Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Березин, Геометрическая структура базы и скрученность градуированных расслоений, используемых в моделировании гравитации и элементарных частиц, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 1, 16–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:56:38

В. Т. Березин

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА БАЗЫ И СКРУЧЕННОСТЬ ГРАДУИРОВАННЫХ РАССЛОЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В МОДЕЛИРОВАНИИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В проблемах объединения фундаментальных взаимодействий элементарных частиц и гравитации возникает необходимость в привлечении математической структуры градуированного расслоения ζ . Его базой B служит 9-мерное градуированное пространство, имеющее одно скалярное, 4 спинорных и 4 векторных измерения (относительно группы Лоренца). Найдено однопараметрическое семейство градуированных групп Пуанкаре $1P$. Показано, что любая группа из этого семейства действует на своей инвариантной подгруппе и на базе B по-разному. Эта ситуация отличается от классической и указывает на нетривиальность геометрических свойств расслоения ζ . Обсуждена проблема скрученности расслоений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные достижения в области физики элементарных частиц и гравитации – в эксперименте и теории – дают основание полагать, что реальное пространство-время имеет гораздо более сложную структуру за счет суперсимметрии [1–6]. Мы будем называть его *базовым* физическим пространством B , поскольку оно выступает всегда в качестве *базы* некоторых градуированных расслоений ζ . Число измерений $\dim B$ определяется *расширенной* группой градуированных преобразований NP , $N = 1, 2, 3, \dots$. Мы ограничимся случаем $N = 1$, который охватывает всю совокупность современных экспериментальных данных по элементарным частицам. Группа $1P$ минимальна с точки зрения числа входящих в нее грассман-нечетных параметров, но в то же время максимальна с точки зрения числа генераторов, образующих единственную неприводимую градуированную алгебру Ли симметрий S -матрицы, которая возможна в рамках ковариантной квантовой теории поля (теорема Хаага, Лопушанского и Сониуса [7]). При $N = 1$ имеем $\dim B = 9$. Сейчас становится все более ясно, что важнейшими математическими структурами, действующими в физике элементарных частиц и гравитации, являются групповая и грассманова – из алгебраических структур, многообразия и расслоения – из геометрических. В своих исследованиях, начатых в [8], мы обнаружили, что с этой точки зрения большое значение имеет геометрический формализм градуиро-

ванного расслоенного пространства со структурной группой

$$G = GL(B) \times L \times G_{\text{int}}, \quad G_{\text{int}} = U(1) \times SU(2) \times SU(3). \quad (1)$$

Здесь G_{int} – известная группа внутренних симметрий элементарных частиц, L – группа Лоренца, $GL(B)$ – группа, действующая в пространствах касательных и кокасательных тензоров над базой B . Группа $GL(B)$ индуцируется янг-миллсовой группой $1P_{Y-M}$, производящей для которой является $1P$, при условии, что известно фундаментальное представление последней. В настоящей работе мы покажем, что существует однопараметрическое семейство генераторов этого представления (или, что равносильно, семейство фундаментальных представлений). Найден их явный вид.

В любой теории расслоения существует проблема *скрученности*, суть которой объясняется в разделе 2. Решение этой проблемы косвенно касается специфики вложения гравитации в теорию элементарных частиц. Однако эта тема выходит за рамки настоящей статьи.

Заметим, что вместо приставки “супер-” в таких словах, как *супергруппа*, мы используем прилагательное *градуированный*. Это связано прежде всего с тем, что фундаментальные градуированные физические поля, преобразующиеся по представлениям группы (1), не реализуют никакого представления супергруппы $1P$. В частности, киральные суперполя [1–3] нам не нужны. Соответственно стандартная суперсимметрия будет использована для весьма ограниченных целей. Кроме того, понятие “*градуированный*” имеет четкий универсальный смысл, широко распространено в различных областях математики и общепринято.

2. ПРОБЛЕМА ЗАДАНИЯ СКРУЧЕННОСТИ ГРАДУИРОВАННОГО РАССЛОЕНИЯ

С помощью алгебры Грассмана обычное (классическое) расслоение [9–12] легко обобщается до градуированного. Пусть A – некоторая алгебра, $A_{\text{ev}} \subset A$, $A_{\text{od}} \subset A$, $\emptyset$ – пустое множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Четностью в алгебре A называется тройка

$$\mathcal{P} = \{A_{\text{ev}}, A_{\text{od}}, \varphi | A_{\text{od}} \neq \emptyset, \varphi: A_{\text{ev}} \cup A_{\text{od}} \rightarrow \{0, 1\}\}, \quad (2)$$

удовлетворяющая условиям:

- а) $A_{\text{ev}} \cap A_{\text{od}} = \emptyset$;
- б) элементы из $A_{\text{ev}} \cup A_{\text{od}}$ – образующие алгебры A ;
- в) ограничения $\varphi_{\text{ev}} = \varphi|_{A_{\text{ev}}}$, $\varphi_{\text{od}} = \varphi|_{A_{\text{od}}}$ постоянны, причем $\varphi_{\text{ev}}: A_{\text{ev}} \rightarrow 0$, $\varphi_{\text{od}}: A_{\text{od}} \rightarrow 1$;
- г) для любых элементов $u, v \in A_{\text{ev}} \cup A_{\text{od}}$ выполняется равенство $uv = (-1)^{\varphi(u)\varphi(v)}vu$.

Элементы $u \in A_{\text{ev}}$ называются *четными* (или *бозе-элементами*), $v \in A_{\text{od}}$ – *нечетными* (или *ферми-элементами*). Нечетные элементы антикоммутируют. Равенство из пункта “г” часто пишут проще: $uv = (-1)^{uv}vu$ или

$$u^i v^k = (-1)^{ik} v^k u^i \quad (3)$$

при наличии индексов, которые, таким образом, *градуируются*. Отображение φ распространяется на всю алгебру A по линейности. Формула (3) в частном случае тензора $M^{ik} = v^i u^k$ индуцирует общее определение *градуированного транспонирования* (что отмечается индексом gt) произвольной матрицы M^{ik} :

$$(M^{gt})^{ik} = (-1)^{ik} M^{ik}. \quad (4)$$

Заметим, что в литературе [13, 14] можно встретить другие определения градуированного транспонирования, полезность которых определяется теми или иными целями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра $A = AG$, для которой существует (или задана) четность $\mathcal{P}$, называется алгеброй Грассмана, а геометрическая структура над ней называется градуированной.

По алгебре Грассмана имеется обширная литература, например [4, 13, 14]. Градуированное G -расслоение с тотальным пространством E , базой B , проекцией π (т.е. сюръективным отображением $\pi: E \rightarrow B$), типичным слоем F , атласом расслоения Φ и структурной группой G из (1) будем обозначать символом $\zeta = (E, \pi, B, F, \Phi, G)$. Атлас есть набор пар (U_A, χ_A) , $A \in \mathcal{A}$, где $\{U_A\}$ – открытое покрытие B , $\chi_A: U_A \times F \rightarrow \pi^{-1}U_A \subset E$ – так называемые *тривиализирующие* гомеоморфизмы или *локальные структуры прямого произведения*.

