ t_\alpha(k, k', z - p^2) + \pi i L_0 \theta_z(p) \sqrt{z - p^2} \tau_\alpha(k, k', z - p^2) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n_\alpha} 2\pi i l_{\alpha,j} \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}} \phi_{\alpha,j}(k) \bar{\phi}_{\alpha,j}(k') \frac{\delta(|p| - \sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}})}{|p|^2} \right\} \delta(p - p'). \end{aligned}$$

Выписанные здесь представления для $\mathbf{t}_\alpha^l$ и $(\mathbf{t}_\alpha R_0)^l$ имеют место не только для трехчастичных Π_l , $l_0 = \pm 1$, но также и для всех двухчастичных листов поверхности $\mathfrak{R}$. На двухчастичных листах эти представления существенно проще, т.к. $L_0 = l_0 = 0$.

Используя (3.3) и (3.4), мы можем записать формальное продолжение уравнений Фаддеева на лист Π_l с учетом (2.1) в матричном виде

$$M^l(z) = \mathbf{t}^l(z) - \mathbf{t}^l(z) \mathbf{R}_0^l(z) \Upsilon M^l(z), \quad (3.11)$$

где

$$\mathbf{t}^l(z) = \mathbf{t} - L_0 A_0 \mathbf{t} \mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{t} - \Phi \mathbf{J}_1^\dagger L_1 A_1 \mathbf{J}_1 \Phi^*, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_0^l(z) = \mathbf{R}_0(z) + L_0 A_0(z) \mathbf{J}_0^\dagger(z) \mathbf{J}_0(z). \quad (3.13)$$

Здесь и далее $\mathbf{s}_l(z) = \text{diag}\{\mathbf{s}_{1,l}(z), \mathbf{s}_{2,l}(z), \mathbf{s}_{3,l}(z)\}$. Через $M^l(z)$ обозначено предполагаемое аналитическое продолжение на лист Π_l матрицы компонент Фаддеева $M(z)$.

ЛЕММА 1. *Для каждого двухчастичного нефизического листа Π_l поверхности $\mathfrak{R}$ можно указать путь с физического листа Π_0 в область Π_l^{hol} на Π_l , проходящий лишь по двухчастичным листам $\Pi_{l'}$, такой, что при движении по нему параметр z всегда находится в соответствующих областях $\Pi_{l'}^{\text{hol}} \subset \Pi_{l'}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся принципом математической индукции. Чтобы сделать это, сначала упорядочим все точки ветвления $\lambda_{\alpha,j}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, в порядке возрастания, переобозначив их $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq \sum_\alpha n_\alpha$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$, и положив $\lambda_{m+1} = 0$. Пусть временно мультииндекс $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ соответствует именно этой нумерации. Как обычно, $l_j = 0$, если лист Π_l отвечает главной ветви функции $(z - \lambda_j)^{1/2}$, и $l_j = 1$, если неглавной. Индекс l_0 в обозначениях опускаем.

Очевидно, переход с физического листа Π_0 через интервал (λ_1, λ_2) на соседний двухчастичный лист $\Pi_{l^{(1)}}$ (в область $\Pi_{l^{(1)}}^{\text{hol}}$), $l^{(1)} = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_m^{(1)})$ с $l_1^{(1)} = 1$ и $l_j^{(1)} = 0$ при $j \neq 1$, возможен по определению области $\Pi_{l^{(1)}}^{\text{hol}}$ (см. [1, раздел 4]). Согласно леммам 1 и 2 из [1], находясь в области $\Pi_{l^{(1)}}^{\text{hol}}$ на листе $\Pi_{l^{(1)}}$, можно подвести параметр z к вещественной оси на интервале $(\lambda^{(1)}, +\infty)$ с некоторым $\lambda^{(1)} < \lambda_1$. Оставаясь в $\Pi_{l^{(1)}}^{\text{hol}}$, можно даже совершать обход точки λ_1 , пересекая вещественную ось этой точки на отрезке $(\lambda^{(1)}, \lambda_1)$. Следовательно, с листа $\Pi_{l^{(1)}}$ можно перейти на любой соседний нефизический лист, в том числе и на лист Π_l с $l_1 = 0, l_2 = 1, l_j = 0, j \geq 3$. Переход с физического листа Π_0 через интервал (λ_2, λ_3) на лист Π_l с $l_1 = l_2 = 1, l_j = 0, j \geq 3$, возможен всегда.

Предположим далее, что таким образом, оставаясь в областях голоморфности $\Pi_{l^{(k)}}^{\text{hol}}$ и не выходя на иные нефизические листы, можно провести параметр z с листа Π_0 на все двухчастичные листы $\Pi_{l^{(k)}}$, определяемые условием $l_j^{(k)} = 0$, $j > k$. Как следует из лемм 1 и 2 из работы [1], находясь в области $\Pi_{l^{(k)}}^{\text{hol}}$ на каждом из таких листов, заведомо можно подвести параметр z к вещественной оси на интервале $(\lambda^{(k)}, +\infty)$ с некоторым $\lambda^{(k)} < \lambda_k$. Поэтому параметр z с каждого из листов $\Pi_{l^{(k)}}$ можно через интервал $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ провести на соседний нефизический лист $\Pi_{l^{(k+1)}}$ с $l_j^{(k+1)} = 1 - l_j^{(k)}$, $j \leq k$, $l_{k+1}^{(k+1)} = 1$ и $l_j^{(k+1)} = 0$, $j > k + 1$. Отсюда следует, что можно провести z с листа Π_0 на все двухчастичные нефизические листы $\Pi_{l^{(k+1)}}$ с $l_j^{(k+1)} = 0$, $j > k + 1$, оставаясь в областях голоморфности $\Pi_{l^{(k+1)}}^{\text{hol}}$ и не выходя на листы $\Pi_{l^{(s)}}$ с $s > k + 1$. Это означает на самом деле, что можно провести параметр z на все двухчастичные нефизические листы.

Лемма доказана.

Используя результаты раздела 4 работы [1] и лемму 1, докажем следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Ядра итераций $\mathcal{Q}^{(n)}(z) = ((-tR_0\Upsilon)^n t)(z)$, $n \geq 1$, свободных членов уравнений Фаддеева (2.1) допускают в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbb{C}^6)$ аналитическое продолжение на область $\Pi_l^{(\text{hol})}$ каждого нефизического листа $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$. Это продолжение описывается равенствами $\mathcal{Q}^{(n)}(z)|_{\Pi_l} = ((-t^l R_0^l \Upsilon)^n t^l)(z)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возникающие при подстановке в $\mathcal{Q}^{(n)}(z)|_{\Pi_l}$ соотношений (3.12) и (3.13) произведения $L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon \mathcal{Q}^{(m)}$, $\mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi J_1^\dagger L_1$, $\tilde{L}_0 J_0 \mathcal{Q}^{(m)}$, $\mathcal{Q}^{(m)} J_0^\dagger \tilde{L}_0$, $L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon \times \mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi J_1^\dagger L_1$, $\tilde{L}_0 J_0 \mathcal{Q}^{(m)} J_0^\dagger \tilde{L}_0$, $L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon \mathcal{Q}^{(m)} J_0^\dagger \tilde{L}_0$ и $\tilde{L}_0 J_0 \mathcal{Q}^{(m)} \Upsilon \Psi J_1^\dagger L_1$, $0 \leq m < n$, должны пониматься в соответствии с определениями из раздела 4 работы [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 2 означает, что мы можем рассматривать продолженные уравнения Фаддеева (3.11) лишь на областях $\Pi_l^{(\text{hol})} \subset \Pi_l$.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ФАДДЕЕВА ТРЕХЧАСТИЧНОЙ T -МАТРИЦЫ

В настоящем разделе, используя уравнения Фаддеева (3.11), мы получим представления для матрицы $M^l(z)$ ядер операторов $M_{\alpha\beta}(z)$ в областях $\Pi_l^{(\text{hol})}$ нефизических листов Π_l поверхности $\mathfrak{R}$. Эти представления будут даны в терминах компонент матрицы $M(z)$ на физическом листе, точнее, в терминах $M(z)$ и операторов, обратных к соответствующим усечениям (2.4) трехчастичных матриц рассеяния $S_l(z)$ и $S_l^\dagger(z)$. По существу, построение представлений для $M^l(z)$ состоит в явном “решении” продолженных уравнений Фаддеева (3.11) по той же схеме, которая применялась в работах [9, 10] при построении представлений типа (1.3.2) для аналитического продолжения T -матрицы на нефизические листы римановой поверхности энергии в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами. Построение представлений для $M^l(z)$ рассматриваем как конструктивное доказательство существования (в смысле обобщенных функций над $\times_{\alpha=1}^3 \mathcal{O}(\mathbb{C}^6)$) аналитического продолжения матрицы $M(z)$ на лист $\Pi_l \subset \mathfrak{R}$.

