Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Яковлев, Дифференциальные уравнения Фаддеева как спектральная задача для несимметричного оператора, *ТМФ*, 1996, том 107, номер 3, 513–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:50:06

С. Л. Яковлев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА КАК СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Исследуется несимметричный матричный оператор, уравнение для собственных функций которого есть система дифференциальных уравнений Фаддеева для системы трех частиц. Резольвенты этого оператора и его сопряженного выражены через компоненты Фаддеева T -матрицы трехчастичного оператора Шредингера. На основе этих представлений изучены инвариантные подпространства введенных операторов и определены их собственные функции. Доказаны условия биортогональности и полноты этих систем собственных функций.

Мы посвящаем настоящую работу памяти Станислава Петровича Меркурьева, которого вот уже три года как нет среди нас.

1. ВВЕДЕНИЕ

Объект исследования данной работы – дифференциальные уравнения Фаддеева. Работы Станислава Петровича по теории этих уравнений были решающими для понимания их места в общей теории и возможности их приложений к конкретным задачам теории столкновений.

Основная трудность спектральной теории операторов Шредингера для систем нескольких частиц с парными потенциалами взаимодействия связана с нефредгольмовостью стандартных уравнений теории возмущений для резольвенты, называемых обычно уравнениями Липмана–Швингера [1]. Эта трудность была преодолена Фаддеевым [2], предложившим использовать фредгольмовы интегральные уравнения для компонент T -матрицы систем трех частиц с короткодействующими парными потенциалами. На основе этих уравнений в [2] была исследована структура резольвенты оператора энергии трех частиц, изучена система его собственных функций и доказана ее полнота. Обобщение формулировки [2] для операторов Шредингера с парными потенциалами, содержащими кулоновское дальное действие, и исследование асимптотических свойств резольвенты и собственных функций в конфигурационном пространстве были даны в работах Меркурьева [3–9]. Объединенный подход работ [2–9] в наиболее отчетливой форме изложен в монографии Меркурьева и Фаддеева [10]. Ключевым моментом этого подхода

для трехчастичного оператора Шредингера

$$H = H_0 + \sum_{\beta=1}^3 V_{\beta}$$

являются фредгольмовы интегральные уравнения в импульсном пространстве для компонент трехчастичной T -матрицы [2]

$$M_{\alpha\beta}(z) = T_{\alpha}(z)\delta_{\alpha\beta} - T_{\alpha}(z)R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}(z), \quad (1)$$

где $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$, а $T_{\alpha}(z)$ выражается явно через двухчастичную t -матрицу. Уравнения (1) имеют единственное решение, и по их решениям резольвента $R(z) = (H - z)^{-1}$ восстанавливается по формуле

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) \sum_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}(z) R_0(z). \quad (2)$$

Далее по известным свойствам $R(z)$ могут быть исследованы все спектральные свойства оператора H . Альтернативный путь [10] основывается на фредгольмовых уравнениях для компонент резольвенты

$$R_{\alpha\beta}(z) = R_{\alpha}(z)\delta_{\alpha\beta} - R_{\alpha}(z)V_{\alpha} \sum_{\gamma \neq \alpha} R_{\gamma\beta}(z), \quad (3)$$

где $R_{\alpha}(z) = (H_0 + V_{\alpha} - z)^{-1}$. Решения уравнений (3) выражаются через операторы $M_{\alpha\beta}(z)$ равенствами

$$R_{\alpha\beta}(z) = R_0(z)\delta_{\alpha\beta} - R_0(z) \sum_{\gamma} M_{\alpha\gamma}(z) R_0(z).$$

Привлекательным свойством уравнений (3) является то, что их решения удовлетворяют уравнениям

$$(H_0 - z)R_{\alpha\beta}(z) + V_{\alpha} \sum_{\gamma} R_{\gamma\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} I. \quad (4)$$

Соответствующие однородные уравнения

$$(H_0 - z)\varphi_{\alpha} + V_{\alpha} \sum_{\gamma} \varphi_{\gamma} = 0, \quad (5)$$

называемые дифференциальными уравнениями Фаддеева [11, 12], позволяют получить собственные функции оператора H

$$H\Psi = z\Psi \quad (6)$$

по формуле

$$\Psi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}. \quad (7)$$

Такая постановка задачи оказалась очень плодотворной для приложений вследствие относительной простоты уравнений (5). Главной проблемой здесь является задание асимптотических граничных условий для компонент в конфигурационном пространстве, позволяющих по решениям (5) получить полный набор решений уравнения Шредингера (6) по формуле (7). Эта проблема была решена Меркурьевым сначала в работе [12] для короткодействующих потенциалов, а затем в цикле работ [3–9] для потенциалов с кулоновским дальнодействием. Описанный класс решений уравнений (5) называют физическим благодаря связи (7) с решениями уравнения Шредингера.

В ряде работ было замечено, что, помимо физических решений, уравнения (5) допускают и другой класс решений, характеризующихся условиями

$$\sum_{\gamma} U_{\gamma} = 0, \quad (H_0 - z)U_{\gamma} = 0.$$

Такие решения могут существовать только при z , принадлежащих спектру оператора H_0 , и не зависят от свойств входящих в уравнения (5) потенциалов V_{α} . Благодаря последнему эти решения получили название ложных. Различные аспекты, связанные с существованием и построением ложных решений, рассматривались в работах [13–16]. Основной вопрос спектральной теории: *образуют ли физические и ложные решения уравнений (5) полный набор и тем самым исчерпывается ли спектр этих уравнений спектрами операторов H и H_0 ?* Наиболее отчетливо эта проблема была поставлена и частично решена в работе [16]. Положительный ответ был дан в работе автора [17] для модельной ситуации, когда операторы H и H_0 имеют лишь дискретный спектр. В настоящей работе дается положительный ответ на данный вопрос для систем трех частиц с короткодействующими потенциалами.