Пусть $\rho: E \times G \rightarrow E$ – действие G на E справа, $\lambda: G \times F \rightarrow F$ – действие G на F слева. Для любых $A, A' \in \mathcal{A}$, $b \in U_A \cap U_{A'}$, $v \in F$ формулой

$$g_{AA'}(b) \cdot v = \chi_A^{-1} \circ \chi_{A'}(b, v), \quad (5)$$

где точка $(\cdot)$ – действие λ , задаются *функции перехода* $g_{AA'}: U_A \cap U_{A'} \rightarrow G$. Они имеют свойства

$$\begin{aligned} g_{AA'}(b)g_{A'A''}(b) &= g_{AA''}(b), \quad b \in U_A \cap U_{A'} \cap U_{A''}, \\ g_{AA'}(b) &= g_{A'A}^{-1}(b), \\ g_{AA}(b) &= e \quad (e \in G - \text{единичный элемент}) \end{aligned} \quad (6)$$

и задают *скручивание* между двумя пересекающимися локальными структурами прямого произведения. Это означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} U_{A'} \times F & \supset & (U_A \cap U_{A'}) \times F & \xrightarrow{\chi_A^{-1} \circ \chi_{A'}} & (U_A \cap U_{A'}) \times F \subset U_A \times F \\ \downarrow \chi_{A'} & & \chi_{A'} \searrow & & \swarrow \chi_A \downarrow \chi_A \\ \pi^{-1}U_{A'} & \supset & \pi^{-1}(U_A \cap U_{A'}) & \subset & \pi^{-1}U_A \end{array} \quad (7)$$

коммутативна. Таким образом, пространство E локально является прямым произведением, а в целом скручено. Пример – лист Мебиуса.

Если $F = V$ – векторное пространство с послойно линейными тривиализирующими гомеоморфизмами, то градуированное G -расслоение называется *векторным*. Если же $F = G$ с правым групповым действием $\chi_A(b, g) = \chi_A(b, e) \cdot g$, то ζ называется *главным* градуированным G -расслоением. Здесь точка означает действие ρ , $b \in U_A$, $g \in G$, $e \in G$ – единичный элемент. Градуированное *сечение* $\sigma: B \rightarrow E$, $\pi \circ \sigma = \text{id}_B$,

сопоставляет каждому $b \in B$ некоторый элемент *слоя* $\pi^{-1}(b) \subset E$. Сечения σ_1 и σ_2 главного G -расслоения можно послойно перемножать в групповом смысле: $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(b) = \sigma_1(b) \cdot \sigma_2(b)$. Множество $\{\sigma\}$ сечений главного G -расслоения называется *градуированной группой Янга–Миллса* G_{Y-M} . Она бесконечномерна. Структурная группа G называется *производящей* для G_{Y-M} . Функции перехода $g_{AA'}(b)$ суть некоторые сечения главных подрасслоений над $U_A \cap U_{A'}$ для всех $A, A' \in \mathcal{A}$.

В индуцированной естественным образом G -расслоениями ζ модели элементарных частиц и гравитации (для простоты будем ее называть bundle model или короче B -моделью) наряду с главным G -расслоением и его различными сечениями используются векторные G -расслоения, типичные слои которых являются пространствами неприводимых представлений группы (1) с индексацией прямого произведения. В обоих случаях *базой* служит некоторое многообразие B , вообще говоря, с неизвестной топологией [8]. В принципе B может быть многосвязным с различными физическими и даже размерными свойствами в различных компонентах связности и выполняет функции пространства-времени. Однако эти функции расширены за счет градуировки. Все фермионные G -расслоения скрученные в смысле диаграммы (7), о чем свидетельствует наличие спина у частиц. Это обстоятельство порождает *проблему*. Дело в том, что для произвольных G -расслоений и в математике, и в физике отсутствуют естественные (канонические) способы задания тривиализирующих отображений χ_A и, следовательно, функций перехода $g_{AA'}(b)$. Их задание составляет важное звено в аксиоматизации теории, что будет рассмотрено в разделе 7. Знание функций перехода необходимо для общековариантной формулировки теории, в частности ковариантного описания спина, корректного включения гравитации в теорию элементарных частиц и выполнения общего трансформационного анализа [8]. В решении указанной проблемы большую роль играет принцип соответствия, обеспечивающий предельный переход к стандартной модели Глэшоу–Вайнберга–Салама [15–17].

3. ЗАДАНИЕ ГРАДУИРОВАННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $1P$, БАЗЫ B И ИХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Пусть заданы линейное пространство $F_M = \mathbb{M}(n_M, AG)$ матриц размера $n_M \times n_M$ с элементами, возможно, из алгебры Грассмана AG и *тривиальное* расслоение

$$\zeta_M = (E_M = B \times F_M, \pi_M, B, F_M, \Phi_M, G = e) \quad (8)$$

с проекцией π_M на первый сомножитель прямого произведения, типичным слоем F_M и тождественной структурной группой G (т.е. состоящей из единичного элемента e). Матричные блоки и сечения расслоения с четными и нечетными элементами называются соответственно четными и нечетными. Будем использовать следующую индексацию: для аналогов пространства Минковского $i, j, k, l, \dots = 0, 1, 2, 3$ (строчные буквы из середины алфавита), для аналогов пространства спинорного представления $a, b, c, \dots = 1, 2, 3, 4$ (буквы из начала алфавита), для наборов индексов $M, N, \dots = (m, a, \emptyset)$ (прописные буквы из середины алфавита). Подъем и опускание индексов типа i, j осуществляется с помощью матрицы

$$\eta_v = \|\eta_{mn}\| = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \|\eta^{mn}\|. \quad (9)$$

Пусть $\gamma^m = \|(\gamma^m)_b^a\|$ – матрицы Дирака, где a – номер строки, b – номер столбца, $\Sigma^{mn} = \frac{1}{4}(\gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m)$ – генераторы спинорного представления группы Лоренца, $\gamma_5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Антисимметричная матрица $C = \|C_{ab}\|$ зарядового сопряжения инвариантна относительно спинорного преобразования. Поэтому C или $C^{-1} = \|C^{ab}\|$ удобно считать метрическим тензором в аналогах пространства спинорного представления. Это означает, что с помощью C^{-1} можно поднимать спинорные индексы, а с помощью C – опускать. Как обычно, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор, $\{\cdot, \cdot\}$ – антикоммутатор (любой из них в градуированной символике обозначается как $[\cdot, \cdot]$), по повторяющимся индексам всех сортов подразумевается суммирование.

ТЕОРЕМА 1. Если существуют такое целое число $n_{\mathbb{M}} > 0$ и такие 15 сечений

$$\sigma_{\mathcal{M}} \in \{\sigma_{\mathcal{M}}, J_{mn} = -J_{nm}\}, \quad \sigma_{\mathcal{M}} \in \{P_m, Q_a, R = R_{\emptyset}\} \quad (10)$$

расслоения (8), которые удовлетворяют коммутационным соотношениям [1–3]

$$\begin{aligned} [P_m, P_n] &= [Q_a, P_m] = [P_m, R] = [J_{mn}, R] = 0, \\ [P_m, J_{nl}] &= \eta_{mn} P_l - \eta_{ml} P_n, \\ [J_{mn}, J_{kl}] &= \eta_{ml} J_{nk} + \eta_{nk} J_{ml} - \eta_{mk} J_{nl} - \eta_{nl} J_{mk}, \\ \{Q_a, Q_b\} &= 2(\gamma_m C)_{ab} P^m, \\ [Q_a, J_{mn}] &= -(\Sigma_{mn})_a^b Q_b, \\ [Q_a, R] &= i(\gamma_5)_a^b Q_b, \end{aligned} \quad (11)$$

то $\sigma_{\mathcal{M}}$ образуют замкнутую градуированную (т.е. с существующей четностью) алгебру Ли 1р.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить градуированные тождества Якоби

$$[[\sigma_{\mathcal{M}}, \sigma_{\mathcal{N}}], \sigma_{\mathcal{L}}] + [[\sigma_{\mathcal{N}}, \sigma_{\mathcal{L}}], \sigma_{\mathcal{M}}] + [[\sigma_{\mathcal{L}}, \sigma_{\mathcal{M}}], \sigma_{\mathcal{N}}] = 0 \quad (12)$$

