Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Динариев, Нелокальная гидродинамика в квантово-полевой модели φ^4 ,
ТМФ, 1996, том 108, номер 1, 50–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:41:49

О. Ю. Динариев

НЕЛОКАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА В КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ МОДЕЛИ φ^4

Разработанная ранее автором процедура перехода от квантовой статистической механики к гидродинамике применяется к квантово-полевой модели φ^4 . В определенном классе внешних воздействий уравнения квантовой теории многих частиц оказываются эквивалентными уравнениям нелокальной гидродинамики. Гидродинамические ядра нелокальности, возникающие в материальных соотношениях, выражаются через функции Грина для токов. Из общих свойств симметрии выводится ряд свойств ядер, в частности условия, связанные с диссипативностью и с T -инвариантностью модели φ^4 (аналог соотношений Онзагера). Нелокальность в гидродинамике позволяет непротиворечиво совместить причинность с диссипативностью. Найдена связь классических коэффициентов переноса с гидродинамическими ядрами. Описан алгоритм расчета материальных соотношений по теории возмущений на основе техники температурных функций Грина.

1. ВВЕДЕНИЕ

При выводе уравнений гидродинамики из уравнений квантовой статистической механики обычно посредством некоторой асимптотической процедуры получают реологическую модель Навье–Стокса с явным выражением для коэффициентов вязкости через квантовые операторы [1, 2]. Однако поскольку модель Навье–Стокса дает бесконечную скорость сигнала, в релятивистской теории эта процедура приводит к нарушению причинности. Эта проблема давно обсуждается в литературе [3–5]. В последовательной релятивистской диссипативной гидродинамике нужно использовать реологические модели, приводящие к скорости сигнала, не превышающей скорости света в вакууме.

На феноменологическом уровне хорошо известно, что конечную скорость сигнала дают релятивистские модели с временной нелокальностью, или наследственностью, как принято говорить в механике [6–8]. В связи с этим представляется, что традиционные методы перехода к гидродинамическому пределу в уравнениях квантовой теории многих частиц по крайней мере в релятивистском случае не являются адекватными.

В работах [9, 10] было показано, что в определенном классе внешних воздействий на систему уравнения релятивистской кинетической теории эквивалентны уравнениям гидродинамической модели, в которой материальные соотношения являются нелокальными в пространстве и времени. Ядра нелокальности вычисляются с помощью интеграла столкновений. Эквивалентность гидродинамических процессов определенным процессам кинетики естественно приводит к тому, что гидродинамическая модель непро-

тиворечиво совмещает причинность и диссипативность. В работе [11] эти результаты были распространены на случай квантовой релятивистской системы многих частиц. По алгебраической структуре получаемая из уравнений квантовой статистической механики гидродинамическая модель полностью аналогична модели, которую дает кинетика. Разница состоит в том, что в квантовом случае гидродинамические ядра нелокальности выражаются через функции Грина для токов.

В работе [11] был изложен общий метод перехода к гидродинамическому пределу без конкретизации полевой модели. Поэтому стоит задача проследить возможности этого метода для используемых в физике квантово-полевых систем. В настоящей работе рассмотрен переход к гидродинамике для массивного скалярного поля с самодействием φ^4 при конечной температуре. Отметим, что в последнее время интерес к этой полевой модели возрос в связи с развитием инфляционной космологии [12]. Ранее для модели φ^4 исследовался переход к уравнениям Навье–Стокса–Фурье вязкого теплопроводного газа [13, 14] методом неравновесного статистического оператора Зубарева [1].

В п. 2 изложена общая процедура перехода от квантовой статистики к гидродинамике для систем с произвольным количеством локальных законов сохранения. С небольшими изменениями в обозначениях воспроизведена часть результатов [11], необходимых для дальнейшего изложения. В п. 3 исследована алгебраическая структура гидродинамики, получающейся для таких полевых моделей, которые не допускают иных локальных законов сохранения, кроме сохранения энергии-импульса. В п. 4 на основе техники температурных функций Грина развита методика расчета коэффициентов в материальных соотношениях (гидродинамических ядер нелокальности) в рамках теории возмущений по константе взаимодействия. В п. 5 обсуждаются результаты работы и возможные дальнейшие приложения.