Итак, рассмотрим уравнения Фаддеева (3.11) на листе Π_l с $l_0 = 0$ или $l_0 = \pm 1$ и $l_{\beta,j} = 0$ или $l_{\beta,j} = 1$, $\beta = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\beta$. Используя выражения (3.12) для

$\mathbf{t}^l(z)$ и (3.13) для $\mathbf{R}_0^l(z)$, перенесем в левую часть этих уравнений все слагаемые с $M^l(z)$, не содержащие операторов $\mathbf{J}_0$ и $\mathbf{J}_1$. После такого переноса и несложных преобразований на основании тождества $\mathbf{s}_l^{-1}(z) = \hat{\mathbf{I}}_0 - \mathbf{s}_l^{-1}(z)\mathbf{J}_0(z)\mathbf{t}(z)\mathbf{J}_0^\dagger(z)A_0(z)L_0$ уравнения (3.11) приобретают вид

$$(\mathbf{I} + \mathbf{tR}_0\Upsilon)M^l = \mathbf{t} \left[\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0\mathbf{t} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0\mathbf{X}_0^{(l)} \right] - \Phi\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)}(\mathbf{J}_1\Phi^* + \mathbf{X}_1^{(l)}). \quad (4.1)$$

Здесь и далее для сокращения записи мы используем обозначения $A_0^{(l)}(z) = L_0 A_0(z)$, $A_1^{(l)}(z) = L_1 A_1(z)$. Кроме того, мы обозначаем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{(l)} &= |L_0| \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{tR}_0) \Upsilon M^l, \\ \mathbf{X}_1^{(l)} &= -L_1 \left[\mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{R}_0 + A_0^{(l)} \mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{J}_0 \right] \Upsilon M^l. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При этом из (1,3.5) следует, что

$$\mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{R}_0 = -\mathbf{J}_1 \Psi^*. \quad (4.3)$$

Наряду с (4.3) имеют место равенства

$$\left(\mathbf{J}_1 \Phi^* \mathbf{J}_0^\dagger \right) (z) = 0, \quad \left(\mathbf{J}_0 \Phi \mathbf{J}_1^\dagger \right) (z) = 0, \quad (4.4)$$

справедливые согласно (3.10) при всех $z \in \mathbf{C} \setminus (-\infty, \lambda_{\max}]$.

Исходя из (4.3) и первого из равенств (4.4) мы можем записать $\mathbf{X}_1^{(l)}$ также в виде

$$\mathbf{X}_1^{(l)} = L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon M^l. \quad (4.5)$$

Отметим, что ограничение $z \notin (-\infty, \lambda_{\max})$, необходимое для выполнения (4.4), не имеет отношения к двухчастичным нефизическим листам Π_l , $l_0 = 0$, т.к. в этом случае $A_0^{(l)}(z) = 0$ и, следовательно, члены, содержащие произведения $\mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{J}_0$, попросту отсутствуют в (4.1). Из трехчастичных листов Π_l , $l_0 = \pm 1$, точки $z \in (-\infty, \lambda_{\max}]$ исключены по определению.

Заметим, далее, что оператор $\mathbf{I} + \mathbf{tR}_0\Upsilon$ при всех $z \in \Pi_0$, не принадлежащих дискретному спектру $\sigma_d(H)$ гамильтониана H , допускает явное обращение в терминах $M(z)$:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{tR}_0\Upsilon)^{-1} = \mathbf{I} - M\Upsilon\mathbf{R}_0, \quad (4.6)$$

при этом

$$(\mathbf{I} - M\Upsilon\mathbf{R}_0)\mathbf{t} = M. \quad (4.7)$$

Равенство (4.6) является простым следствием уравнений Фаддеева (2.1) и тождества $\mathbf{R}_0\Upsilon = \Upsilon\mathbf{R}_0$. Соотношение (4.7) представляет собой альтернативный вариант этих уравнений. Мы можем теперь переписать уравнения (4.1) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} M^l &= M \left(\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0\mathbf{t} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0\mathbf{X}_0^{(l)} \right) - \\ &\quad - (\mathbf{I} - M\Upsilon\mathbf{R}_0)\Phi\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)}(\mathbf{J}_1\Phi^* + \mathbf{X}_1^{(l)}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) вытекает, что аналитическое продолжение $M^l(z)$ матрицы компонент Фаддеева $M(z)$ на лист Π_l выражается в терминах величин $\mathbf{X}_0^{(l)}(z)$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}(z)$. Основная задача настоящего раздела состоит в представлении этих величин через матрицу $M(z)$, рассматриваемую на физическом листе.

Чтобы получить для $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}$ замкнутую систему уравнений, воспользуемся их определениями (4.2) и (4.5) и подействуем на обе части (4.8) операторами $\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0(\mathbf{I} - \mathbf{tR}_0)\Upsilon$ и $\mathbf{J}_1\Psi^*$. При этом используем тождества

$$[\mathbf{I} - \mathbf{tR}_0]\Upsilon M = M_0 - \mathbf{t}, \quad [\mathbf{I} - \mathbf{tR}_0]\Upsilon[\mathbf{I} - M\Upsilon\mathbf{R}_0] = [\mathbf{I} - M_0\mathbf{R}_0]\Upsilon, \quad (4.9)$$

где $M_0 = \Omega^\dagger \Omega M = (\mathbf{I} + \Upsilon)M$. Соотношения (4.9) являются еще одним легко проверяемым следствием уравнений Фаддеева (2.1).