и убедиться, что они выполняются [1–3]. ■

В (11) Q_a – нечетные матрицы, остальные четные. Таким образом, сечения $\sigma_{\mathcal{M}}$ – генераторы градуированной группы Пуанкаре $1P$. Решение вопроса о существовании сечений $\sigma_{\mathcal{M}}$ отложим до раздела 5 (теорема 2). Можно показать [1, 2], что для четырех нечетных генераторов Q_a , образующих майоранов спинор со значениями компонент в $\mathbb{M}(n_{\mathbb{M}}, AG)$, группа $1P$ максимальна, т.е. она не допускает расширения. С другой стороны, $1P$ не может иметь меньше четырех ненулевых генераторов Q_a . Это важно с точки зрения существования и единственности теоретических построений в физике. Соотношения (11) обладают лоренцевой симметрией, если предположить, что R – скаляр, Q_a – спинор. Легко видеть, что эта симметрия продолжается до янг-миллсовой симметрии, когда преобразования Лоренца зависят от точек $b \in B$ базы расслоения (8). Поэтому в принципе нет необходимости требовать постоянства сечений (10), хотя над любой координатной окрестностью базы B эти сечения могут быть постоянными. Возможность же глобального постоянства сечений (10) зависит от топологии пространства B .

Группу $1P$ можно параметризовать либо с помощью формулы

$$g(\bar{a}, \bar{\omega}) = \exp \left(\bar{a}^m P_m + \bar{\varepsilon}^a Q_a + \bar{\rho} R + \frac{1}{2} \bar{\omega}^{mn} J_{mn} \right) \in 1P, \quad (13)$$

где $\bar{a} = (\bar{a}^m, \bar{\varepsilon}^a, \bar{\rho} = \bar{\rho}^\varnothing) = \{\bar{a}^M\}$, либо с помощью формулы

$$g(a, \omega) = \exp(a^m P_m + \varepsilon^a Q_a + \rho R) \exp\left(\frac{1}{2} \omega^{mn} J_{mn}\right) \in 1P, \quad (14)$$

либо как-то иначе. Разные параметризации отвечают разным системам координат в группе $1P$, рассматриваемой как многообразие. Из (11) видно, что генераторы σ_M образуют идеал $1t$ в $1p$, так что

$$1T = \{\exp(a^m P_m + \varepsilon^a Q_a + \rho R)\} \quad (15)$$

— нормальная (инвариантная) подгруппа в $1P$. Тогда подгруппу

$$L = \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} \omega^{mn} J_{mn}\right) \right\} \subset 1P, \quad (16)$$

являющуюся, вообще говоря, представлением группы Лоренца, можно рассматривать как фактор-группу $L = 1P/1T$ по модулю $1T$ при условии, что отношение эквивалентности $g_1 \sim g_2$ элементов $1P$ определено с помощью правых смежных классов (при другой параметризации значение имели бы левые смежные классы).

В идеале $1t = \{a^m P_m + \varepsilon^a Q_a + \rho R\} \subset 1p$ параметры a^m и ρ четны, ε^a нечетны. Тем не менее идеал $1t$, как и вся градуированная алгебра Ли $1p$, — множество четных матриц размера $n_{\mathbb{M}} \times n_{\mathbb{M}}$. Предполагается, что $\varepsilon^a Q_a$ — свертка майорановых спиноров.

Каждому элементу $g_{1t} \in 1t$ может быть сопоставлена точка $z = (a^m, \varepsilon^a, \rho = \rho^\varnothing)$ некоторого линейного 9-мерного пространства B_c . В качестве *аксиомы* примем утверждение, что B_c совпадает с подстилающим (координатным, — отсюда индекс c) пространством базы B в расслоении (8), необходимом для задания *тривиализирующих* отображений многообразия B в линейное пространство с целью введения систем координат. В эту аксиому включили также предположение о том, что B — физическая модель реально-го пространства-времени с некоторой топологией, а B_c — девятимерное градуированное пространство с метрикой

$$\eta = \|\eta_{MN}\| = \begin{pmatrix} \eta_v & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & \\ & C & \\ \dots\dots\dots & & \\ & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \|\eta^{MN}\| = \begin{pmatrix} \eta_v & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & \\ & C^{-1} & \\ \dots\dots\dots & & \\ & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

(незаполненные блоки нулевые, C — матрица зарядового сопряжения). Будем называть B *базовым* физическим пространством, B_c — *координатным* физическим пространством. Вопрос об их топологической эквивалентности остается открытым. Доказательство того, что (17) — метрика, см. в разделе 6.

Известно, что классическая группа Пуанкаре P действует одинаково и на инвариантной подгруппе $T = \{\exp(a^m P_m)\}$, и на пространстве Минковского M^4 . Мы покажем, что для градуированных групп $1P$, $1T$ и пространства B_c это свойство уже не выполняется.

4. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ 1P НА ИНВАРИАНТНОЙ ПОДГРУППЕ 1T

Выберем групповые координаты по схеме (14). Пусть

$$g(z) = \exp(z^N \sigma_N) \in 1T, \quad z = (z^N) = (x^m, \theta^a, r),$$

а элемент (14) близок к единичному, т.е. $a = (a^m, \varepsilon^a, \rho)$ и $\omega = (\omega^{mn})$ инфинитезимальны. Тогда, например, левое инфинитезимальное действие группы 1P на подгруппе 1T определяется формулой

$$\begin{aligned} g(a, \omega)g(z) &= \exp(a^M \sigma_M) \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}\right) \exp(z^N \sigma_N) = \\ &= \exp(z'^N \sigma_N) \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $z' = z + \xi$, причем $\xi^M(a^m, \varepsilon^a, \rho, \omega^{mn})$ — некоторый сдвиг координат в пространстве параметров подгруппы 1T. Перепишем (18) в виде

$$e^X e^{\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}} e^{z^N \sigma_N} e^{-\frac{1}{2}\omega^{kl} J_{kl}} = e^{z'^N \sigma_N}, \quad (19)$$

где $X = a^M \sigma_M$, и воспользуемся общей формулой

$$e^{aA} B e^{-aA} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} (\text{ad } A)^s B, \quad (20)$$

$(\text{ad } A)B \equiv [A, B]$. Тогда в линейном приближении по ω^{mn} находим

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}} e^{z^N \sigma_N} e^{-\frac{1}{2}\omega^{kl} J_{kl}} &= \\ &= \exp\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}} z^N \sigma_N e^{-\frac{1}{2}\omega^{kl} J_{kl}}\right) \simeq \\ &\simeq \exp\left(z^N \sigma_N + \left[\frac{1}{2}\omega^{mn} J_{mn}, z^N \sigma_N\right]\right) = e^Y, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$Y = (x^m + \omega^{mn} x_n) P_m + \theta^a \left(1 + \frac{1}{2}\omega^{mn} \Sigma_{mn}\right)_a^b Q_b + r R. \quad (22)$$

После подстановки (21) в (19) применим формулу общего вида

$$e^X e^Y = \exp\left[Y + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s!} (\text{ad } Y)^s X + \dots\right] \quad (23)$$

(см. [18, с. 131]), где X считается малой матрицей, B_s — числа Бернулли. Напомним, что $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $\dots$. С помощью градуированных коммутаций (11) находим

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s!} (\text{ad } Y)^s X = (a^m + a_1^m) P_m + (\varepsilon^a + \varepsilon_1^a) Q_a + \rho R. \quad (24)$$