В статье используется система единиц измерения, в которой постоянная Планка $\hbar$, скорость света в вакууме c и постоянная Больцмана k равны единице. Греческие индексы пробегает значения 0, 1, 2, 3, соответствующие некоторой инерциальной системе отсчета пространства-времени x^α , причем $x^0 = t$ – время; латинские индексы a, b, c пробегает значения 1, 2, 3, соответствующие пространственным декартовым координатам x^a ; $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. Пространственно-временные индексы опускаются и поднимаются с помощью метрики Минковского $(\eta_{\alpha\beta}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. По повторяющимся индексам производится суммирование, если не оговорено противное. Для произвольной функции $f = f(x^\alpha)$ ее фурье-образ $f_F = f_F(k_\alpha)$ определяется формулой

$$f_F = f_F(k_\alpha) = \int \exp(-ik_\alpha x^\alpha) f(x^\alpha) dx^\alpha.$$

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Пусть имеется некоторая релятивистская квантовая система многих частиц, которая может взаимодействовать с внешней средой. Динамика системы определяется следующим гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_1, \quad H_1 = H_1(t), \quad (2.1)$$

где оператор $H_1 = H_1(t)$ характеризует взаимодействие с внешней средой. Пусть квантово-полевая система допускает N локальных законов сохранения (энергии-импульса,

зарядов):

$$\partial_\alpha J_{AH}^\alpha = S_A. \quad (2.2)$$

Здесь и далее в этом пункте, а также в п. 1 приложения латинские индексы A, B, C пробегает значения $0, \dots, (N-1)$. В уравнениях (2.2) $J_{AH}^\alpha = J_{AH}^\alpha(x^\beta)$ – операторные 4-токи, соответствующие законам сохранения, в представлении Гейзенберга; $S_A = S_A(x^\alpha)$ – операторные функции источников, возникающие из-за взаимодействия с внешней средой. Мы будем использовать также 4-токи в представлении взаимодействия $J_{AI}^\alpha = J_{AI}^\alpha(x^\beta)$ и в представлении Шредингера $J_{AS}^\alpha = J_{AS}^\alpha(x^b)$. Между разными представлениями имеется связь

$$J_{AS}^\alpha(x^a) = J_{AH}^\alpha(x^\beta)|_{x^0=0} = J_{AI}^\alpha(x^\beta)|_{x^0=0}. \quad (2.3)$$

Набор токов предполагается полным в том смысле, что состояние равновесия однозначно определяется средними значениями компонент J_{AS}^0 .

Будем считать, что взаимодействие с внешней средой до некоторого момента отсутствует: $H_1(t) = 0$ при $t \leq a$, $a > 0$. В противном случае равенства (2.3) могли бы не выполняться из-за теоремы Хаага [15, 16].

По определению 4-токов в представлении взаимодействия и в представлении Шредингера выполняются соотношения

$$\partial_\alpha J_{AI}^\alpha = 0, \quad (2.4)$$

$$i[H_0, J_{AS}^0] + \partial_a J_{AS}^a = 0. \quad (2.5)$$

Определим оператор эволюции системы как решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt} U_{t_0}^t = -i H U_{t_0}^t, \quad U_{t_0}^{t_0} = 1. \quad (2.6)$$

Теперь с учетом (2.3) мы имеем возможность переходить от одного представления к другому:

$$J_{AH}^\alpha(x^\beta) = U_0^{x^0*} J_{AS}^\alpha(x^b) U_0^{x^0}, \quad (2.7)$$

$$J_{AI}^\alpha(x^\beta) = E(-x^0) J_{AS}^\alpha(x^b) E(x^0), \quad E(t) = \exp(-itH_0). \quad (2.8)$$