Изложение в существенном опирается на результаты работ [2] и [10]. Автор старается избегать повторения выкладок, имеющихся в этих работах, обращая основное внимание на новые аспекты рассматриваемой проблемы. Коротко о структуре работы. Во втором разделе описываются необходимые обозначения и дается постановка задачи. В третьем разделе получены выражения для резольвент матричных операторов, отвечающих уравнениям (5) и им сопряженным, в терминах компонент T -матрицы $M_{\alpha\beta}(z)$. Здесь же определяются инвариантные подпространства ложных решений для уравнений (5) и физических решений для сопряженных уравнений. В четвертом разделе строятся собственные функции и доказываются условия полноты.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система трех нерелятивистских бесспиновых частиц. Движение общего центра масс считается отделенным. Конфигурационное пространство системы $\mathbf{R}^6$ состоит из пар векторов Якоби [10], отвечающих фиксированной паре частиц α : $X = \{x_{\alpha}, y_{\alpha}\}$, $x_{\alpha}, y_{\alpha} \in \mathbf{R}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$. Оператор Шредингера системы трех частиц

$$H = H_0 + \sum_{\beta=1}^3 V_{\beta}, \quad (8)$$

где $H_0 = -\Delta_{x_\alpha} - \Delta_{y_\alpha}$ (Δ — лапласиан), а $V_\beta \equiv V_\beta(x_\beta)$ — потенциалы взаимодействия между частицами пары β , рассматривается в $L_2(\mathbf{R}^6)$ на области определения $D = D(H_0) = W_2^2(\mathbf{R}^6) \subset L_2(\mathbf{R}^6)$. Здесь W_2^2 — класс Соболева [18]. Функции $V_\beta(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, считаются вещественнозначными, гладкими и достаточно быстро убывающими при $|x| \rightarrow \infty$ [10] такими, что оператор H на $W_2^2(\mathbf{R}^6)$ самосопряжен [19]. Для дальнейшего важно отметить, что пары векторов Якоби $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ при различных α связаны ортогональным преобразованием [10], поэтому H_0 не зависит от α . В дальнейшем вид представления, в котором реализуются операторы H_0 и V_β , не будет играть роли и поэтому чаще всего не конкретизируется.

Самосопряженный оператор H_0 имеет лишь непрерывный спектр, совпадающий с положительной вещественной полуосью, а его собственные функции

$$H_0 \phi_0(P) = P^2 \phi_0(P)$$

классифицируются векторами $P \in \mathbf{R}^6$. В координатном представлении они имеют вид

$$\phi_0(X, P) = (2\pi)^{-3} \exp\{i(X, P)\}.$$

В дальнейшем нам понадобятся собственные функции операторов $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$ вида

$$\phi_\alpha(X, p_\alpha) = (2\pi)^{-3/2} \psi_\alpha(x_\alpha) \exp\{i(y_\alpha, p_\alpha)\}.$$

Здесь $\psi_\alpha(x_\alpha) \in L_2(\mathbf{R}^3)$ — собственная функция парного оператора энергии $\{-\Delta_{x_\alpha} + V_\alpha(x_\alpha)\} \psi_\alpha(x_\alpha) = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha(x_\alpha)$ с собственным значением $\varepsilon_\alpha < 0$. Для простоты обозначений предполагается, что при каждом α имеется лишь по одному такому собственному значению ε_α . Функции $\phi_\alpha(X, p_\alpha)$ удовлетворяют уравнению

$$H_\alpha \phi_\alpha(p_\alpha) = (\varepsilon_\alpha + p_\alpha^2) \phi_\alpha(p_\alpha)$$

с $p_\alpha \in \mathbf{R}^3$.

Определим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, в котором будем рассматривать уравнения (5) как пространство вектор-функций $F = \{f_1, f_2, f_3\}$, действующих из $\mathbf{R}^6$ в $\mathbf{C}^3$, с компонентами $f_\alpha \in L_2(\mathbf{R}^6)$ и естественным скалярным произведением

$$\langle F, G \rangle = \sum_\alpha \langle f_\alpha | g_\alpha \rangle \equiv \sum_\alpha \int dX \bar{f}_\alpha(X) g_\alpha(X).$$

Элементы $\mathcal{H}$ всегда в дальнейшем обозначаются заглавными буквами F, G, U и т.д. Пространство $L_2(\mathbf{R}^6)$ со скалярным произведением $\langle \cdot | \cdot \rangle$ далее обозначается $\mathbf{h}$, а его элементы — строчными буквами f, g, u и т.д. В $\mathcal{H}$ рассмотрим оператор $\hat{H}$, действующий по правилу

$$(\hat{H}F)_\alpha = H_0 f_\alpha + V_\alpha \sum_\beta f_\beta \quad (9)$$

на области определения $\hat{D}$ элементов F с компонентами $f_\alpha \in D$, $\alpha = 1, 2, 3$. $\hat{H}$ плотно определен, замкнут и несимметричен. Его сопряженный $\hat{H}^*$ определен на $\hat{D}$ и действует по правилу

$$(\hat{H}^*G)_\alpha = H_0g_\alpha + \sum_{\beta} V_{\beta}g_{\beta}. \quad (10)$$

Уравнения на собственные значения для операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$, записанные в компонентах, имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{H}\Phi)_\alpha &= H_0\varphi_\alpha + V_\alpha \sum_{\beta} \varphi_\beta = \lambda\varphi_\alpha, \\ (\hat{H}^*\Psi)_\alpha &= H_0\psi_\alpha + \sum_{\beta} V_{\beta}\psi_{\beta} = \lambda\psi_\alpha. \end{aligned}$$

При этом первые совпадают с уравнениями Фаддеева (5), а вторые тесно связаны с триадой уравнений Липпмана–Швингера [20].