Наряду с (4.9) мы применяем также второе из равенств (4.4). В результате придем к следующей системе уравнений для $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{(l)} = & |L_0|\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0 \left[(M_0 - \mathbf{t})(\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0\mathbf{t} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{X}_0^{(l)}) \right] - \\ & - |L_0|\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0 M_0 \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} (\mathbf{J}_1\Phi^* + \mathbf{X}_1^{(l)}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{(l)} = & L_1\mathbf{J}_1\Psi^*\Upsilon M (\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{t} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{X}_0^{(l)}) - \\ & - L_1\mathbf{J}_1\Psi^*\Upsilon[\Phi + M\Upsilon\Psi]\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} (\mathbf{J}_1\Phi^* + \mathbf{X}_1^{(l)}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Запишем эту систему в матричном виде $\tilde{B}^{(l)}\mathbf{X}^{(l)} = \tilde{D}^{(l)}$, $\mathbf{X}^{(l)} = (\mathbf{X}_0^{(l)}, \mathbf{X}_1^{(l)})^\dagger$, где $\tilde{B}^{(l)} = \{\tilde{B}_{ij}^{(l)}\}$, $i, j = 0, 1$, – матрица операторов при неизвестных $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}$ и $\tilde{D}^{(l)} = (\tilde{D}_0^{(l)}, \tilde{D}_1^{(l)})^\dagger$ – столбец, составленный из свободных членов уравнений (4.10) и (4.11). Поскольку $\mathbf{s}_l = \hat{\mathbf{I}}_0 + A_0^{(l)}\mathbf{J}_0\mathbf{t}\mathbf{J}_0^\dagger$, мы находим $\tilde{B}_{00}^{(l)} = \mathbf{s}_l^{-1}(\hat{\mathbf{I}}_0 + A_0^{(l)}\mathbf{J}_0 M_0 \mathbf{J}_0^\dagger)$. В то же время $\tilde{B}_{01}^{(l)} = |L_0|\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0 M_0 \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)}$, $\tilde{B}_{10}^{(l)} = L_1\mathbf{J}_1\Psi^*\Upsilon M \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)}$ и $\tilde{B}_{11}^{(l)} = \hat{I}_1 + L_1\mathbf{J}_1\Psi^*U\Psi\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)}$, т.к. $\Upsilon(\Phi + M\Upsilon\Psi) = \Upsilon\mathbf{v}\Psi + \Upsilon M\Upsilon\Psi = (\Upsilon\mathbf{v} + \Upsilon M\Upsilon)\Psi = U\Psi$ (см. [1, раздел 4]).

Свободные члены имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0^{(l)} = & |L_0|\mathbf{s}_l^{-1}[\mathbf{J}_0(M_0 - \mathbf{t})(\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0\mathbf{t}) - |L_0|\mathbf{J}_0 M_0 \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} \mathbf{J}_1\Phi^*], \\ \tilde{D}_1^{(l)} = & L_1\mathbf{J}_1\Psi^*\Upsilon M (\mathbf{I} - A_0^{(l)}\mathbf{J}_0^\dagger\mathbf{s}_l^{-1}\mathbf{J}_0\mathbf{t}) - L_1\mathbf{J}_1\Psi^*U\Psi\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} \mathbf{J}_1\Phi^*. \end{aligned}$$

Оператор $\mathbf{s}_l(z)$, $l_0 = \pm 1$, имеет обратный при всех $z \in \mathcal{P}_b$. Если z не принадлежит совокупности всех резонансных лучей Z_{res} , то $\mathbf{s}_l^{-1}(z)$ ограничен как оператор в $\hat{\mathcal{G}}_0$. Поэтому, действуя на обе части первого уравнения $\tilde{B}_{00}^{(l)}\mathbf{X}_0^{(l)} + \tilde{B}_{01}^{(l)}\mathbf{X}_1^{(l)} = \tilde{D}_0^{(l)}$ системы $\tilde{B}^{(l)}\mathbf{X}^{(l)} = \tilde{D}^{(l)}$ оператором $\mathbf{s}_l$, а второе уравнение оставляя неизменным, мы придем к эквивалентной системе

$$B^{(l)}\mathbf{X}^{(l)} = D^{(l)} \quad (4.12)$$

с (операторной) матрицей

$$B^{(l)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{I}}_0 + |L_0|\mathbf{J}_0 M_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} & |L_0|\mathbf{J}_0 M_0 \Upsilon \Psi \mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} \\ L_1\mathbf{J}_1\Psi^*\Upsilon M \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} & \hat{I}_1 + L_1\mathbf{J}_1\Psi^*U\Psi\mathbf{J}_1^\dagger A_1^{(l)} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$B^{(l)}(z) : \hat{\mathcal{G}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$, и свободным членом $D^{(l)}$ с компонентами $D_0^{(l)} = \mathbf{s}_l \tilde{D}_0^{(l)}$ и $D_1^{(l)} = \tilde{D}_1^{(l)}$.

ЛЕММА 2. Оператор $(B^{(l)}(z))^{-1}$ существует для всех $z \in \Pi_l^{\text{hol}}$, при которых существует оператор $S_l^{-1}(z)$, обратный к усеченной трехчастичной матрице рассеяния $S_l(z)$, задаваемой первым из равенств (2.4) с $L = \text{diag}\{L_0, L_1\}$, $\tilde{L} = \text{diag}\{|L_0|, L_1\}$, и где существуют операторы $[S_l(z)]_{00}^{-1}$ и $[S_l(z)]_{11}^{-1}$, обратные к $[S_l(z)]_{00} = \hat{I}_0 + J_0 T J_0^\dagger A_0 L_0$ и $[S_l(z)]_{11} = \hat{I}_1 + L_1 J_1 \Psi^* U \Psi J_1^\dagger A_1 L_1$, соответственно. Компоненты $\left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{ij}$, $i, j = 0, 1$, оператора $(B^{(l)}(z))^{-1}$ допускают представление

$$\begin{aligned} \left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{00} &= \hat{\mathbf{I}}_0 - \Omega^\dagger [S_l^{-1}]_{00} \times \\ &\times \{ |L_0| J_0 T_0 - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M \} \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{01} = \Omega^\dagger [S_l^{-1}]_{01}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{10} &= -[S_l^{-1}]_{11} L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} \times \\ &\times \left\{ \hat{\mathbf{I}}_0 - \Omega^\dagger [S_l]_{00}^{-1} |L_0| J_0 T_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{11} = [S_l^{-1}]_{00}, \quad (4.17)$$

где $T_0 \equiv \Omega M$.

Отметим, что поскольку $|L_0|$ и $A_0^{(l)}$ – числа, обращающиеся при $l_0 = 0$ в нуль одновременно, множители $|L_0|$ в (4.14) и (4.16) можно опустить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала компоненты $\left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{00}$ и $\left[(B^{(l)}(z))^{-1}\right]_{10}$, которые временно для сокращения записи будем обозначать Y_{00} и Y_{10} . Пользуясь (4.13), запишем систему уравнений для разыскания этих компонент

$$[B^{(l)}]_{00} Y_{00} + [B^{(l)}]_{01} Y_{10} = \hat{\mathbf{I}}_0, \quad (4.18)$$

$$[B^{(l)}]_{10} Y_{00} + [B^{(l)}]_{11} Y_{10} = 0. \quad (4.19)$$

Исключение неизвестной Y_{10} из первого уравнения (4.18) с помощью (4.19) приводит к следующему уравнению, содержащему лишь элемент Y_{00} :

$$\left\{ \hat{\mathbf{I}}_0 + \Omega^\dagger \left[|L_0| J_0 T_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} \right] \right\} Y_{00} = \hat{\mathbf{I}}_0. \quad (4.20)$$

При проведении промежуточных преобразований мы воспользовались равенством $M_0 = \Omega^\dagger T_0$.

Операторная матрица в левой части (4.20), дополнительная к $\hat{\mathbf{I}}_0$, имеет три одинаковые строки. Поэтому к уравнению (4.20) можно применить формулу обращения

$$\left[\hat{\mathbf{I}}_0 + \Omega^\dagger (C_1, C_2, C_3) \right]^{-1} = \hat{\mathbf{I}}_0 - \Omega^\dagger \left[\hat{I}_0 + C_1 + C_2 + C_3 \right]^{-1} (C_1, C_2, C_3), \quad (4.21)$$

справедливую для широкого класса операторов (C_1 , C_2 и C_3). Единственным существенным требованием к C_1 , C_2 и C_3 , очевидно, является условие существования $(\hat{I}_0 + C_1 + C_2 + C_3)^{-1}$.