Здесь введены вспомогательные функциональные (зависящие от θ^a и r) параметры

$$\begin{aligned} a_1^m &= \left[B_1 \varepsilon + (\rho \theta - \varepsilon r) i \gamma_5 \sum_{s=2}^{\infty} \frac{B_s}{s!} (-ir \gamma_5)^{s-2} \right]^a (2\theta \gamma^m C)_a, \\ \varepsilon_1^a &= \left[(\rho \theta - \varepsilon r) i \gamma_5 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{s!} (-ir \gamma_5)^{s-1} \right]^a. \end{aligned} \quad (25)$$

Всюду, где не указано явно, свертка по спинорным индексам выполняется в “северо-западном” направлении [1, приложение А]. Например,

$$[(\rho \theta - \varepsilon r) i \gamma_5]^a (\theta \gamma^m C)_a = (\rho \theta^b - \varepsilon^b r) i (\gamma_5)_b^a \theta^c (\gamma^m)_c^d C_{da}. \quad (26)$$

В итоге соотношение (19) принимает вид

$$\exp(Y + \text{правая часть (24)}) = \exp(z'^N \sigma_N).$$

Отсюда получаем следующие формулы инфинитезимальных преобразований групповых градуированных координат:

$$\begin{aligned} x'^m &= x^m + \omega^{mn} x_n + a^m + a_1^m, \\ \theta'^a &= \theta^a + \frac{1}{2} \omega^{mn} (\theta \Sigma_{mn})^a + \varepsilon^a + \varepsilon_1^a, \\ r' &= r + \rho. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае параметризации (13) исходя из формулы

$$\begin{aligned} g(\bar{a}, \bar{\omega}) g(z) &= \exp \left(\bar{a}^M \sigma_M + \frac{1}{2} \bar{\omega}^{mn} J_{mn} \right) \exp(z^N \sigma_N) = \\ &= \exp \left(z'^N \sigma_N + \frac{1}{2} \bar{\omega}'^{mn} J_{mn} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

аналогичным путем находим преобразование

$$\begin{aligned} x'^m &= x^m + \frac{1}{2} \bar{\omega}^{mn} x_n + \bar{a}^m + \bar{a}_1^m + \bar{a}_2^m, \\ \theta'^a &= \theta^a + \varepsilon^a + \bar{\varepsilon}_1^a + \bar{\varepsilon}_2^a, \\ r' &= r + \bar{\rho}, \quad \bar{\omega}'^{mn} = \bar{\omega}^{mn}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь введены вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \bar{a}_2^m &= -\frac{1}{2} \bar{\omega}^{kl} (\theta \Sigma_{kl})^a (\theta \gamma^m C)_a, \\ \bar{\varepsilon}_2^a &= -\frac{1}{2} \bar{\omega}^{kl} \left[\theta \Sigma_{kl} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{s!} (-ir \gamma_5)^{s-1} \right]^a, \end{aligned} \quad (30)$$

а функции $\bar{a}_1^m$ и $\bar{\varepsilon}_1^a$ имеют вид (25) с заменой $(a^M) \rightarrow (\bar{a}^M) = (\bar{a}^m, \bar{\varepsilon}^a, \bar{\rho})$. Если отождествить z^N и z'^N в (27) соответственно с z^N и z'^N в (29), то нетрудно получить преобразования $a^M \rightarrow \bar{a}^M$, $\omega^{mn} \rightarrow \bar{\omega}^{mn}$ групповых координат при переходе от параметризации (14) к параметризации (13). В частности, $\omega^{mn} = \frac{1}{2}\bar{\omega}^{mn}$, $\rho = \bar{\rho}$. Для остальных параметров формулы сложны.

В обоих случаях действия группы $1P$ на подгруппе $1T$ нелинейны по θ и r и потому неудобны для теоретических исследований. Кроме того, генераторы этих действий, вычисленные по стандартной схеме дифференцирования в нуле матрицы преобразования по параметрам (ср. (32)–(34) ниже), не удовлетворяют соотношениям (11) и, следовательно, не реализуют линейного представления алгебры Ли $1p$. Более того, они вообще перестают быть постоянными (на что хотелось бы рассчитывать), т.к. при вычислении их зависимость от θ и r неустранима.

Все эти наблюдения говорят о том, что преобразования (27) или (29) (и, очевидно, любые другие с различным выбором групповых координат) не могут служить основой для построения фундаментального представления градуированной группы $1P$, генераторы которого имели бы коммутационные свойства (11). Насколько нам известно, в литературе эту ситуацию, отличную от классической, никогда не принимают во внимание.

5. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ $1P$ НА КООРДИНАТНОМ ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Результаты предыдущего раздела свидетельствуют о том, что фундаментальное представление группы $1P$ следует находить эвристически. Извлекая некоторую пользу из формул (27), будем искать инфинитезимальное действие группы $1P$ на B_c в виде

$$\begin{aligned} x'^m &= x^m + \omega^{mn}x_n + a^m + k_1\varepsilon^a(\theta\gamma^m C)_a, \\ \theta'^a &= \theta^a + \frac{1}{2}k_2\omega^{mn}(\theta\Sigma_{mn})^a + k_3\varepsilon^a + \\ &\quad + [(k_4\rho\theta + k_5\varepsilon r)i\gamma_5]^a, \\ r' &= r + \rho. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь символика имеет прежнюю классификацию, но $z = (x^m, \theta^a, r)$ относится не к пространству параметров группы $1T$, а к координатному пространству B_c , $z \in B_c$ (хотя это отличие несколько условно: оно сводится лишь к отличию преобразований). Числовые коэффициенты k_i , $i = \overline{1, 5}$, найдем из требования, чтобы генераторы преобразования (31) удовлетворяли соотношениям (11). Для этого записываем (31) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \\ r' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \vdots & B & \vdots & \vdots & (a^m) \\ \dots & & & & & \\ & \vdots & \Gamma & \vdots & \Delta & (k_3\varepsilon^a) \\ \dots & & & & & \\ & \vdots & & \vdots & 1 & \vdots \\ \dots & & & & & \rho \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ r \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32a)$$

Здесь все незаполненные блоки нулевые. (4×4) -матрицы A , B , Γ и (4×1) -столбец Δ имеют вид

$$\begin{cases} A = \text{diag}(1, 1, 1, 1) + \|\omega^{mn}\|, \\ B = \|B_a^m\| = \|k_1 \varepsilon^b (\gamma^m)_a^c C_{cb}\|, \\ \Gamma = \|\Gamma_b^a\| = \left\| \delta_b^a + \frac{1}{2} k_2 \omega^{mn} (\Sigma_{mn})_b^a + k_4 \rho (i\gamma_5)_b^a \right\|, \\ \Delta = (\Delta^a) = (k_5 \varepsilon^b (i\gamma_5)_b^a); \end{cases} \quad (33)$$