Нашей ближайшей целью будет изучение свойств резольвент операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$, однако прежде чем перейти к этому, получим удобные для дальнейшего представления операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$.

Введем в рассмотрение оператор J , действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathbf{h}$ по правилу

$$JF = \sum_{\alpha} f_{\alpha}.$$

Оператор J ограничен с нормой $\|J\| \leq 1$, что проверяется непосредственно, например, на элементах F вида $\{f_1, 0, 0\}$.

Определим сопряженный к J оператор J^* , действующий из $\mathbf{h}$ в $\mathcal{H}$. По определению $u \in \mathcal{D}(J^*)$, если существует такой элемент $U^* \in \mathcal{H}$, что

$$\langle JF | u \rangle = \langle F, U^* \rangle,$$

или покомпонентно

$$\left\langle \sum_{\alpha} f_{\alpha} | u \right\rangle = \sum_{\alpha} \langle f_{\alpha} | u_{\alpha}^* \rangle$$

для любого $F \in \mathcal{H}$, что влечет равенство $u_{\alpha}^* = u$. Следовательно,

$$(J^*u)_{\alpha} = u \quad (11)$$

для любого α .

Оператор J^* ограничен, и его ядро $\text{Ker}(J^*) = 0$. Ограниченность очевидна, а тривиальность ядра следует из определения (11), откуда получаем, что $\text{Ran}(J^*)$ – подпространство $\mathcal{H}$. Обозначим его $\mathcal{H}_p^*$.

Заметим далее, что ядро оператора $J : \text{Ker}(J)$, определяемое условием $U \in \text{Ker}(J)$: $\sum_{\alpha} u_{\alpha} = 0$, есть подпространство по определению, и обозначим его $\mathcal{H}_s$.

Отметим важные для дальнейшего коммутационные соотношения для операторов J , $\hat{H}$, J^* , $\hat{J}^*$ и оператора H (8), которые проверяются непосредственной подстановкой

$$\begin{aligned} J\hat{H} &= HJ, \\ \hat{H}^*J^* &= J^*H. \end{aligned} \quad (12)$$

На основании вышеизложенного заключаем, что на $\mathcal{H}$ корректно определен самосопряженный оператор J^*J как ограниченный оператор с областью значений $\text{Ran}(J^*J) = \mathcal{H}_p^*$ и ядром $\text{Ker}(J^*J) = \mathcal{H}_s$. Более того, из представления $\text{Ran}(J^*J) \oplus \text{Ker}(J^*J) = \mathcal{H}$ следует, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_p^*.$$

Из определений (9) и (10) операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$ и свойств J^*J получаем ключевые для дальнейшего представления

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}J^*J, \\ \hat{H}^* &= \hat{H}_0 + J^*J\hat{V}, \end{aligned}$$

где $\hat{H}_0$ и $\hat{V}$ — диагональные операторы $\hat{H}_0 = \text{diag}\{H_0, H_0, H_0\}$ и $\hat{V} = \text{diag}\{V_1, V_2, V_3\}$.

Для операторов $\hat{H}_0$ и H_0 выполняются коммутационные соотношения, аналогичные (12),

$$\begin{aligned} J\hat{H}_0 &= H_0J, \\ \hat{H}_0J^* &= J^*H_0, \end{aligned}$$

откуда следует перестановочность

$$\hat{H}_0J^*J = J^*J\hat{H}_0.$$

3. СТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРОВ $\hat{H}$ И $\hat{H}^*$

Обозначим через $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$ резольвенты операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$:

$$\begin{aligned} \hat{G}^1(z) &= (\hat{H} - z)^{-1}, \\ \hat{G}^2(z) &= (\hat{H}^* - z)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Определим T -матрицы $\hat{T}^1(z)$ и $\hat{T}^2(z)$ стандартными соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{T}^1(z) &= \hat{V}J^*J - \hat{V}J^*J\hat{G}^1(z)\hat{V}J^*J, \\ \hat{T}^2(z) &= J^*J\hat{V} - J^*J\hat{V}\hat{G}^2(z)J^*J\hat{V}. \end{aligned}$$

По определению резольвент (13) $[\hat{G}^1(z)]^* = \hat{G}^2(\bar{z})$, откуда

$$[\hat{T}^1(z)]^* = \hat{T}^2(\bar{z}),$$

где черта означает комплексное сопряжение в $\mathbf{C}$, а $*$ – сопряжение в $\mathcal{H}$.

Резольвенты $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$ выражаются через T -матрицы равенствами

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{T}^1(z)\hat{R}_0(z), \quad (14)$$

$$\hat{G}^2(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{T}^2(z)\hat{R}_0(z), \quad (15)$$

где $\hat{R}_0(z) = (\hat{H}_0 - z)^{-1}$.

Для доказательства, например (14), воспользуемся уравнениями

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{V}J^*J\hat{G}^1(z),$$

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{G}^1(z)\hat{V}J^*J\hat{R}_0(z),$$

которые, как обычно, следуют из операторного тождества $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1} \times (B - A)B^{-1}$, примененного к операторам $\hat{H} - z$ и $\hat{H}_0 - z$. Подставляя второе в первое, имеем

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)[\hat{V}J^*J - \hat{V}J^*J\hat{G}^1(z)\hat{V}J^*J]\hat{R}_0(z),$$

что дает (14). Аналогично находим (15).