В рассматриваемом нами случае

$$C_\beta(z) \equiv \left\{ |L_0| \mathbf{J}_0 T_{0\beta} \mathbf{J}_0^\dagger - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} L_1 \mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon [M]_\beta \mathbf{J}_0^\dagger \right\} A_0^{(l)},$$

где $[M]_\beta$ – β -й столбец матрицы M , $[M]_\beta = (M_{1\beta}, M_{2\beta}, M_{3\beta})^\dagger$. При этом

$$\begin{aligned} \hat{I}_0 + C_1 + C_2 + C_3 &= \hat{I}_0 + \mathbf{J}_0 T \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} \mathbf{J}_1 \Psi^* U_0^\dagger \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} \equiv \\ &\equiv [S_l]_{00} - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} [S_l]_{10}. \end{aligned}$$

Заметим, что элементы $[S_l^{-1}]_{ij}$, $i, j = 0, 1$, матрицы S_l^{-1} записываются через компоненты $[S_l]_{ij}$ в следующем виде:

$$[S_l^{-1}]_{00} = ([S_l]_{00} - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} [S_l]_{10})^{-1}, \quad (4.22)$$

$$[S_l^{-1}]_{11} = ([S_l]_{11} - [S_l]_{10} [S_l]_{00}^{-1} [S_l]_{01})^{-1}, \quad (4.23)$$

$$[S_l^{-1}]_{10} = -[S_l]_{11}^{-1} [S_l]_{10} [S_l^{-1}]_{00}, \quad (4.24)$$

$$[S_l^{-1}]_{01} = -[S_l]_{00}^{-1} [S_l]_{01} [S_l^{-1}]_{11}. \quad (4.25)$$

Из (4.22) следует, что $\hat{I}_0 + C_1 + C_2 + C_3 = ([S_l^{-1}]_{00})^{-1}$. Поэтому использование равенства (4.21) в (4.20) приводит нас непосредственно к представлению (4.14) для элемента $[(B^{(l)})^{-1}]_{00}$.

При вычислении $Y_{10} = [(B^{(l)})^{-1}]_{10}$, наоборот, исключим из второго уравнения (4.19) величину Y_{00} , используя уравнение (4.18). При этом возникнет необходимость вычислить оператор, обратный к $\hat{I}_0 + \mathbf{J}_0 M_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)}$. Здесь мы снова воспользуемся соотношением (4.21) и получим, что

$$\begin{aligned} (\hat{I}_0 + |L_0| \mathbf{J}_0 M_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)})^{-1} &= (\hat{I}_0 + \Omega^\dagger |L_0| \mathbf{J}_0 T_{00} \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)})^{-1} = \\ &= \hat{I}_0 - \Omega^\dagger [S_l]_{00}^{-1} |L_0| \mathbf{J}_0 T_{00} \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

С помощью (2.4) мы сможем записать результирующее уравнение для Y_{10} в виде

$$\{[S_l]_{11} - [S_l]_{10} [S_l]_{00}^{-1} [S_l]_{01}\} Y_{10} = -\mathbf{J}_1 \Psi^* \Upsilon M \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)} [\hat{I}_0 + \mathbf{J}_0 M_0 \mathbf{J}_0^\dagger A_0^{(l)}]^{-1}. \quad (4.27)$$

Согласно (4.23) выражение в фигурных скобках из левой части (4.27) совпадает с $[S_l^{-1}]_{11}^{-1}$. Поэтому из (4.27) сразу получим (4.15).

Система уравнений

$$[B^{(l)}]_{00} Y_{01} + [B^{(l)}]_{01} Y_{11} = 0, \quad (4.28)$$

$$[B^{(l)}]_{10} Y_{01} + [B^{(l)}]_{11} Y_{11} = \hat{I}_1 \quad (4.29)$$

для компонент $Y_{01} = [(B^{(l)})^{-1}]_{01}$ и $Y_{11} = [(B^{(l)})^{-1}]_{11}$ решается аналогично. Разыскание Y_{11} оказывается совсем простым, поскольку применение формулы обращения (4.26) в уравнении (4.28) сразу дает $Y_{01} = \Omega^\dagger [S_l]_{00}^{-1} [S_l]_{01} Y_{11}$. Подстановка Y_{01} в уравнение (4.29) приводит к соотношению

$$\{[S_l]_{11} - [S_l]_{10} [S_l]_{00}^{-1} [S_l]_{01}\} Y_{11} = \hat{I}_1,$$

в левой части которого, как и в (4.27), возникает оператор $[S_l^{-1}]_{11}^{-1}$. Проводя обращение этого оператора, приходим к (4.17).

При вычислении неизвестной Y_{01} сначала выражаем через нее Y_{11} , пользуясь уравнением (4.29),

$$Y_{11} = [S_l]_{11}^{-1} \left(\hat{I}_1 - L_1 J_1 \Psi \Upsilon M J_0 A_0^{(l)} Y_{01} \right). \quad (4.30)$$

После подстановки (4.30) в (4.28) получается уравнение, в котором в качестве оператора, стоящего перед неизвестной Y_{01} , оказывается матрица, которую можно обратить с помощью (4.21). Затем мы воспользуемся также цепочкой равенств

$$\begin{aligned} |L_0| J_0 M_0 \Upsilon \Psi J_1^\dagger A_1^{(l)} &= |L_0| J_0 \Omega^\dagger \Omega M \Upsilon \Psi J_1^\dagger A_1^{(l)} = \\ &= \Omega^\dagger |L_0| J_0 \Omega M \Upsilon \Psi J_1^\dagger A_1^{(l)} = \Omega^\dagger [S_l]_{01}, \end{aligned}$$

упрощающей свободный член, а также слагаемое в левой части, порожденное там за счет (4.30) элементом $[B^{(l)}]_{01}$. Завершая преобразования, мы обнаружим, что

$$Y_{01} = -\Omega^\dagger \{[S_l]_{00} - [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1} [S_l]_{10}\}^{-1} [S_l]_{01} [S_l]_{11}^{-1}.$$

В силу (4.25) выражение в правой части последнего равенства, стоящее после $\Omega^\dagger$, в точности совпадает с выражением для $[S_l^{-1}]_{01}$. Поэтому окончательно мы получим (4.15).

Таким образом, все компоненты обратного оператора $(B^{(l)})^{-1}$ вычислены.

Из представлений (4.14)–(4.17) вытекает, что $(B^{(l)}(z))^{-1}$ существует при тех $z \in \Pi_l^{\text{hol}}$, для которых существуют операторы, обратные к $S_l(z)$, $[S_l(z)]_{00}$ и $[S_l(z)]_{11}$.

Лемма доказана.

Вернемся к уравнению (4.12). Обратим в нем, пользуясь соотношениями (4.14)–(4.17), оператор $B^{(l)}(z)$ и тем самым найдем неизвестные $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и $\mathbf{X}_1^{(l)}$, в терминах которых согласно (4.8) выражается $M^l(z)$.