(4×1) -столбцы (a^m) и $(k_3 \varepsilon^a)$ тривиальны. Вычисляя в групповой единице $e \in 1P$ частные производные (10×10) -матрицы из (32) по групповым параметрам ω^{mn} , a^m , ε^a и ρ , получаем следующие 10×10 -генераторы преобразования (31):

$$\begin{aligned} J_{mn} &= \begin{pmatrix} J_{mn}^{(P)} & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & & \\ & \vdots & k_2 \Sigma_{mn} & \vdots & \vdots \\ \dots & & & & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & & \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \\ P_m &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & (\delta_m^n) \\ \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}, \\ Q_a &= \begin{pmatrix} \vdots & \|k_1 (\gamma^m C)_{ab}\| & \vdots & & \vdots \\ \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & (k_5 (i\gamma_5)_a^b) & \vdots & (k_3 \delta_a^b) \\ \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \\ R &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots & & & \\ \vdots & \|k_4 (i\gamma_5)_b^a\| & \vdots & \vdots \\ \dots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ \dots & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

$$Q'_b = \begin{pmatrix} \vdots & \parallel -k_1 k_4 (\gamma^m C)_{bd} \parallel & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & (-k_4 k_5 (i\gamma_5)^d_b) & \vdots & ((k_5 - k_3 k_4) \delta^d_b) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}.$$
$$(\gamma^m C)_{ab}(i\gamma_5)_d^b = -(\gamma^m C)_{db}(i\gamma_5)_a^b = -(\gamma^m C)_{bd}(i\gamma_5)_a^b. \quad (35)$$
[illegible]
$$[Q_a, J_{mn}] = \begin{pmatrix} \vdots & \|(Q''_{mna})^l_b\| & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \left(-k_3 (\Sigma_{mn})^b_a\right) \\ \dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$
$$\|(Q''_{mna})^l_b\| = \|k_1(\gamma^l C)_{ac}(\Sigma_{mn})^c_b\| - k_1\|J^{(P)}_{mn}\| \cdot \|(\gamma^l C)_{ab}\|.$$
$$\|(Q''_{mna})^l_b\| = -(\Sigma_{mn})^d_a \|k_1(\gamma^l C)_{db}\|, \quad (36)$$

где $\|\dots\|$ – матрицы относительно индексов $l = \overline{0,3}$ и $b = \overline{1,4}$. Тогда получим $[Q_a, J_{mn}] = -(\Sigma_{mn})_a^b Q_b$.

Условие (36) может быть записано в виде

$$(\Sigma_{mn}\gamma^l C)_{ab} + (\Sigma_{mn}\gamma^l C)_{ba} = \left(J_{mn}^{(P)}\right)_p^l (\gamma^p C)_{ab}. \quad (37)$$

ЛЕММА 1. Матрица $\Sigma_{mn}\gamma^l C$ относительно спинорных индексов антисимметрична для $l \neq m, n$ ($m \neq n$; вариант $m = n$ тривиален), симметрична при $l = m$ или $l = n$ и, кроме того, для всех $m, n, l = \overline{0,3}$ выполняется (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из известных соотношений

$$(J_{mn}^{(P)})_p^l = \eta_{mp}\delta_n^l - \eta_{np}\delta_m^l, \quad (38)$$

$$2\Sigma^{mn}\gamma^l = \varepsilon^{mnlk*}\gamma_k - \eta^{ml}\gamma^n + \eta^{nl}\gamma^m \quad (39)$$

(см., например, [1] и [19], соответственно), где $\varepsilon^{\dots}$ – символ Леви-Чивиты, $\gamma_k^* = \frac{1}{3!}\varepsilon_{kqrs}\gamma^q\gamma^r\gamma^s$. Рассмотрим два случая:

1) $l \neq m, n$, тогда (38) обращается в нуль, но

$$2\Sigma^{mn}\gamma^l C = \varepsilon^{mnlk*}\gamma_k^* C, \quad (40)$$

т.к. матрицы $\gamma_k^* C$ антисимметричны [19], то в рассматриваемом случае больше нечего доказывать;

2) пусть $l = m$ (случай $l = n$ аналогичен), при $m \neq n$ из (39) имеем $2\Sigma_{mn}\gamma^l C = -\gamma_n C$, эти матрицы симметричны [19], чем молчаливо мы неоднократно пользовались, тогда (37) принимает вид тождества $-\gamma_n C = -\gamma_n C$. ■

Итак, может быть сформулирована следующая

ТЕОРЕМА 2. Фундаментальное представление группы $1P$ с генераторами, удовлетворяющими соотношениям (11), существует тогда и только тогда, когда инфинитезимальное действие ее на координатном градуированном физическом пространстве B_c может быть задано формулами

$$\begin{aligned} x'^m &= x^m + \omega^{mn}x_n + a^m + k\varepsilon^a(\theta\gamma^m C)_a, \\ \theta'^a &= \theta^a + \frac{1}{2}\omega^{mn}(\theta\Sigma_{mn})^a + \frac{1}{k}\varepsilon^a - \rho(\theta i\gamma_5)^a, \\ r' &= r + \rho, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (41)$$

(10 × 10)-генераторами этого однопараметрического семейства действий явля-

ются следующие: P_m остается без изменений (см. (34)),

$$J_{mn} = \begin{pmatrix} J_{mn}^{(P)} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \Sigma_{mn} & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (42a)$$

$$Q_a = \begin{pmatrix} \vdots & \|k(\gamma^m C)_{ab}\| & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & (\frac{1}{k}\delta_a^b) \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \quad (42б)$$

$$R = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots\dots\dots & & \\ & -i\gamma_5 & \vdots \\ \dots\dots\dots & & \\ & \vdots & \vdots & 1 \\ \dots\dots\dots & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \blacksquare \quad (42в)$$

Интегральный вариант преобразования (41) имеет вид

$$\begin{pmatrix} z' \\ 1 \end{pmatrix} = \exp \left\{ a^m P_m + \frac{1}{2} \omega^{mn} J_{mn} + \varepsilon^a Q_a + \rho R \right\} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

с генераторами (42).

6. ОРТОЛИНЕЙНЫЙ КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СИСТЕМ КООРДИНАТ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА B

Покажем, что введенная ad hoc матрица (17) остается форминвариантной при преобразованиях (41), что оправдывает ее название *метрики*. Координаты, в которых метрика имеет вид (17), будем называть *ортолинейными* (аналоги *галилеевых* или *лоренцевых* в специальной теории относительности). Ортолинейные системы координат образуют класс эквивалентности. Любой другой класс получается из ортолинейного применением некоторого “криволинейного” (общего) преобразования координат. В пределах каждого класса метрика остается форминвариантной. Естественно, в разных классах метрики разные по функциональному виду, но они связаны друг с другом процедурой тензорного преобразования. Объем информации, содержащейся в градуированной группе Пуанкаре $1P$, равносильен объему информации, содержащейся в геометрии

базы B с метрикой (17) в ортолинейных координатах (ср. с эрлангенской программой Клейна).

Обозначим через $\bar{J}_{mn}$, $\bar{P}_m = 0$, $\bar{Q}_a$, $\bar{R}$ генераторы (42) после отбрасывания в них десятой строки и десятого столбца. Тогда, продифференцировав (43) по z , получим

$$dz' = \exp \left(\frac{1}{2} \omega^{mn} \bar{J}_{mn} + \varepsilon^a \bar{Q}_a + \rho \bar{R} \right) dz. \quad (44)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скалярная (инвариантная) величина

$$(ds)^2 = (dz)^{\text{gt}} \eta dz = dz^M \eta_{MN} dz^N \quad (45)$$

с метрикой (17) называется квадратом девятимерного градуированного интервала (или просто интервалом) пространства B_c в ортолинейных координатах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Преобразование координат $\varphi_{A'} \circ \varphi_A^{-1}: \varphi_A U_A \rightarrow \varphi_{A'} U_{A'}$, где $\varphi_A: U_A \rightarrow B_c$, $U_A \subset B$, $A \in \mathcal{A}$, — координатные диффеоморфизмы базового физического пространства B , оставляющее метрику в любом классе форминвариантной, называется движением B_c .