Получим представления для операторов $\hat{T}^1$ и $\hat{T}^2$ в терминах компонент Фаддеева трехчастичной T -матрицы. Рассмотрим оператор $\hat{T}^1(z)$

$$\hat{T}^1(z) = [\hat{V} - \hat{V}J^*J\hat{G}^1(z)\hat{V}]J^*J.$$

Используя коммутационное соотношение

$$J\hat{G}^1(z) = R(z)J,$$

где $R(z) = (H - z)^{-1}$ – резольвента оператора H (8), для $\hat{T}^1(z)$ получаем

$$\hat{T}^1(z) = \hat{M}(z)J^*J. \quad (16)$$

Здесь через $\hat{M}(z)$ обозначен оператор

$$\hat{M}(z) = \hat{V} - \hat{V}J^*R(z)J\hat{V}. \quad (17)$$

Матричные элементы оператора $\hat{M}(z)$ совпадают с компонентами Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$ трехчастичной T -матрицы, удовлетворяющими уравнениям (1). В самом деле, прямое вычисление дает

$$[\hat{M}(z)]_{\alpha\beta} = V_\alpha \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha R(z) V_\beta,$$

что совпадает с компонентами Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$ из [2].

Аналогично доказывается представление для $\hat{T}^2(z)$:

$$\hat{T}^2(z) = J^*J\hat{M}(z). \quad (18)$$

Формулы (16) и (18) и перестановочность операторов J^*J и $\hat{R}_0(z)$ позволяют записать равенства (14) и (15) в виде

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{M}(z)\hat{R}_0(z)J^*J, \quad (19)$$

$$\hat{G}^2(z) = \hat{R}_0(z) - J^*J\hat{R}_0(z)\hat{M}(z)\hat{R}_0(z). \quad (20)$$

Представления (19) и (20) являются главным результатом данного раздела и позволяют полностью описать аналитические свойства резольвент $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$ на комплексной плоскости z .

Напомним результат [2, 10] относительно решений $M_{\alpha\beta}(z)$ уравнений (1). При всех $z \in \mathbf{C} \setminus \Pi_{\kappa^2}$, $-\kappa^2 = \min_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}$, $\Pi_{\kappa^2} = \{z : \operatorname{Im} z = 0, -\kappa^2 < \operatorname{Re} z < \infty\}$, за исключением не более чем счетного множества точек σ_d вещественной оси, совпадающего с дискретным спектром оператора H (8), уравнения (1) имеют единственное решение. При этом, если $z \in \Pi_{\kappa^2} \cup \sigma_d$, то операторы $R_0(z)M_{\alpha\beta}(z)R_0(z)$ являются ограниченными в $\mathbf{h}$, а при $E \in \Pi_{\kappa^2}$ операторы $R_0(E \pm i0)M_{\alpha\beta}(E \pm i0)R_0(E \pm i0)$ реализуются как неограниченные операторы в $\mathbf{h}$ с областью определения $\operatorname{Ran}(H - E)$.

Отсюда получаем полное описание аналитической структуры резольвент $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$. В частности, все точки $z \in \Pi_{\kappa^2} \cup \sigma_d$ принадлежат резольвентным множествам операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$, а их спектры $\sigma(\hat{H})$ и $\sigma(\hat{H}^*)$ лежат на вещественной оси и

$$\sigma(\hat{H}) = \sigma(\hat{H}^*) \subset \Pi_{\kappa^2} \cup \sigma_d.$$

В конце данного раздела покажем, что подпространства $\mathcal{H}_s$ и $\mathcal{H}_p^*$ инвариантны для резольвент $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$, соответственно, а, следовательно, и для операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$. В самом деле, т.к.

$$J^*J\mathcal{H}_s = 0,$$

то

$$J^*J\hat{G}^1(z)U = J^*J\hat{R}_0(z)U = \hat{R}_0(z)J^*JU = 0$$

для любого $U \in \mathcal{H}_s$, и т.к.

$$\mathcal{H}_p^* = J^*J\mathcal{H},$$

то

$$\hat{G}^2(z)J^*JF = J^*J[\hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{M}(z)\hat{R}_0(z)]F$$

для любого $F \in \mathcal{H}$ и, следовательно, $\hat{G}^2(z)J^*JF \in \mathcal{H}_p^*$.

4. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРОВ $\hat{H}$ И $\hat{H}^*$

В данном разделе мы определим собственные функции как дискретного, так и непрерывного спектра операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$ исходя из явных представлений для резольвент $\hat{G}^1(z)$ и $\hat{G}^2(z)$. Вначале преобразуем (19) и (20) к удобному виду. Воспользуемся формулами

$$\hat{M}(z)\hat{R}_0(z)J^*J = \hat{V}J^*R(z)J,$$

$$J^*J\hat{R}_0(z)\hat{M}(z) = J^*R(z)J\hat{V},$$

которые следуют из определения (17), перестановочных соотношений $\hat{R}_0(z)J^* = J^*R_0(z)$, $J\hat{R}_0(z) = R_0(z)J$ и подходящих уравнений Липмана–Швингера для $R(z) = (H - z)^{-1}$. Для $\hat{G}^1(z)$, $\hat{G}^2(z)$ получаем

$$\hat{G}^1(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{V}J^*R(z)J, \quad (21)$$

$$\hat{G}^2(z) = \hat{R}_0(z) - J^*R(z)J\hat{V}\hat{R}_0(z). \quad (22)$$

Пусть $\lambda_i \in \sigma_d$ — точка дискретного спектра оператора H , тогда в окрестности λ_i резольвента $R(z)$ имеет вид

$$R(z) = \frac{|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|}{\lambda_i - z} + \tilde{R}(z),$$

где $\tilde{R}(z)$ регулярна в λ_i . Подставляя это представление в (21) и (22) и беря вычеты в λ_i , будем иметь

$$\text{res}_{\lambda_i} \hat{G}^1(z) = -\hat{R}_0(\lambda_i)\hat{V}J^*|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|J,$$

$$\text{res}_{\lambda_i} \hat{G}^2(z) = -J^*|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|J\hat{V}\hat{R}_0(\lambda_i),$$