При непосредственном вычислении $\mathbf{X}_0^{(l)} = \left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{00} D_0^{(l)} + \left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{01} D_1^{(l)}$ воспользуемся соотношением $|L_0| \left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{00} J_0 M_0 = \Omega^\dagger |L_0| [S_l^{-1}]_{00} J_0 T_0$, которое проверяется с помощью (2.4) и (2.3). Это соотношение наряду с тождеством

$$\mathbf{J}_0 \mathbf{t} \left(\hat{\mathbf{I}}_0 - A_0^{(l)} \mathbf{J}_0^\dagger \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{t} \right) = \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{t} \quad (4.31)$$

существенно упрощает преобразования произведения $\left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{00} D_0^{(l)}$. Кроме того, при вычислении $\mathbf{X}_0^{(l)}$ используем равенства (4.4). В результате найдем, что

$$\mathbf{X}_0^{(l)} = \Omega^\dagger \{ |L_0| [S_l^{-1}]_{00} J_0 T_0 + [S_l^{-1}]_{01} L_1 (J_1 \Psi^* \Upsilon M + J_1 \Phi^*) \} - |L_0| \mathbf{s}_l^{-1} \mathbf{J}_0 \mathbf{t}. \quad (4.32)$$

Для того чтобы вычислить $\mathbf{X}_1^{(l)} = \left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{10} D_0^{(l)} + \left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{11} D_1^{(l)}$, заметим дополнительно, что выполняется равенство $\left\{ \hat{\mathbf{I}}_0 - \Omega^\dagger [S_l^{-1}]_{00}^{-1} J_0 T_0 J_0^\dagger A_0^{(l)} \right\} J_0 M_0 = \Omega^\dagger [S_l^{-1}]_{00}^{-1} J_0 T_0$, упрощающее произведение $\left[(B^{(l)})^{-1} \right]_{10} D_0^{(l)}$. Окончательное выражение для $\mathbf{X}_1^{(l)}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^{(l)} = & L_1 \left\{ [S_l^{-1}]_{10} |L_0| J_0 T_0 + [S_l^{-1}]_{11} L_1 J_1 \Psi^* \Upsilon M - \right. \\ & \left. - \left(\hat{I}_1 - [S_l^{-1}]_{11} \right) L_1 J_1 \Psi^* \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для того чтобы найти теперь представление для $M^l(z)$, остается лишь подставить найденные выражения (4.32) для $\mathbf{X}_0^{(l)}$ и (4.33) для $\mathbf{X}_1^{(l)}$ в равенство (4.8). Проведя ряд несложных, но достаточно громоздких преобразований этого равенства, мы приходим к утверждению, аналогичному теореме 1 из [1] об аналитическом продолжении T -матрицы в задаче двух частиц.

ТЕОРЕМА 3. Матрица $M(z)$, составленная из ядер компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$ оператора $T(z)$, допускает в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbb{C}^6)$ аналитическое продолжение по z в области $\Pi_l^{(\text{hol})}$ нефизических листов Π_l римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Это продолжение описывается формулой

$$M^l = M - \left(M \Omega^\dagger J_0^\dagger, \Phi J_1^\dagger + M \Upsilon \Psi J_1^\dagger \right) L A S_l^{-1} \tilde{L} \begin{pmatrix} J_0 \Omega M \\ J_1 \Psi^* \Upsilon M + J_1 \Phi^* \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

где $S_l(z)$ – усеченная матрица рассеяния (2.4), $L = \text{diag}\{l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$ и $\tilde{L} = \text{diag}\{|l_0|, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$. Ядра всех операторов, присутствующих в правой части (4.34), берутся на физическом листе.

Отметим, что $L A S_l^{-1}(z) \tilde{L} = \tilde{L} [S_l^\dagger(z)]^{-1} A L$, так что соотношения (4.34) можно переписать также и в терминах матриц рассеяния $S_l^\dagger(z)$.

5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ

Пусть $l = \{l_0, l_{1,1}, \dots, l_{1,n_1}, l_{2,1}, \dots, l_{2,n_2}, l_{3,1}, \dots, l_{3,n_3}\}$ с некоторыми l_0 , $l_0 = 0$ или $l_0 = \pm 1$, и $l_{\alpha,j}$, $l_{\alpha,j} = 0$ или $l_{\alpha,j} = +1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$. Усеченные матрицы рассеяния $S_l(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ и $S_l^\dagger(z) : \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$, задаваемые формулами (2.4), являются операторнозначными функциями переменной z , голоморфными на физическом листе Π_0 в области $\Pi_l^{(\text{hol})}$. При $l_0 = 1$ и $l_{\alpha,j} = 1$, $\alpha = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, эти матрицы совпадают с соответствующими полными матрицами рассеяния: $S_l(z) = S(z)$, $S_l^\dagger(z) = S^\dagger(z)$.

Опишем аналитическое продолжение матриц $S_{l'}(z)$ и $S_{l'}^\dagger(z)$ с некоторым мультииндексом l' на нефизические листы $\Pi_l \in \mathfrak{R}$. Будем опираться при этом на представления (4.34) для аналитического продолжения $M(z)|_{\Pi_l}$ матрицы компонент Фаддеева $M(z)$. Нашей целью является получение явных представлений для $S_l(z)|_{\Pi_{l'}}$ и $S_l^\dagger(z)|_{\Pi_{l'}}$ в терминах физического листа.

Прежде всего отметим, что функция $A_0(z)$ однозначна, и, следовательно, на всех листах Π_l она имеет один и тот же вид $A_0(z) = -\pi i z^2$. В то же время при продолжении с Π_0 на Π_l функция $A_{\beta,j}(z) = -\pi i \sqrt{z - \lambda_{\beta,j}}$ сохраняет свой вид, если только $l_{\beta,j} = 0$. Если $l_{\beta,j} = 1$, то она переходит в $A'_{\beta,j}(z) = -A_{\beta,j}(z)$. Аналогичная инверсия имеет (или не имеет) место и для аргументов $\hat{P}$, $\hat{P}'$, $\hat{p}_\alpha$ и $\hat{p}'_\beta$ ядер операторов $J_0 \Omega M \Omega^\dagger J_0^\dagger$, $J_0 \Omega M \Upsilon \Psi J_1^\dagger$, $J_1 \Psi^* \Upsilon M \Omega^\dagger J_0^\dagger$ и $J_1 \Psi^* (\Upsilon \mathbf{v} + \Upsilon M \Upsilon) \Psi J_1^\dagger$. Напомним, что на физическом листе Π_0 действие $J_0(z)$ ($J_0^\dagger(z)$) превращает $P \in \mathbf{R}^6$ в $\sqrt{z} \hat{P}$ ($P' \in \mathbf{R}^6$ в $\sqrt{z} \hat{P}'$). В то же время $p_\alpha \in \mathbf{R}^3$ ($p'_\beta \in \mathbf{R}^3$) под действием $J_{\alpha,i}(z)$ ($J_{\beta,j}^\dagger(z)$) превращается в $\sqrt{z - \lambda_{\alpha,i}} \hat{p}_\alpha$ ($\sqrt{z - \lambda_{\beta,j}} \hat{p}'_\beta$). Поэтому введем в рассмотрение операторы $\mathcal{E}(l) = \text{diag}\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1\}$, где $\mathcal{E}_0$ – тождественный оператор в $\hat{\mathcal{H}}_0$, если $l_0 = 0$, и $\mathcal{E}_0$ – инверсия, $(\mathcal{E}_0 f)(\hat{P}) = f(-\hat{P})$, если $l_0 = \pm 1$. Аналогично $\mathcal{E}_1(l) = \text{diag}\{\mathcal{E}_{1,1}, \dots, \mathcal{E}_{1,n_1}; \mathcal{E}_{2,1}, \dots, \mathcal{E}_{2,n_2}; \mathcal{E}_{3,1}, \dots, \mathcal{E}_{3,n_3}\}$, где $\mathcal{E}_{\beta,j}$ – тождественный оператор в $\hat{\mathcal{H}}^{(\beta,j)}$, если $l_{\beta,j} = 0$, и $\mathcal{E}_{\beta,j}$ – инверсия, $(\mathcal{E}_{\beta,j} f)(\hat{p}_\beta) = f(-\hat{p}_\beta)$, если $l_{\beta,j} = 1$. Через $e_1(l)$ обозначим диагональную матрицу, $e_1(l) = \text{diag}\{e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}; e_{2,1}, \dots, e_{2,n_2}; e_{3,1}, \dots, e_{3,n_3}\}$ с элементами $e_{\beta,j} = 1$, если $l_{\beta,j} = 0$, и $e_{\beta,j} = -1$, если $l_{\beta,j} = 1$. Пусть $e(l) = \text{diag}\{e_0, e_1\}$, где $e_0 = +1$.