ТЕОРЕМА 3. Если градуированное транспонирование определить формулой (4), то преобразование (41) является движением B_c . При $\rho = 0$ утверждение справедливо безусловно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем относительно подробно в силу нестандартности приемов и нетривиальности учета знаков. Начинаем просто: нужно убедиться в выполнении импликации $(ds)^2 = (ds')^2 \Rightarrow \eta_{MN} = \eta'_{MN}$ при условии (44). Штрих относится к преобразованным координатам. Имеем

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dz')^{\text{gt}} \exp \left(-\frac{1}{2} \omega^{mn} \bar{J}_{mn}^{\text{gt}} + \bar{Q}_a^{\text{gt}} \varepsilon^a - \rho \bar{R}^{\text{gt}} \right) \eta \times \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \omega^{mn} \bar{J}_{mn} - \varepsilon^a \bar{Q}_a - \rho \bar{R} \right) dz' = (ds')^2. \end{aligned} \quad (46)$$

В случае инфинитезимальных параметров преобразования это соотношение можно представить в виде

$$(ds)^2 = (dz')^{\text{gt}} \eta dz' + \Delta(ds)^2 = (ds')^2, \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(ds)^2 &= -(dz')^{\text{gt}} \left(\frac{1}{2} \omega^{mn} \bar{J}_{mn}^{\text{gt}} + \varepsilon^a \bar{Q}_a^{\text{gt}} + \rho \bar{R}^{\text{gt}} \right) \eta dz' - \\ &- (dz')^{\text{gt}} \eta \left(\frac{1}{2} \omega^{mn} \bar{J}_{mn} + \varepsilon^a \bar{Q}_a + \rho \bar{R} \right) dz'. \end{aligned} \quad (48)$$

По определению $(dz')^{\text{gt}} = (dz')^t$, где индекс t означает обычное транспонирование, при котором столбец превращается в строку и наоборот.

Покажем, что в условиях теоремы $\Delta(ds)^2 = 0$. Тогда из (47) будет следовать доказываемое равенство $\eta = \eta'$.

Согласно (17) и (42а) в градуированной матрице $\overline{J}_{mn}^{\text{gt}}\eta + \eta\overline{J}_{mn}$ векторный и спинорный диагональные блоки имеют вид соответственно

$$(J_{mn}^{(P)})^t \eta_v + \eta_v J_{mn}^{(P)} \quad \text{и} \quad \Sigma_{mn}^{\text{gt}} C + C \Sigma_{mn}. \quad (49)$$

По формуле (38) первый блок обращается в нуль. Второй блок – симметричная в обычном смысле матрица относительно спинорных индексов:

$$-\Sigma_{mn}^t C + C \Sigma_{mn} = (C \Sigma_{mn})^t + C \Sigma_{mn} = 2C \Sigma_{mn} \quad (50)$$

(знак минус возник за счет формулы (4) для матрицы $M \rightarrow \overline{J}_{mn}$). Поэтому двусторонняя свертка $dz'^a (2C \Sigma_{mn})_{ab} dz'^b$ его с антикоммутирующими дифференциалами dz'^a и dz'^b исчезает. В итоге члены с ω^{mn} в (48) не дают вклада.

Далее, часть

$$\begin{aligned} & - (dz')^{\text{gt}} (\varepsilon^a \overline{Q}_a^{\text{gt}} \eta + \varepsilon^a \eta \overline{Q}_a) dz' = \\ & = \varepsilon^a [dz'^b k(\gamma^m C)_{ab} \eta_{mn} dz'^n - dz'_m k(\gamma^m C)_{ab} dz'^b] \end{aligned} \quad (51)$$

величины (48) также исчезает, т.к. ε^a и dz'^b антикоммутируют при всех $a, b = \overline{1, 4}$. Наконец,

$$\overline{R}^{\text{gt}} \eta + \eta R = i\gamma_5^t C - iC\gamma_5 = -i(C\gamma_5)^t - iC\gamma_5 = 0 \quad (52)$$

в силу антисимметричности $C\gamma_5$ (после первого знака равенства в (52) речь идет о спинорном диагональном блоке (9×9) -матрицы, в которой остальные блоки тождественно нулевые). Следовательно, (48) исчезает тождественно.

При всяком ином определении градуированного транспонирования [13, 14] таким, что спинорный диагональный блок матрицы транспонируется обычным образом, мы получили бы $\Sigma_{mn}^t C + C \Sigma_{mn} = 0$ (по существу, это не дает ничего нового в смысле вывода о том, что члены с ω^{mn} в (48) не дают вклада), а вместо (52) – выражение

$$-i\gamma_5^t C - iC\gamma_5 = -2iC\gamma_5 \neq 0$$

(точнее, отличен от нуля лишь спинорный диагональный блок $(-2iC\gamma_5)$ в (9×9) -матрице). Антисимметричность матрицы $C\gamma_5$ означает, что вклад членов с генератором $\overline{R}$ в (48) исчезает лишь при $\rho = 0$. Что касается (51), то возможные изменения знаков при транспонировании $\overline{Q}_a$ и dz' обычно не изменяют результата. ■

В смысле определения (4) метрика (17) симметрична: $\eta = \eta^{\text{gt}}$.

7. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СКРУЧЕННОСТИ G -РАССЛОЕНИЙ

Всевозможные локальные системы координат $\varphi_A: U_A \rightarrow B$, $A \in \mathcal{A}$, базового физического пространства B , $U_A \subset B$, в которых сохраняется четность измерений, объединим в класс C_{arb}^{ev} . Это означает, что в нем первые четыре измерения остаются 4-векторными (в классическом смысле), значит, четными, следующие четыре – спинорными (нечетными), последнее измерение – скалярным (четным). В качестве индексов будем использовать либо латинские буквы, либо их греческие аналоги в зависимости

от того, по представлению какой янг-миллсовой группы $-L_{Y-M}$ или $GL_{Y-M}(B)$ — преобразуется индексируемая величина. Так, в сечении

$$\sigma_{1P}(b) = \exp \left[a^m(b)P_m + \frac{1}{2}\omega^{mn}(b)J_{mn} + \varepsilon^a(b)Q_a + \rho(b)R \right] \in 1P_{Y-M} \quad (53)$$

главного $1P$ -расслоения над базой B функции $a^m(b)$ и т.д. имеют латинскую индексацию $(m, mn, a, \emptyset)$. С другой стороны, координаты (образа)

$$z(b) = z = (z^\Pi) = (x^\mu, \theta^\alpha, r = z^\emptyset) \in B_c, \quad \Pi = (\mu, \alpha, \emptyset), \quad (54)$$

точки $b \in B$ в произвольной локальной системе координат $\varphi_A \in C_{arb}^{\text{ev}}$ индексируются греческими буквами (для x — из середины алфавита, $\mu = \overline{0, 3}$; для θ — из начала алфавита, $\alpha = \overline{1, 4}$). Это согласуется с тем, что касательные векторы к базе B преобразуются по 9-векторному (в градуированном смысле) представлению группы $GL(B)$.

Для перехода от греческой к латинской индексации и наоборот нужен некоторый *битаензор* $E_\Pi^M(z)$, который мы назовем *трансформационной связью* (в английской литературе он носит название vielbein), и обратный к нему $E_M^{-1\Pi}(z)$ (символ обращения (-1) часто опускают). Оба преобразуются взаимно контраградиентно по векторному и ко-векторному представлениям градуированной группы $L_{Y-M} \times GL_{Y-M}(B)$ с индексацией прямого произведения. В теории дифференциальной связности ∇ применительно к гравитации существует особая — метрическая — процедура выбора $E_\Pi^M(z)$, которая определяет функции связи, начальные, но важные, сведения о которых даны в [8]. Детали полнее обсудим в следующей статье.