откуда следует, что

$$\Phi^i = -\hat{R}_0(\lambda_i)\hat{V}J^*\Psi_i \quad (23)$$

с компонентами $\varphi_\alpha^i = -\hat{R}_0(\lambda_i)V_\alpha\Psi_i$ есть собственная функция дискретного спектра оператора $\hat{H}$ с собственными значениями λ_i

$$\hat{H}\Phi^i = \lambda_i\Phi^i,$$

а $\Psi^i = J^*\Psi_i$ с компонентами $\psi_\alpha^i = \Psi_i$ есть собственная функция $\hat{H}^*$

$$\hat{H}^*\Psi^i = \lambda_i\Psi^i.$$

Таковыми функциями при всех $\lambda_i \in \sigma_d$ исчерпываются все собственные функции дискретного спектра операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$, лежащие в $\mathcal{H}$.

Перейдем к построению собственных функций непрерывного спектра. Эти функции принято классифицировать состояниями, описывающими возможные асимптотические движения частиц системы. Для этой цели будем использовать функции $\phi_\alpha(p_\alpha)$ и $\phi_0(P)$, введенные в разделе 2. В дальнейшем мы будем опускать пространственные аргументы функций, сохраняя зависимость лишь от импульсов, играющих в данном случае роль непрерывных индексов. Заметим, что рассматриваемые далее функции не будут элементами исходных гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ и $\mathbf{h}$, поэтому действия с ними необходимо трактовать, как обычно, в смысле обобщенных функций [10]. Мы будем определять собственные функции с помощью значений резольвент на верхнем берегу разреза $\Pi_{\kappa 2}$. Такие функции снабжаются обычно значком $+$, в то время как использование значений на нижнем берегу разреза ведет к функциям, сопровождаемым обычно значком $-$. Обе формулировки эквивалентны. Мы выбрали первую и не указываем это явно в обозначениях.

Построим вектор функции $\chi^\gamma(p_\gamma)$ и $\chi^{0\gamma}(P)$ с компонентами

$$\begin{aligned}\chi_\alpha^\gamma(p_\gamma) &= \delta_{\alpha\gamma} \phi_\gamma(p_\gamma), \\ \chi_\alpha^{0\gamma}(P) &= \delta_{\alpha\gamma} \phi_0(P).\end{aligned}$$

Отвечающие им собственные функции оператора $\hat{H}$ определим как

$$\Phi^\gamma(p_\gamma) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-i\delta \hat{G}^1(\varepsilon_\gamma + p_\gamma^2 + i\delta) \chi^\gamma(p_\gamma) \right), \quad (24)$$

$$\Phi^{0\gamma}(P) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-i\delta \hat{G}^1(P^2 + i\delta) \chi^{0\gamma}(P) \right). \quad (25)$$

Вычисляя пределы с помощью (21) и переходя к компонентам, будем иметь

$$\varphi_\alpha^\gamma(p_\gamma) = -R_0(\varepsilon_\gamma + p_\gamma^2 + i0) V_\alpha \Psi_\gamma(p_\gamma), \quad (26)$$

$$\varphi_\alpha^{0\gamma}(P) = \phi_0(P) \delta_{\alpha\gamma} - R_0(P^2 + i0) V_\alpha \Psi_0(P). \quad (27)$$

Здесь через $\Psi_\gamma(p_\gamma)$ и $\Psi_0(P)$ обозначены собственные функции трехчастичного гамильтониана H [2, 10]:

$$\begin{aligned}\Psi_\gamma(p_\gamma) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-i\varepsilon R(\varepsilon_\gamma + p_\gamma^2 + i\varepsilon) \phi_\gamma(p_\gamma) \right), \\ \Psi_0(P) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-i\varepsilon R(P^2 + i\varepsilon) \phi_0(P) \right).\end{aligned}$$

Функции (24) и (25) по определению дают слабые решения уравнений

$$\begin{aligned}\hat{H} \Phi^\gamma(p_\gamma) &= (\varepsilon_\gamma + p_\gamma^2) \Phi^\gamma(p_\gamma), \\ \hat{H} \Phi^{0\gamma}(P) &= P^2 \Phi^{0\gamma}(P).\end{aligned}$$

Формулы (23), (26) и (27) устанавливают соответствие между собственными функциями операторов $\hat{H}$ и H такое, что

$$\begin{aligned}J \Phi^i &= \sum_\alpha \psi_\alpha^i = \Psi_i, \\ J \Phi^\gamma(p_\gamma) &= \sum_\alpha \phi_\alpha^\gamma(p_\gamma) = \Psi_\gamma(p_\gamma), \\ J \Phi^{0\gamma}(P) &= \sum_\alpha \phi_\alpha^{0\gamma}(P) = \Psi_0(P).\end{aligned} \quad (28)$$

При этом в первых двух случаях это соответствие взаимно однозначно, тогда как в третьем случае нет. Последнее является отражением того, что оператор J имеет нетривиальное ядро $\text{Ker}(J)$. Перестроим базис подпространства, отвечающего функциям Φ^{01} , Φ^{02} , Φ^{03} , следующим образом [16]. Фиксируем одно из значений $\gamma = \mu$ (скажем,

$\mu = 1$). Рассмотрим пару линейно независимых векторов из $\mathbf{R}^3$: σ^1, σ^2 , лежащих на плоскости $\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} = 0$, и образуем линейные комбинации

$$U^k(P) = \sum_{\beta} \sigma_{\beta}^k \Phi^{0\beta}(P), \quad k = 1, 2. \quad (29)$$

Компоненты $U^k(P)$ удовлетворяют равенствам

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}^k(P) = \sum_{\beta} \sigma_{\beta}^k \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^{0\beta}(P) = \sum_{\beta} \sigma_{\beta}^k \Psi_0(P) = 0.$$

Таким образом, функции $U^k(P)$ – ложные решения уравнений Фаддеева (5). Из (29) и (27) получаем

$$u_{\alpha}^k(P) = \sigma_{\alpha}^k \phi_0(P). \quad (30)$$

Функции $\Phi^{0\mu}, U^1, U^2$ дают альтернативный к $\Phi^{01}, \Phi^{02}, \Phi^{03}$ базис, скоррелированный с подпространством $\mathcal{H}_s$.