Из соотношений (2.1), (2.2), (2.5)–(2.7) следует выражение для функций источников S_A через оператор взаимодействия с внешней средой H_1 :

$$S_A(x^\alpha) = i U_0^{x^0*} [H_1(x^0), J_{AS}^0(x^b)] U_0^{x^0}.$$

Для того чтобы использовать в дальнейшем температурные функции Грина [17, 18], удобно ввести в рассмотрение 4-токи в представлении Мацубары:

$$J_{AM}^\alpha(\tau, x^b) = E(i\tau) J_{AS}^\alpha(x^b) E(-i\tau). \quad (2.9)$$

Примем, что при $t \leq a$ реализуется равновесное состояние с матрицей плотности

$$\rho_0 = Q_0^{-1} E_0, \quad E_0 = \exp(-\beta H_0), \quad Q_0 = \text{Tr } E_0,$$

где $T = \beta^{-1}$ – температура в равновесном состоянии. Эволюция матрицы плотности $\rho = \rho(t)$ определяется из решения задачи Коши

$$i \frac{d}{dt} \rho = [H, \rho], \quad \rho|_{t=0} = \rho_0. \quad (2.10)$$

Для произвольного оператора B будем использовать обозначения

$$\langle B \rangle_0 = \text{Tr}(B \rho_0), \quad \langle B \rangle = \text{Tr}(B \rho).$$

Из уравнений (2.2) следуют уравнения гидродинамики

$$\partial_\alpha Q_A^\alpha = s_A, \quad (2.11)$$

где гидродинамические 4-токи $Q_A^\alpha = Q_A^\alpha(x^\beta)$ и источники $s_A = s_A(x^\beta)$ вычисляются как средние от соответствующих наблюдаемых:

$$Q_A^\alpha = Q_A^\alpha(x^\beta) = \langle J_{AH}^\alpha(x^\beta) \rangle_0 = \langle J_{AS}^\alpha(x^b) \rangle, \\ s_A = s_A(x^\beta) = \langle S_A(x^\beta) \rangle_0.$$

Гидродинамическая задача (2.11) незамкнута, пока неизвестны материальные соотношения, т.е. выражения для пространственных токов Q_A^α через величины Q_A^0 . Мы будем искать эти выражения в линейном приближении, когда возмущающий гамильтониан $H_1(t)$ и соответственно источники S_A являются малыми.

Для последующего анализа нужны некоторые известные результаты, касающиеся состояний, близких к равновесному. Эти результаты (формулы (2.13), (2.14), (2.16)) приведены ниже без доказательства. Доказательство имеется в [1].

Пусть V – малый самосопряженный оператор, B – произвольный оператор. Введем обозначения:

$$E_1 = \exp(-\beta(H + V)), \quad Q_1 = \text{Tr } E_1, \quad \rho_1 = Q_1^{-1} E_1, \\ \langle B \rangle_1 = \text{Tr}(B \rho_1), \quad W(t) = E(-t) V E(t). \quad (2.12)$$

Имеют место соотношения

$$\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0 = - \int_0^\beta (W(is) - \langle V \rangle_0) ds \rho_0, \quad (2.13)$$

$$\langle B \rangle_1 = \langle B \rangle_0 - \int_0^\beta \langle (B - \langle B \rangle_0) W(is) \rangle_0 ds. \quad (2.14)$$

Далее, если предположить, что выполнено условие

$$\langle (B - \langle B \rangle_0) W(t + is) \rangle_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \quad (2.15)$$

то формулу (2.14) можно преобразовать к виду

$$\langle B \rangle_1 = \langle B \rangle_0 - i^{-1} \int_{-\infty}^0 \langle [W(t), B] \rangle_0 dt. \quad (2.16)$$

Будем предполагать выполненными следующие два условия, связанные с локальностью квантово-полевой модели [11]:

а) для пространственно-подобного 4-вектора $(x^\alpha - y^\alpha)$

$$[J_{AI}^\alpha(x^\beta), J_{BI}^\gamma(y^\beta)] = 0; \quad (2.17)$$

б) если $\rho_1 = \rho_1[f]$ имеет вид (2.12), где

$$V = - \int f^A(x^a) J_{AS}^0(x^a) dx^a, \quad (2.18)$$

то для ненулевого 3-вектора $(x^a - y^a)$ выполняется соотношение

$$\Gamma_{AB}^\alpha(x^b - y^b) = 0, \quad (2.19)$$

где обозначено

$$\Gamma_{AB}^\alpha(x^b - y^b) = \text{Tr} \left(J_{AS}^\alpha(x^b) \frac{\delta \rho_1[f]}{\delta f_B(y^b)} \Big|_{f=0} \right).$$

Обратимся к задаче Коши (2.10). После линеаризации уравнение для матрицы плотности приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \rho = i[\rho, H_0] + \sigma(t), \quad \sigma(t) = i[\rho_0, H_1(t)]. \quad (2.20)$$

В соответствии с [9–11] примем, что источник $\sigma(t)$ в уравнении (2.20) имеет функциональную форму (2.13), причем

$$V = V(t) = \int h^A(t, x^a) J_{AS}^0(x^a) dx^a.$$

Тогда линейное уравнение (2.20) с учетом (2.8) легко решается:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho_0 + \varkappa(t), \\ \varkappa(t) &= \int_0^t E(t - t_1) \sigma(t_1) E(t_1 - t) dt_1 = \\ &= - \int_0^t dt_1 \int_0^\beta ds \int dx^a h^A(t_1, x^a) (J_{AI}^0(t_1 - t + is, x^a) - \langle J_{AS}^0 \rangle_0) \rho_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Таким образом, $\varkappa(t)$ снова имеет функциональный вид (2.13) с некоторым соответствующим оператором V' . Зная матрицу плотности, можно вычислить линейные возмущения гидродинамических токов. Однако для того чтобы записать результаты в компактном виде, удобно ввести ряд новых обозначений: приведенные токи –

$$j_{AI}^\beta(x^\alpha) = J_{AI}^\beta(x^\alpha) - \langle J_{AS}^\beta \rangle_0,$$

спектральные функции –

$$\begin{aligned} S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma) &= \Sigma_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma), \\ \Sigma_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma) &= \langle j_{AI}^\alpha(x^\gamma) j_{BI}^\beta(0) \rangle_0, \end{aligned}$$

а также функции Грина для токов –

$${}^r D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma) = i^{-1} \theta(x^0) \langle [j_{AI}^\alpha(x^\gamma), j_{BI}^\beta(0)] \rangle_0$$

(запаздывающие функции Грина),

$${}^a D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma) = -i^{-1} \theta(-x^0) \langle [j_{AI}^\alpha(x^\gamma), j_{BI}^\beta(0)] \rangle_0$$

(опережающие функции Грина),

$${}^m D_{AB}^{\alpha\beta}(\tau, x^a) = \langle T_\tau J_{AM}^\alpha(\tau, x^a) J_{BM}^\beta(0) \rangle_0$$

(температурные функции Грина [17, 18], T_τ – операция операторного упорядочения по параметру τ , применяемая к токам в мацубаровском представлении (2.9)).

Кроме того, введем вспомогательные функции Грина [1]

$$L_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma) = \theta(x^0) \int_{x^0}^{+\infty} ds {}^r D_{AB}^{\alpha\beta}(s, x^c).$$

Для удобства изложения в п. 1 приложения приведены необходимые свойства спектральных функций и указана их связь с функциями Грина.

Отметим, что функция ${}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma)$ продолжается по аналитичности в полуплоскость $\text{Im } k_0 \leq 0$ (см. (П.8)), а функция ${}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma)$ продолжается по аналитичности в полуплоскость $\text{Im } k_0 \geq 0$ (см. (П.9)). Зная функции Грина, можно вычислить спектральные функции по формуле

$$i(e^{\beta k_0} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma) = {}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_0, k_a) - {}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_0, k_a). \quad (2.22)$$