ТЕОРЕМА 4. *Если существует путь на поверхности $\mathfrak{R}$, при движении по которому из области Π_l^{hol} на листе Π_0 в область $\Pi_l^{\text{hol}} \cap \Pi_{l'}^{\text{hol}}$ на листе Π_l параметр z остается на промежуточных листах $\Pi_{l''}$ в областях $\Pi_l^{\text{hol}} \cap \Pi_{l''}^{\text{hol}}$, то усеченные матрицы рассеяния $S_{l'}(z)$ и $S_{l'}^\dagger(z)$ допускают аналитическое продолжение по z на лист Π_l в область $\Pi_l^{\text{hol}} \cap \Pi_{l'}^{\text{hol}}$. Это продолжение описывается формулами*

$$S_{l'}(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) \left[\hat{\mathbf{I}} + \tilde{L}' \hat{T} L' A e(l) - \tilde{L}' \hat{T} L A S_l^{-1} \tilde{L} \hat{T} L' A e(l) \right] \mathcal{E}(l), \quad (5.1)$$

$$S_{l'}^\dagger(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) \left[\hat{\mathbf{I}} + e(l) A L' \hat{T} \tilde{L}' - e(l) A L \hat{T} \tilde{L} [S_l^\dagger]^{-1} A L' \hat{T} \tilde{L}' \right] \mathcal{E}(l), \quad (5.2)$$

где $L' = \{l'_0, l'_{1,1}, \dots, l'_{1,n_1}, l'_{2,1}, \dots, l'_{2,n_2}, l'_{3,1}, \dots, l'_{3,n_3}\}$ и $\tilde{L}' = \{|l'_0|, l'_{1,1}, \dots, l'_{1,n_1}, l'_{2,1}, \dots, l'_{2,n_2}, l'_{3,1}, \dots, l'_{3,n_3}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем на примере $S_{l'}(z)$. Пользуясь выражением (2.3) для оператора $\mathcal{T}(z)$, перепишем $S_{l'}(z)$ в виде

$$S_{l'}(z) = \hat{\mathbf{I}} + \tilde{L}' \left[\begin{pmatrix} J_0 \Omega \\ J_1 \Psi^* \Upsilon \end{pmatrix} M \left(\Omega^\dagger J_0^\dagger, \Upsilon \Psi J_1^\dagger \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_1 \Psi^* \Upsilon \mathbf{v} \Psi J_1^\dagger \end{pmatrix} \right] L' A.$$

Заметим, что при продолжении на лист $\Pi_{l''}$ операторы $J_0(z)$, $J_0^\dagger(z)$, $J_1(z)$ и $J_1^\dagger(z)$ переходят соответственно в $\mathcal{E}_0(l'') J_0(z)$, $J_0^\dagger(z) \mathcal{E}_0(l'')$, $\mathcal{E}_1(l'') J_1(z)$ и $J_1^\dagger(z) \mathcal{E}_1(l'')$, а матрица-функция $A(z)$ – в $A(z) e(l'')$. Тогда, применяя теорему 3, в областях $\Pi_l^{\text{hol}} \cap \Pi_{l'}^{\text{hol}}$ на промежуточных листах $\Pi_{l''}$ имеем

$$\begin{aligned} S_{l'}(z)|_{\Pi_{l''}} &= \hat{\mathbf{I}} + \mathcal{E}(l'') \tilde{L}' \hat{T} L' \mathcal{E}(l'') A e(l'') - \\ &- \mathcal{E}(l'') \tilde{L}' \begin{pmatrix} J_0 \Omega \\ J_1 \Psi^* \Upsilon \end{pmatrix} \left(M \Omega^\dagger J_0^\dagger, [\mathbf{v} + M \Upsilon] \Psi J_1^\dagger \right) L'' A S_{l''}^{-1} \times \\ &\times \tilde{L}'' \begin{pmatrix} J_0 \Omega M \\ J_1 \Psi^* [\mathbf{v} + \Upsilon M] \end{pmatrix} \left(\Omega^\dagger J_0^\dagger, \Upsilon \Psi J_1^\dagger \right) L' \mathcal{E}(l'') A e(l''), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где слагаемое, следующее непосредственно за $\hat{\mathbf{I}}$, обязано своим происхождением члену $M(z)$ в правой части (4.34). Последнее слагаемое (5.3) происходит от второго слагаемого (4.34). При этом $J_1 \Psi^* \mathbf{v} \Omega^\dagger J_0^\dagger = J_1 \Phi^* J_0^\dagger \Omega^\dagger = 0$ в силу (4.4). Аналогично, $J_0 \Omega \mathbf{v} \Psi J_1^\dagger$ также равно нулю. С учетом (2.3) находим

$$S_{l'}(z)|_{\Pi_{l''}} = \hat{\mathbf{I}} + \mathcal{E}(l'') \tilde{L}' \hat{T} L' \mathcal{E}(l'') A e(l'') - \\ - \mathcal{E}(l'') \tilde{L}' \hat{T} L'' A S_{l''}^{-1} \tilde{L}'' \hat{T} L' \mathcal{E}(l'') A e(l''). \quad (5.4)$$

По предположению путь, по которому движется параметр z , таков, что на листе $\Pi_{l''}$ он оказывается в области $\Pi_{l'}^{\text{hol}} \cap \Pi_{l''}^{\text{hol}}$. На этой области операторы $(\tilde{L}' \hat{T} L')(z)$, $(\tilde{L}' \hat{T} L'')(z)$ и $(\tilde{L}'' \hat{T} L')(z)$ определены и аналитически зависят от z . Следовательно, то же самое можно сказать и про функцию $S_{l'}(z)|_{\Pi_{l''}}$. Это утверждение в равной мере относится и к листу Π_l . Заменяя значения мультииндекса l'' в представлениях (5.3) и (5.4) на l , приходим к утверждению теоремы для $S_{l'}(z)|_{\Pi_l}$. Справедливость представления (5.2) для $S_{l'}^\dagger(z)|_{\Pi_l}$ устанавливается аналогично.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $l_0 = 0$, то представление (5.1) для аналитического продолжения $S_l(z)$ на ("свой") лист Π_l приобретает простой вид (ср. с (1,3.6)):

$$S_l(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) \left[\hat{\mathbf{I}} + e(l) - S_l^{-1}(z) e(l) \right] \mathcal{E}(l) = \mathcal{E}(l) S_l^{-1}(z) \mathcal{E}(l).$$

Точно так же $S_l^\dagger(z)|_{\Pi_l} = \mathcal{E}(l) [S_l^\dagger(z)]^{-1} \mathcal{E}(l)$.

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА НА НЕФИЗИЧЕСКИХ ЛИСТАХ

Резольвента $R(z)$ гамильтониана рассматриваемой системы трех частиц H выражается через матрицу компонент Фаддеева $M(z)$ по формуле (2.2). Как мы установили, ядра всех операторов, присутствующих в правой части (2.2), допускают в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ аналитическое продолжение на области $\Pi_l^{(\text{hol})}$ нефизических листов Π_l поверхности $\mathfrak{R}$. Следовательно, такое продолжение допускает и ядро $R(P, P', z)$ резольвенты $R(z)$. Более того, для этого продолжения имеет место представление, аналогичное представлению (1,3.7) для двухчастичной функции Грина. Названное представление описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. Аналитическое продолжение в смысле обобщенных функций над $\mathcal{O}(\mathbf{C}^6)$ ядра резольвенты $R(z)$ на лист Π_l в область $\Pi_l^{(\text{hol})}$ описывается формулой

$$R(z)|_{\Pi_l} = R + ([I - RV] J_0^\dagger, \Omega[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0 M \Upsilon] \Psi J_1^\dagger) \times \\ \times L A S_l^{-1} \tilde{L} \left(\begin{array}{c} J_0 [I - V R] \\ J_1 \Psi^* [\mathbf{I} - \Upsilon M \mathbf{R}_0] \Omega^\dagger \end{array} \right). \quad (6.1)$$