Определим подпространство $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}$ как замыкание множества функций вида

$$F = \sum_i C_i \Phi^i + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} c_{\gamma}(p_{\gamma}) \Phi^{\gamma}(p_{\gamma}) + \int dP c_0(P) \Phi^{0\mu}(P). \quad (31)$$

Подпространство $\mathcal{H}_p$, будучи линейной комбинацией собственных функций, инвариантно относительно $\hat{H}$: из $F \in \mathcal{H}_p \cap \hat{\mathcal{D}}$ следует $\hat{H}F \in \mathcal{H}_p$. Точно так же как в [17], можно показать, что для элементов $\mathcal{H}_p$ верно соотношение

$$JF \neq 0$$

и подпространства $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_s$ линейно независимы.

Перейдем к построению собственных функций непрерывного спектра оператора $\hat{H}^*$. Вначале определим набор векторов $\mathbf{R}^3 \{\theta^0, \theta^1, \theta^2\}$, биортогональных к $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2\}$ с $\sigma_{\alpha}^0 = \delta_{\alpha\mu}$:

$$(\sigma^l, \theta^k) = \delta_{lk}.$$

При этом компоненты θ^0 имеют вид $\theta_{\alpha}^0 = 1$. Построим вектор функции $\omega^{\gamma}(p_{\gamma})$, $\omega^0(P)$ и $\omega^k(P)$ с компонентами

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^{\gamma}(p_{\gamma}) &= \theta_{\alpha}^0 \phi_{\gamma}(p_{\gamma}), \\ \omega_{\alpha}^0(P) &= \theta_{\alpha}^0 \phi_0(P), \\ \omega_{\alpha}^k(P) &= \theta_{\alpha}^k \phi_0(P), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (32)$$

Отвечающие им собственные функции $\hat{H}^*$ определим формулами

$$\Psi^{\gamma}(p_{\gamma}) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-i\delta \hat{G}^2(\varepsilon_{\gamma} + p_{\gamma}^2 + i\delta) \omega^{\gamma}(p_{\gamma}) \right), \quad (33)$$

$$\Psi^0(P) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-i\delta \hat{G}^2(P^2 + i\delta) \omega^0(P) \right), \quad (34)$$

$$W^k(P) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-i\delta \hat{G}^2(P^2 + i\delta) \omega^k(P) \right), \quad k = 1, 2. \quad (35)$$

Пределы в (33) и (34) легко вычисляются с помощью (22) и приводят к следующим выражениям:

$$\psi_\alpha^\gamma(p_\gamma) = \Psi_\gamma(p_\gamma), \quad (36)$$

$$\psi_\alpha^0(P) = \Psi_0(P). \quad (37)$$

Предел в (35) вычислить сложнее, и это будет сделано в конце данного раздела.

Системы собственных функций $\{\Phi^i, \Phi^\gamma(p_\gamma), \Phi^{0\mu}(P), U^k(P)\}$ и $\{\Psi^i, \Psi^\gamma(p_\gamma), \Psi^0(P), W^k(P)\}$ по построению удовлетворяют обобщенным условиям биортогональности

$$\begin{aligned} \langle \Phi^a, \Psi^b \rangle &= \delta(a-b), & \langle U^k(P), W^l(Q) \rangle &= \delta_{kl} \delta(P-Q), \\ \langle \Phi^a, U^k \rangle &= \langle \Phi^a, W^k \rangle = \langle \Psi^b, U^k \rangle = \langle \Psi^b, W^k \rangle = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Перейдем к доказательству полноты. Определим спектральные проекторы

$$\mathcal{P}_i(\lambda_i) = |\Phi^i\rangle\langle\Psi^i| \quad (39)$$

и обобщенные спектральные проекторы

$$\mathcal{P}_\gamma(p_\gamma) = |\Phi^\gamma(p_\gamma)\rangle\langle\Psi^\gamma(p_\gamma)|, \quad (40)$$

$$\mathcal{P}_0(P) = |\Phi^{0\mu}(P)\rangle\langle\Psi^0(P)|. \quad (41)$$

Соответствующие спектральные проекторы для трехчастичного оператора Шредингера H обозначим

$$\begin{aligned} Q_i(\lambda_i) &= |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \\ Q_\gamma(p_\gamma) &= |\Psi_\gamma(p_\gamma)\rangle\langle\Psi_\gamma(p_\gamma)|, \\ Q_0(P) &= |\Psi_0(P)\rangle\langle\Psi_0(P)|. \end{aligned}$$

Теорема полноты [10] для системы собственных функций оператора H в $\mathbf{h}$ записывается в терминах операторов Q в виде

$$\sum_{\lambda_i \in \sigma_d} Q_i(\lambda_i) + \sum_\gamma \int dp_\gamma Q_\gamma(p_\gamma) + \int dP Q_0(P) = I, \quad (42)$$

где I — единичный оператор в $\mathbf{h}$. Для доказательства полноты собственных функций $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$ воспользуемся представлением (21) для $\hat{G}^1(z)$ и спектральным представлением для резольвенты $R(z)$

$$R(z) = \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \frac{Q_i(\lambda_i)}{\lambda_i - z} + \sum_\gamma \int dp_\gamma \frac{Q_\gamma(p_\gamma)}{p_\gamma^2 + \varepsilon_\gamma - z} + \int dP \frac{Q_0(P)}{P^2 - z}.$$