Пусть $z_{(L)}^M(b)$ и $z^{(\Pi)}(b)$ — *ортолинейные* и *криволинейные* координаты одной и той же точки $b \in B$ и

$$z'^\Pi(b) = z^\Pi(b) + \xi^\Pi(z), \quad (55)$$

где $\xi^\Pi(z) = \xi_{(L)}^M(z)E_\Pi^M(z)$ — произвольное инфинитезимальное преобразование координат из класса C_{arb}^{ev} . Величину $\xi_{(L)}^M(z)$ будем называть *полноприводимым* инфинитезимальным векторным полем: его *компоненты* $(\xi_{(L)}^m, \xi_{(L)}^a, \xi_{(L)}^\emptyset = \rho(z))$ в ортолинейных координатах преобразуются по 4-векторному, спинорному и скалярному представлениям группы L_{Y-M} . Весьма широкий подкласс $\overline{C}_{arb}^{\text{ev}}$ преобразований (55) может быть образован действием различных сечений (53) на точки $z_{(L)}^M(b)$ по схеме (43):

$$\begin{pmatrix} z_{(L)}(b) + \xi_{(L)}(b) \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma_{1P}(b) \begin{pmatrix} z_{(L)}(b) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимальный полноприводимый вектор имеет компоненты

$$\begin{pmatrix} \xi_{(L)}^m(z) \\ \xi_{(L)}^a(z) \\ \xi_{(L)}^\emptyset(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{mn}(z)x_{(L)n} + a^m(z) + k\varepsilon^a(z)(\theta_{(L)}\gamma^m C)_a \\ \frac{1}{2}\omega^{mn}(z)(\theta_{(L)}\Sigma_{mn})^a + \frac{1}{k}\varepsilon^a(z) - \rho(z)(\theta_{(L)}i\gamma_5)^a \\ \rho(z) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

По-прежнему $k \in \mathbb{R}$. Для того чтобы числа независимых параметрических функций в левом и правом столбцах (56) совпадали и равнялись девяти, на функции $\omega^{mn}(z)$ необходимо наложить какое-то ограничение. Легко видеть, что априорное ограничение

$$\omega^{mn}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^\Pi}{\partial z_\Lambda} - (-1)^{\Lambda\Pi} \frac{\partial \xi^\Lambda}{\partial z_\Pi} \right) E_\Pi^m(z) E_\Lambda^n(z) \quad (57)$$

обладает следующими естественными (ожидаемыми) свойствами: а) в частном случае однородных параметров преобразований в отсутствие гравитации оно согласуется с формулами (41); б) выражение (57) является тензорным в общековариантном смысле (аналог $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ в электродинамике). Знак четности $(-1^{\Lambda\Pi})$ определяется, как в равенстве (3).

Для задания функций перехода, реализующих решение проблемы скрученности (см. раздел 2), сосредоточим внимание на отдельных прямых сомножителях группы (1). В том, что касается группы $GL(B)$, будем придерживаться концепций обычной дифференциальной геометрии или теории касательных расслоений. Используя греческую индексацию согласно (55), функции перехода с градуированными значениями в $GL_{Y-M}(B)$ зададим формулой

$$g_{AA'}(z)|_{GL(B)} = g_{GL(B)}(z) = \left(\frac{\partial z'^\Pi}{\partial z^\Lambda} \right) = \left(\delta \frac{\Pi}{\Lambda} + \frac{\partial \xi^\Pi}{\partial z^\Lambda} \right) \in GL_{Y-M}(B) \Big|_{U_A \cap U_{A'}}. \quad (58)$$

Для лоренцевых функций перехода $g_{AA'}(z)|_L$, соответствующих общим преобразованиям (55) с носителями $U_A \cap U_{A'}$ ($U_A, U_{A'} \subset B$; $A, A' \in \mathcal{A}$), можем написать очевидную полноприводимую формулу

$$g_{AA'}(z)|_L = g_L(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \omega^{mn}(z) J_{mn} \right\} \in D_{\text{vector}}(L) \oplus D_{\text{spin}}(L) \quad (59)$$

или, если имеем дело только со спинорным неприводимым представлением, формулу

$$g_{AA'}(z)|_L = D_{\text{spin}}(g_L(z)) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \omega^{mn}(z) \Sigma_{mn} \right\} \in D_{\text{spin}}. \quad (60)$$

В (59) и (60) функции $\omega^{mn}(z)$ задаются аксиоматически формулой (57).

Наконец, функции перехода, соответствующие прямой подгруппе G_{int} внутренних симметрий элементарных частиц, принимаются тождественными:

$$g_{AA'}(z)|_{G_{\text{int}}} = e \in G_{\text{int } Y-M}, \quad e = e^2. \quad (61)$$

Вызвано это тем, что не видно никаких доводов в пользу их иного определения. В то же время последняя аксиома не противоречит экспериментальным фактам в физике элементарных частиц. Это следует понимать в том смысле, что, как покажем в дальнейших публикациях, развиваемый геометрический формализм (B -модель) удовлетворяет принципу соответствия, согласно которому B -модель при разрушении градуировки и в отсутствие гравитации переходит в стандартную модель Глэшоу–Вайнберга–Салама [15–17].

8. ГРАДУИРОВАННЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Градуированным полем $\psi(z)$, описывающим физическое состояние элементарных частиц, называется сечение такого градуированного расслоения ζ со

структурной группой (1), в каждом слое которого действует группа (1) согласно формуле

$$\begin{aligned}\psi'(z') &= D_{GL(B)} \times D_L \times D_{\text{int}}(g(z))\psi(z) = \\ &= D(g(z))\psi(z) = U(g_{GL(B)} \times g_L \times g_{\text{int}})(z)\psi(z'),\end{aligned}\quad (62)$$

здесь $g(z) \in G_{Y-M}|_{U_A}$, $U_A \subset B$. Прямые сомножители $g(z)$ – также янг-миллсовы элементы. Элемент $g_L(z) \in L_{Y-M}$ либо индуцируется преобразованием (55) по формуле (57), либо берется произвольным. В трансформационном анализе первый вариант используется для вычисления величин типа момента импульса и получения соответствующих тождеств и законов сохранения, второй – для учета калибровочной симметрии интеграла действия и получения аналогичных тождеств (ср. с результатами статьи [8]). Неприводимые представления D_i , $i = GL(B)$, L , int , подгрупп i требуют подходящих индексаций, которые мы не указываем, но подразумеваем. Оператор $U(g(z)) = U(g)(z)$ преобразования поля ψ вводится для удобства.

Запишем преобразование координат (55) условно в виде $z' = g_\xi z$, $g_\xi \in C_{arb}^{\text{ev}}|_{U_A \cap U_{A'}}$. Тогда (62) можно переписать в виде

$$\psi'(z) = D(g)\psi(g_\xi^{-1}z) = U(g)\psi(z), \quad (63)$$

$g = g(g_\xi^{-1}z) \in G_{Y-M}$. Согласно (57)–(59) девять независимых параметров $\xi^\Pi(z)$ преобразования (55) “вторгаются” в систему параметризации групп $GL_{Y-M}(B)$ и L_{Y-M} , которые, таким образом, оказываются в известном смысле взаимосвязанными (впрочем, см. вышеприведенное замечание относительно элементов $g_L(z)$). Однако в своих представлениях эти группы действуют, конечно, независимо.