Ядра всех операторов, присутствующих в правой части (6.1), относятся к физическому листу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для аналитического продолжения $R^l(z)$ ядра $R(P, P', z)$ резольвенты $R(z)$ согласно (2.2) имеем

$$R^l(z) = R_0^l(z) - R_0^l(z)\Omega M^l(z)\Omega^\dagger R_0^l(z). \quad (6.2)$$

Для $M^l(z)$ мы уже нашли представление (4.34) в терминах физического листа. Сейчас мы воспользуемся этим представлением для того, чтобы получить аналогичное представление для $R^l(z)$. Так как $R_0^l = R_0 + L_0 A_0 J_0^\dagger J_0$, перепишем равенство (6.2) сначала в виде

$$\begin{aligned} R^l = R_0 - R_0 \Omega M^l \Omega^\dagger R_0 + A_0 L_0 J_0^\dagger \left(\hat{I}_0 - J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger J_0^\dagger L_0 A_0 \right) J_0 - \\ - A_0 L_0 J_0^\dagger J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger R_0 - R_0 \Omega M^l \Omega^\dagger J_0^\dagger J_0 L_0 A_0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

и рассмотрим по отдельности вклады каждого из слагаемых. При этом для упрощения выкладок будем использовать обозначения

$$\mathbf{B} = \left(\Omega M \Omega^\dagger J_0^\dagger, \Omega M \Upsilon \Psi J_1^\dagger + \Omega \Phi J_1^\dagger \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{B}^\dagger = \begin{pmatrix} J_0 \Omega M \Omega^\dagger \\ J_1 \Psi^* \Upsilon M \Omega^\dagger + J_1 \Phi^* \Omega^\dagger \end{pmatrix}.$$

Из (4.34) следует, что $\Omega M^l \Omega^\dagger = \Omega M \Omega^\dagger - \mathbf{B} L A S_l^{-1} \tilde{L} \mathbf{B}^\dagger$. Поэтому два первых слагаемых (6.3) дают в совокупности вклад

$$R_0 - R_0 \Omega M \Omega^\dagger R_0 + R_0 \mathbf{B} L A S_l^{-1} \tilde{L} \mathbf{B}^\dagger R_0 = R + R_0 \mathbf{B} L A S_l^{-1} \tilde{L} \mathbf{B}^\dagger R_0.$$

При преобразованиях третьего слагаемого (6.3) также воспользуемся представлением (4.34). Мы найдем, что

$$\begin{aligned} J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger J_0^\dagger L_0 A_0 &= \hat{T}_{00} L_0 A_0 - \left(\hat{T}_{00}, \hat{T}_{01} \right) L A S_l^{-1} \tilde{L} \begin{pmatrix} \hat{T}_{00} \\ \hat{T}_{10} \end{pmatrix} L_0 A_0 = \\ &= \omega_0 \hat{T} L A \omega_0^* - \omega_0 \hat{T} L A S_l^{-1} \tilde{L} \hat{T} L A \omega_0^* = \omega_0 \hat{T} L A \left(\hat{\mathbf{I}} - S_l^{-1} \tilde{L} \hat{T} L A \right) \tilde{L} \omega_0^*, \end{aligned}$$

где ω_0 — проектор из $\hat{\mathcal{H}}_0 \oplus \hat{\mathcal{H}}_1$ на $\hat{\mathcal{H}}_0$, действующий по правилу $\omega_0 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = f_0$, $f_0 \in \hat{\mathcal{H}}_0$, $f_1 \in \hat{\mathcal{H}}_1$, а ω_0^* — оператор, сопряженный к ω_0 . Поскольку $S_l = \hat{\mathbf{I}} + \tilde{L} \hat{T} L A$, имеем $\hat{\mathbf{I}} - S_l^{-1} \tilde{L} \hat{T} L A = S_l^{-1} \left(\hat{\mathbf{I}} + \tilde{L} \hat{T} L A - \tilde{L} \hat{T} L A \right) = S_l^{-1}$. Учитывая, что $L = L \cdot \tilde{L}$, находим

$$L_0 A_0 (\hat{I}_0 - J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger J_0^\dagger L_0 A_0) = \omega_0 A L (\hat{\mathbf{I}} - \tilde{L} \hat{T} L A S_l^{-1}) \tilde{L} \omega_0^* = \omega_0 L A S_l^{-1} \tilde{L} \omega_0^*.$$

Отсюда следует, что третье слагаемое (6.3) представляется как $J_0^\dagger \omega_0 L A S_l^{-1} \tilde{L} \omega_0^*$.

При рассмотрении четвертого слагаемого (6.3) сначала преобразуем к более удобному виду произведение $A_0 L_0 J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger$. Согласно (4.34) имеем

$$A_0 L_0 J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger = A_0 L_0 J_0 \Omega M \Omega^\dagger - A_0 L_0 \left(\hat{T}_{00}, \hat{T}_{01} \right) L A S_l^{-1} \tilde{L} \mathbf{B}^\dagger.$$

Вследствие того что $A_0 L_0 J_0 \Omega M \Omega^\dagger = \omega_0 ALB^\dagger$ и $A_0 L_0 (\hat{T}_{00}, \hat{T}_{01}) L = \omega_0 AL\hat{T}L$, находим

$$A_0 L_0 J_0 \Omega M^l \Omega^\dagger = \omega_0 (AL - AL\hat{T}LAS_l^{-1}\tilde{L}) B^\dagger = \omega_0 LAS_l^{-1}\tilde{L}B^\dagger.$$

Аналогично в пятом слагаемом (6.3) $\Omega M^l \Omega^\dagger J_0^\dagger L_0 A_0 = \mathbf{B}\tilde{L}[S_l^\dagger]^{-1}AL\omega_0^* = \mathbf{B}LAS_l^{-1}\tilde{L}\omega_0^*$. Таким образом, два последних слагаемых (6.3) дают вместе $-J_0^\dagger \omega_0 LAS_l^{-1}\tilde{L}B^\dagger R_0 - R_0 \mathbf{B}LAS_l^{-1}\tilde{L}\omega_0^* J_0$. Подставляя полученные результаты в (6.3), мы найдем, что

$$R^l = R + (J_0^\dagger \omega_0 - R_0 \mathbf{B}) LAS_l^{-1}\tilde{L}(\omega_0^* J_0 - \mathbf{B}^\dagger R_0).$$

Принимая во внимание явный вид операторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^\dagger$, а также то обстоятельство, что $R_0 \Omega M \Omega^\dagger = RV$, $\Omega^\dagger M \Omega R_0 = VR$ (см. [2, 3]) и $R_0 \Omega \Phi J_1 = -\Omega \Psi J_1$, $J_1 \Phi^* \Omega^\dagger R_0 = -J_1 \Psi^* \Omega^\dagger$, окончательно приходим к равенству (6.1).

Теорема доказана.

7. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Как следует из представлений (4.34), (5.1) и (6.1), матрицы $M(z)|_{\Pi_l}$, $S_{l'}(z)|_{\Pi_l}$ и функция Грина $R(z)|_{\Pi_l}$ могут иметь полюсы в точках дискретного спектра $\sigma_d(H)$ оператора H . Нетривиальные особенности $M(z)|_{\Pi_l}$, $S_{l'}(z)|_{\Pi_l}$ и функция Грина $R(z)|_{\Pi_l}$ отвечают тем точкам $z \in \Pi_0 \cap \Pi_l^{(\text{hol})}$, где оператор $[S_l(z)]^{-1}$ (или, что то же самое, $[S_l^\dagger(z)]^{-1}$), обратный к усеченной матрице рассеяния $S_l(z)$ ($S_l^\dagger(z)$), не существует или не ограничен. Точки z , где $[S_l(z)]^{-1}$ не существует, дают $M(z)|_{\Pi_l}$, $S_{l'}(z)|_{\Pi_l}$ и $R(z)|_{\Pi_l}$ полюсы. Такие точки принято называть резонансами. Необходимым и достаточным условием [12] необратимости оператора $S_l(z)$ при данном z является существование нетривиального решения $\mathcal{A}^{(\text{res})} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ уравнения

$$S_l(z)\mathcal{A}^{(\text{res})} = 0. \quad (7.1)$$

Исследование этого уравнения можно провести, опираясь на результаты раздела 4 статьи [1] относительно свойств ядер оператора $\hat{T}(z)$. Ввиду недостатка места мы отложим это исследование до следующей работы.

Уравнение (7.1) можно использовать для практического вычисления резонансов, находящихся в областях $\Pi_l^{(\text{hol})} \subset \Pi_l$. Резонансы следует рассматривать при этом как те значения $z \in \Pi_0 \cap \Pi_l^{(\text{hol})}$, при которых операторы $S_l(z)$ и $S_l^\dagger(z)$ имеют нулевое собственное число.

Отметим, что элементы матриц рассеяния $S_l(z)$ и $S_l^\dagger(z)$ выражаются в терминах аналитического продолжения амплитуд процессов, происходящих в системе трех частиц. Соответствующие формулы [3], записанные для компонент матрицы $\hat{T}$, имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\alpha,j;\beta,k}(\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta, z) &= C_0^{(3)}(z) \mathcal{A}_{\alpha,j;\beta,k}(\hat{p}_\alpha, \hat{p}'_\beta, z), \\ \hat{T}_{\alpha,j;0}(\hat{p}_\alpha, \hat{P}', z) &= C_0^{(3)}(z) \mathcal{A}_{\alpha,j;0}(\hat{p}_\alpha, \hat{P}', z), \\ \hat{T}_{0;\beta,k}(\hat{P}, \hat{p}'_\beta, z) &= C_0^{(6)}(z) \mathcal{A}_{0;\beta,k}(\hat{P}, \hat{p}'_\beta, z), \\ \hat{T}_{00}(\hat{P}, \hat{P}', z) &= C_0^{(6)}(z) \mathcal{A}_{00}(\hat{P}, \hat{P}', z), \end{aligned}$$

где $C_0^{(N)}(z) = -\frac{e^{i\pi(N-3)/4}}{2^{(N-1)/2}\pi^{(N+1)/2}z^{(N-3)/4}}$, причем у функции $z^{(N-3)/4}$ выбирается главная ветвь. Функции $\mathcal{A}_{\alpha,j;\beta,k}$ представляют собой амплитуды упругого ($\alpha = \beta, j = k$) или неупругого ($\alpha = \beta, j \neq k$) рассеяния и перестройки ($\alpha \neq \beta$) для процесса $(2 \rightarrow 2, 3)$, в начальном состоянии которого парная подсистема β находится в связанном состоянии с номером k , а дополнительная частица асимптотически свободна. Функция $\mathcal{A}_{0;\beta,k}$ является для этого процесса амплитудой развала системы на три частицы. Амплитуды $\mathcal{A}_{\alpha,j;0}$ и $\mathcal{A}_{00}$ отвечают процессам соответственно $(3 \rightarrow 2)$ и $(3 \rightarrow 3)$ в состоянии, когда все три частицы первоначально асимптотически свободны. Напомним, что вклады в $\mathcal{A}_{00}$ от однократного и двукратного перерассеяния представляют собой сингулярные обобщенные функции (см. [1]).

Описывая в разделе 4 работы [1] аналитические свойства по переменной z и свойства гладкости по угловым переменным $\hat{R}$ или $\hat{p}_\alpha$ и $\hat{R}'$ или $\hat{p}'_\beta$, которыми обладают ядра элементов матрицы $\hat{T}$, мы тем самым описали также и свойства амплитуд $\mathcal{A}(z)$.

Для разыскания амплитуд $\mathcal{A}(z)$ на физическом листе можно использовать, например, формулировку задачи рассеяния для трех частиц [3, 11], основанную на дифференциальных уравнениях Фаддеева для компонент волновой функции в координатном пространстве. Необходимо лишь перейти в этой формулировке к комплексным значениям энергии z . При этом у всех квадратных корней $z^{1/2}$ и $(z - \lambda_{\alpha,j})^{1/2}$, $\alpha = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, n_\alpha$, присутствующих в формулах, задающих асимптотические граничные условия на бесконечности (см. [3, 11]), следует выбрать главные ветви $\sqrt{z}$ и $\sqrt{z - \lambda_{\alpha,j}}$. В результате решения дифференциальных уравнений Фаддеева с такими условиями оказывается построенным аналитическое продолжение на физический лист волновой функции, а, следовательно, и амплитуд $\mathcal{A}(z)$. По амплитудам $\mathcal{A}(z)$ восстанавливается матрица рассеяния $S_I(z)$ и ищутся те значения z , для которых уравнение (7.1) имеет нетривиальное решение $\mathcal{A}^{(\text{res})}$. Как говорилось выше, эти значения z оказываются резонансами для соответствующего листа Π_l .

В заключение сделаем одно замечание.

Как известно [3], обобщением уравнений Фаддеева [2] на случай систем с произвольным числом частиц являются уравнения Якубовского [13]. Последние имеют структуру, в существенном аналогичную структуре уравнений Фаддеева. Поэтому схема, используемая в настоящей работе, может быть применена и при построения явных представлений типа (4.34), (5.1) и (6.1) для продолжения T -матрицы, матриц рассеяния и резольвенты на нефизическую часть римановой поверхности энергии в задаче N тел с произвольным N .

Автор благодарен С.Альбеверю, В.Б.Беляеву, К.А.Макарову и С.Л.Яковлеву за обсуждение результатов работы. Автор признателен также П.Экснеру за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Академии естественных наук Российской Федерации и Международного научного фонда (грант № RFB000).

Список литературы

- [1] А.К.Мотовилов // ТМФ. 1995. Т. 107. №3. С. 450–477.
- [2] Л.Д.Фаддеев // Тр. МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 1–125.
- [3] С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев. Теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

- [4] *Ю.В. Орлов, В.В. Туровцев* // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 5. С. 1600–1617.
- [5] *К. Меллер, Ю.В. Орлов* // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. С. 1341–1395.
- [6] *Р. Ньютон*. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
- [7] *В. де Альфаро, Т. Редже*. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1986.
- [8] *А. Боум*. Квантовая механика: основы и приложения. М.: Мир, 1990.
- [9] *А.К. Мотовилов* // ТМФ. 1993. Т. 95. № 3. С. 427–438.
- [10] *А.К. Мотовилов* // ЯФ. 1993. Т. 56. № 7. С. 61–65.
- [11] *А.А. Квицинский, Ю.А. Куперин, С.П. Меркурьев, А.К. Мотовилов, С.Л. Яковлев* // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. № 2. С. 267–317.
- [12] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики. Т. I–IV. М.: Мир, 1977–1982.
- [13] *О.А. Якубовский* // ЯФ. 1967. Т. 5. С. 937–942.

Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория теоретической физики
E-mail: motovilv@thsun1.jinr.dubna.su

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

A. K. Motovilov

**REPRESENTATIONS FOR THREE-BODY
T-MATRIX ON UNPHYSICAL SHEETS. II**

The explicit representations, which have been formulated in the part I of the article are proved. Analogous representations for analytical continuation of three-body scattering matrices and resolvent are established. An algorithm to search for three-body resonances on the base of the Faddeev differential equations is discussed.