Используя тождество

$$R_0(z) \frac{1}{\mu - z} = R_0(\mu) \frac{1}{\mu - z} - R_0(z) R_0(\mu)$$

при подходящих μ и формулы (26), (27), (36), (37), получим для $\hat{G}^1(z)$

$$\hat{G}^1(z) = \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \frac{\mathcal{P}_i(\lambda_i)}{\lambda_i - z} + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} \frac{\mathcal{P}_{\gamma}(p_{\gamma})}{p_{\gamma}^2 + \varepsilon_{\gamma} - z} + \int dP \frac{\mathcal{P}_0(P)}{P^2 - z} + \hat{R}_0(z)[I - \mathcal{P}_p], \quad (43)$$

где I – единичный оператор в $\mathcal{H}$, а через $\mathcal{P}_p$ обозначен оператор

$$\mathcal{P}_p = \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \mathcal{P}_i(\lambda_i) + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} \mathcal{P}_{\gamma}(p_{\gamma}) + \int dP \mathcal{P}_0(P). \quad (44)$$

Обозначим $\mathcal{P}_s = I - \mathcal{P}_p$. По построению

$$\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s = I. \quad (45)$$

Исследуем свойства операторов $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{P}_s$. Учитывая определения (39), (40), (41), соотношения (28) и условие полноты (42), получаем

$$J\mathcal{P}_p = I, \quad J\mathcal{P}_s = 0.$$

Отсюда и из условий биортогональности (38) следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p^2 &= \mathcal{P}_p, \\ \mathcal{P}_s^2 &= \mathcal{P}_s \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{P}_s \mathcal{P}_p = \mathcal{P}_p \mathcal{P}_s = 0.$$

Таким образом, $\mathcal{P}_p$ и $\mathcal{P}_s$ – проекторы, а их области значений являются подпространствами, для которых

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p \operatorname{Ran}(\mathcal{P}_p) &= \operatorname{Ran}(\mathcal{P}_p), \\ \mathcal{P}_s \operatorname{Ran}(\mathcal{P}_s) &= \operatorname{Ran}(\mathcal{P}_s). \end{aligned}$$

Введенное выше подпространство $\mathcal{H}_p$ (31) в точности совпадает с $\operatorname{Ran}(\mathcal{P}_p)$ по построению

$$\mathcal{H}_p = \operatorname{Ran}(\mathcal{P}_p). \quad (46)$$

Докажем, что для оператора $\mathcal{P}_s$ подпространство $\mathcal{H}_s$ является точным, т.е.

$$\operatorname{Ran}(\mathcal{P}_s) = \mathcal{H}_s. \quad (47)$$

Воспользуемся представлением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_p^*$$

и покажем, что $\mathcal{H}_p^* = \text{Ker}(\mathcal{P}_s^*)$, тогда (47) будет следовать из $\mathcal{H} = \text{Ran}(\mathcal{P}_s) \oplus \text{Ker}(\mathcal{P}_s^*)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{P}_s^*$:

$$\mathcal{P}_s^* = I - \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \mathcal{P}_i^*(\lambda_i) - \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} \mathcal{P}_{\gamma}^*(p_{\gamma}) - \int dP \mathcal{P}_0^*(P), \quad (48)$$

где операторы $\mathcal{P}^*$ даются равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^*(\lambda_i) &= |\Psi^i\rangle\langle\Phi^i|, \\ \mathcal{P}_{\gamma}^*(p_{\gamma}) &= |\Psi^{\gamma}(p_{\gamma})\rangle\langle\Phi^{\gamma}(p_{\gamma})|, \\ \mathcal{P}_0^*(P) &= |\Psi^0(P)\rangle\langle\Phi^{0\mu}(P)|. \end{aligned}$$

Для векторов $G \in \text{Ker}(\mathcal{P}_s^*)$ должно выполняться

$$G = \mathcal{P}_p^* G,$$

где $\mathcal{P}_p^* = I - \mathcal{P}_s^* \mathcal{P}_s^*$ из (48). Тогда $G \in \mathcal{H}_p^*$ и для его компонент $g_{\alpha} = g$ (для любого α) предыдущее равенство принимает вид

$$g = \sum_i Q_i(\lambda_i)g + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} Q_{\gamma}(p_{\gamma})g + \int dP Q(P)g,$$

а это в силу условия полноты (42) означает, что $\text{Ker}(\mathcal{P}_s^*) = \mathcal{H}_p^*$. Таким образом, (47) доказано. Равенства (45) совместно с (46) и (47) доказывают полноту подпространств $\mathcal{H}_p$ и $\mathcal{H}_s$:

$$\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_s = \mathcal{H}.$$

Нам осталось лишь выразить оператор $\mathcal{P}_s = I - \mathcal{P}_p$ в терминах спектральных проекторов на собственные функции $U^k(P)$ и $W^k(P)$. Заметим, что для любой функции $V \in \text{Ran}(\mathcal{P}_s) = \mathcal{H}_s$ справедливо

$$V = \sum_{k=1}^2 \int dP C_v^k(P) U^k(P),$$

что является тривиальным следствием полноты функций $\phi_0(P)$ в $\mathbf{h}$, полноты векторов σ^1 и σ^2 на плоскости $\sum_{\alpha} \sigma_{\alpha} = 0$ в $\mathbf{R}^3$ и представления (30). Коэффициенты $C_v^k(P)$ имеют вид

$$C_v^k(P) = \langle \omega^k(P), V \rangle$$

с $\omega^k(P)$ из (32). Выбирая V в виде $V = (I - \mathcal{P}_p)F$, получаем

$$C_v^k(P) = \langle \omega^k(P), (I - \mathcal{P}_p)F \rangle = \langle \omega^k(P), F \rangle - \langle \mathcal{P}_p^* \omega^k(P), F \rangle.$$