Пусть θ^α – спинорные (антикоммутирующие) переменные в наборе $z = (z^\Pi) = (x^\mu, \theta^\alpha, z^\varnothing = r)$ аргументов градуированного поля $\psi(z)$. Тогда оно может быть разложено по θ в ряд Тейлора

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{n!} \psi_n(z), \quad (64)$$

который обрывается автоматически на пятом члене. Здесь $\psi_0(z) = \psi^{(0)}(x, r)$, $\psi_1(z) = \psi_\alpha^{(1)}(x, r)\theta^\alpha$ и т.д., вообще

$$\psi_n(z) = \psi_{\alpha_n \dots \alpha_1}^{(n)}(x, r)\theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_n}, \quad n = \overline{0, 4}. \quad (65)$$

В динамической теории каждый член разложения (64) описывает соответствующее поколение (семейство) элементарных частиц. Таким образом, существует не более пяти поколений, описываемых унифицированно в рамках единой функции $\psi(z)$. В настоящее время экспериментально известно существование трех поколений элементарных частиц. Заметим, что из пяти наборов коэффициентов функций $\psi_{\alpha_n \dots \alpha_1}^{(n)}(x, r)$ три набора играют роль фермионных источников калибровочных полей, а два набора – бозонных (при условии, что полное поле (64) фермионное). Это различие еще предстоит исследовать теоретически. Потенциально здесь возможно действие некоторого правила запрета, в силу которого наблюдаемы не пять поколений, а только три.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы убедились, что генераторы действия градуированной группы Пуанкаре $1P$ на своей инвариантной подгруппе $1T$ не удовлетворяют исходным коммутационным соотношениям (11). Следовательно, в отличие от классического варианта, это действие не является представлением группы. Эвристический поиск адекватных инфинитезимальных преобразований ортолинейных координат в физическом пространстве B_c увенчался формулами (41) и (42). Оказалось, что они порождают однопараметрическое семейство генераторов, совместимых с соотношениями (11). Роль свободного параметра $k \in \mathbb{R}$ этого семейства еще не выяснена.

Обшекоординатные преобразования (55) влекут за собой конструирование янг-миллсовой группы $GL_{Y-M}(B)$ (58), действующей в расслоениях касательных тензоров над девятимерным базовым градуированным физическим пространством B с подстилающим линейным координатным пространством B_c . Эти же преобразования по формуле (57) задают параметры $\omega^{mn}(z)$ функций перехода (59) или (60) со значениями в группе L_{Y-M} или в спинорном представлении янг-миллсовой группы Лоренца. Действием “посредников” $GL_{Y-M}(B)$ и L_{Y-M} в гильбертовом пространстве H физических состояний $\psi(z)$ (см. раздел 8) *ограничивается* действие в H преобразования (55). В связи с этим необходимо сделать следующее предостережение.

В теории суперсимметрии (например, [1–6]) практикуют *подмену* группы C_{arb}^{ev} общих преобразований координат и группы (1) с действием (62) группой физических операторов (токов и зарядов), действующих в H в соответствии со структурой супергруппы Пуанкаре $1P$. Так возникает *киральное* неприводимое представление группы $1P$, которое играет основную роль в теории суперсимметрии. На наш взгляд, такая подмена недопустима. Действительно, все физические операторы из класса токов и зарядов по своей природе являются *вторичными* по отношению к группам (1) и C_{arb}^{ev} . Это следует из того, что если задан интеграл действия A , выраженный через градуированные поля $\psi(z)$, то по схеме (62) можно выполнить трансформационный анализ в духе статьи [8] и только *после этого* получить сохраняющиеся величины – токи и заряды. Нельзя следствие класть в основу теории. Феноменологический подход к теории суперсимметрии, допускающий указанную подмену, в этом смысле не оправдан. Заметим, что поля $\psi(z)$ вообще не реализуют никакого представления группы $1P$. В теории же суперсимметрии именно эти представления принимаются во внимание, что приводит к трудностям в конструировании интеграла действия и большим проблемам относительно выполнения принципа соответствия (см. [1–6]).

Важным геометрическим результатом является доказательство того, что градуированная матрица (17) выполняет роль метрического тензора над базовым физическим пространством B в ортолинейных координатах. В первую очередь этот результат необходим при корректном конструировании интеграла действия для элементарных частиц и гравитации. Следует, однако, подчеркнуть, что такое конструирование должно быть осуществлено с привлечением новых нетривиальных математических приемов, о чем речь пойдет в следующей статье.

Легко понять, что аксиомы в разделе 7 обеспечивают ковариантное описание спина. Если их использовать в полном трансформационном анализе, то получаются не только

ожидаемые [8]¹⁾ законы сохранения (за счет функций $\xi^\mu(z)$), но и новые (за счет функций $\xi^\alpha(z)$ и $\xi^\varnothing(z)$). На этом пути можно получить глубокие физические результаты. Ясно, что последнее — предмет отдельных работ.

Список литературы

- [1] П. Уэст. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
- [2] Ю. Весс, Дж. Беггер. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
- [3] M. F. Sohnius. Introducing Supersymmetry // Phys. Rep. (Review Section of Physics Letters). Amsterdam: North-Holland, 1985. V. 128. № 2, 3. P. 39–204.
- [4] D. Z. Freedman. Introduction to Supersymmetry in Particle and Nuclear Physics. New York: Plenum Press, 1984. P. 1–28.
- [5] M. Müller. Consistent Classical Supergravity Theories. Lecture Notes in Physics (№ 336). Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [6] B. de Witt, D. Z. Freedman. Supersymmetry. New York: Plenum Press, 1985. P. 135–210.
- [7] R. Haag, J. Lopuszanski, M. Sohnius // Nucl. Phys. 1967. V. B88. P. 257.
- [8] В. Т. Березин // ТМФ. 1992. Т. 93. № 1. С. 154–174.
- [9] К. Гудбийон. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
- [10] Д. Хьюзмоллер. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
- [11] М. М. Постников. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.
- [12] Р. Зуланке, П. Винтген. Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.
- [13] B. de Witt. The Spacetime Approach to Quantum Field Theory // Course 5. Relativity, groups and topology. II / Eds. B.S. de Witt and R. Stora. Les Houches, Session XL, 1983. Elsevier Sc. Publ., 1984. P. 482–738.
- [14] Ф. А. Березин. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [15] Г. Кейн. Современная физика элементарных частиц. М.: Мир, 1990.
- [16] Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.
- [17] Л. Райдер. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.
- [18] М. М. Постников. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
- [19] В. А. Желнорович. Теория спиноров и ее применение в физике и механике. М.: Наука, 1982.

Донецкий физико-технический институт
им. А. А. Галкина НАН Украины

Поступила в редакцию
16.VIII.1995 г.

V. T. Berezin

GEOMETRICAL STRUCTURE OF THE BASE AND TWISTING OF THE GRADED FIBRE BUNDLES USED IN MODELING GRAVITATION AND ELEMENTARY PARTICLES

To describe the unification of the fundamental interactions of elementary particles and gravitation the graded bundle mathematical structure ζ is needed. Its base B is the 9-dimensional graded space having one scalar, four spinor and four vector dimensions. One-parametric family of the Poincaré group $1P$ is found. It is shown that any group of this family acts on its invariant subgroup and on the base B in different ways. This situation is different from the classical one and point out at the nontriviality of the ζ -bundle geometrical properties. The problem of twisting is discussed.

¹⁾ В статье [8] имеются опечатки. В частности, в формуле (22) вместо $\cdots = \left[\cdots + \frac{\delta L_s}{\delta \varepsilon_{\mu\nu}} \right]_{\varepsilon \in H}$ должно быть $\cdots = \left[\cdots + \frac{\delta L}{\delta \varepsilon_{\mu\nu}} \right]_{\varepsilon \in H}$.