Обозначая

$$\bar{W}^k(P) = \omega^k(P) - \mathcal{P}_p^* \omega^k(P),$$

находим для $\mathcal{P}_s$

$$\mathcal{P}_s = \sum_{k=1}^2 \int dP |U^k(P)\rangle \langle \bar{W}^k(P)|. \quad (49)$$

Введем оператор

$$\mathcal{P}_{sk} = |U^k(P)\rangle \langle \bar{W}^k(P)|,$$

с помощью которого для $\hat{R}_0(z)\mathcal{P}_s$ получаем представление

$$\hat{R}_0(z)\mathcal{P}_s = \sum_{k=1}^2 \int dP \frac{\mathcal{P}_{sk}(P)}{P^2 - z}.$$

Формула (43) теперь переписывается в виде

$$\hat{G}^1(z) = \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \frac{\mathcal{P}_i(\lambda_i)}{\lambda_i - z} + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} \frac{\mathcal{P}_{\gamma}(p_{\gamma})}{p_{\gamma}^2 + \varepsilon_{\gamma} - z} + \int dP \frac{\mathcal{P}_0(P)}{P^2 - z} + \sum_{k=1}^2 \int dP \frac{\mathcal{P}_{sk}(P)}{P^2 - z}. \quad (50)$$

Отсюда для $\hat{G}^2(z)$ получаем

$$\hat{G}^2(z) = \sum_{\lambda_i \in \sigma_d} \frac{\mathcal{P}_i^*(\lambda_i)}{\lambda_i - z} + \sum_{\gamma} \int dp_{\gamma} \frac{\mathcal{P}_{\gamma}^*(p_{\gamma})}{p_{\gamma}^2 + \varepsilon_{\gamma} - z} + \int dP \frac{\mathcal{P}_0^*(P)}{P^2 - z} + \sum_{k=1}^2 \int dP \frac{\mathcal{P}_{sk}^*(P)}{P^2 - z} \quad (51)$$

с $\mathcal{P}_{sk}^*(P) = |\bar{W}^k(P)\rangle \langle U^k(P)|$. Из формулы (51) можно вычислить предел в (35) и получить

$$W^k(P) = \bar{W}^k(P).$$

Последнее означает, что оператор $\mathcal{P}_s$ в (49) выражается через собственные функции $U^k(P)$ и $W^k(P)$ операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$, что позволяет трактовать равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s &= I, \\ \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_s &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

и им сопряженные

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p^* + \mathcal{P}_s^* &= I, \\ \mathcal{H}_p^* + \mathcal{H}_s^* &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

с $\mathcal{H}_s^* = \text{Ran}(\mathcal{P}_s^*)$ как условия полноты построенных в данном разделе систем собственных функций операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}^*$.

Автор выражает благодарность Международному научному фонду и INTAS за поддержку данной работы, гранты RFB000 и INTAS-93-1815.

Список литературы

- [1] Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
- [2] Л. Д. Фаддеев // Труды МИАН СССР. 1963. Т. 69. С. 1–125.

- [3] *С.П.Меркурьев* // ТМФ. 1977. Т. 32. С. 187.
- [4] *С.П.Меркурьев* // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 289.
- [5] *С.П.Меркурьев* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 77. С. 148.
- [6] *С.П.Меркурьев* // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. С. 68.
- [7] *С.П.Меркурьев С.П.* // ТМФ. 1979. Т. 38. С. 201.
- [8] *S.P.Merkuriev* // Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 141.
- [9] *S.P.Merkuriev* // Ann. of Phys. 1980. V. 130. P. 395.
- [10] *С.П.Меркурьев, Л.Д.Фаддеев*. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. Наука: М., 1985.
- [11] *H.P.Noyes, H.Fiedeldey* // Three Particle scattering in Quantum Mechanics / Eds. J. Gillespie, J. Nuttall. New York, 1968.
- [12] *S.P.Merkuriev, C.Gignoux, A.Laverne* // Ann. of Phys. 1976. V. 99. P. 20.
- [13] *S.K.Adhikari, W.Glöckle* // Phys. Rev. 1979. V. C19. P. 616.
- [14] *J.F.Friar, B.F.Gibson, G.L.Paine* // Phys. Rev. 1980. V. C22. P. 284.
- [15] *В.В.Пупышев* // ТМФ. 1989. V. 81. P. 86; Phys. Lett. 1989. V. A140. P. 284.
- [16] *J.W.Evans, D.K.Hoffman* // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2858.
- [17] *С.Л.Яковлев* // ТМФ. 1995. Т. 102. С. 323.
- [18] *В.И.Смирнов*. Курс высшей математики. Т. 5. М.: ОГИЗ, 1947.
- [19] *М.Рид, Б.Саймон*. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [20] *W.Glöckle* // Nucl.Phys. 1970. V. A141. P. 620.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: SYAKOVLE@PHIM.NIIF.SPB.SU

Поступила в редакцию
19.VI.1995 г.

S. L. Yakovlev

DIFFERENTIAL FADDEEV EQUATIONS AS A SPECTRAL PROBLEM FOR NONSYMMETRIC OPERATOR

We consider a nonsymmetric operator, for which the eigenvalue problem is the system of three-particle differential Faddeev equations. For this operator and its adjoint, the resolvents and represented in terms of the Faddeev T -matrix components of the three particle Schrödinger operator. Based on these representations, the invariant spaces of the operators under consideration are investigated and their eigenfunctions are determined. The biorthogonality and completeness are proved.