Как известно [17, 18], температурные функции Грина ${}^m D_{AB}^{\alpha\beta}(\tau, x^\gamma)$ периодические по параметру τ с периодом β , поэтому преобразование Фурье по этой переменной дает дискретный спектр ζn , $\zeta = 2\pi T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В соответствии с формулами (П.8), (П.9), (П.11) имеют место равенства

$${}^m D_{ABF}^{\alpha\beta}(\zeta n, k_a) = - {}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(i\zeta n, k_a), \quad n \leq 0, \quad (2.23)$$

$${}^m D_{ABF}^{\alpha\beta}(\zeta n, k_a) = - {}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(i\zeta n, k_a), \quad n \geq 0. \quad (2.24)$$

Возвращаясь теперь к гидродинамическим величинам, определим линейные возмущения гидродинамических 4-токов

$$g_A^\beta(x^\alpha) = \langle J_{AS}^\beta(x^\alpha) - \langle J_{AS}^\beta \rangle_0 \rangle. \quad (2.25)$$

Согласно (2.11) выполняются уравнения

$$\partial_\alpha g_A^\alpha = s_A. \quad (2.26)$$

Подстановка выражения (2.21) в (2.25) при учете формулы (2.16) и принятых определений приводит к простому равенству

$$g_A^\beta(x^\alpha) = \int dy^\alpha L_{AB}^{\beta 0}(x^\alpha - y^\alpha) h^B(y^\alpha). \quad (2.27)$$

Условие (2.15) в данном случае имеет вид (принцип ослабления корреляций)

$$\langle (J_{AS}^\alpha(x^a) - \langle J_{AS}^\alpha \rangle_0) J_{BI}^0(t + is, y^b) \rangle_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty.$$

Перейдем в формуле (2.27) к фурье-образам:

$$g_{AF}^\beta(k_\alpha) = L_{ABF}^{\beta 0}(k_\alpha) h_F^B(k_\alpha). \quad (2.28)$$

Исключая в этих соотношениях величины h_F^A , получаем выражения для пространственных токов g_A^a через величины g_A^0 :

$$\begin{aligned} g_{AF}^b(k_\alpha) &= C_{AB}^b(k_\alpha) g_{BF}^0(k_\alpha), \\ C_{AC}^b(k_\alpha) &= L_{ABF}^{b0}(k_\alpha) \Delta_{BC}(k_\alpha), \\ (\Delta_{AB}(k_\alpha)) &= (L_{ABF}^{00}(k_\alpha))^{-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Равенства (2.29) представляют собой искомые материальные соотношения, которые замыкают задачу (2.26). Так как в общем случае коэффициентная матрица $C_{AB}^b(k_\alpha)$ неполиномиально зависит от компонент 4-вектора k_α , гидродинамическая модель оказывается нелокальной в пространстве-времени. В рассматриваемом классе внешних воздействий гидродинамическая задача (2.26), (2.29) эквивалентна исходной квантово-статистической задаче. В самом деле, по решению гидродинамической задачи с помощью (2.28), (2.21) восстанавливается матрица плотности. Этот факт чисто формально обеспечивает свойство причинности гидродинамической модели при условии, что исходная полевая модель причинна. Более содержательное доказательство причинности построенной гидродинамической модели дано в [11] на основе равенств (2.17), (2.19).

На настоящем этапе исследования не очевидно, что гидродинамическая модель (2.29) является диссипативной. Это будет показано ниже.

В связи с тем, что коэффициенты в материальных соотношениях (2.29) вычисляются через функции $L_{ABF}^{\alpha\beta}$, целесообразно рассмотреть некоторые их свойства.

Согласно формулам (П.2), (П.5), (П.12) для произвольных комплексных величин c_α^A выполняются неравенства

$$(L_{ABF}^{\alpha\beta} + L_{BAF}^{\beta\alpha*}) c_\alpha^{A*} c_\beta^B \leq 0. \quad (2.30)$$

Пусть квантово-полевая модель является T -инвариантной [16]. Обозначим через U_T соответствующий антиунитарный оператор обращения времени. Тогда можно считать, что выполнены равенства

$$U_T J_{AI}^\alpha(x^0, x^a) U_T^{-1} = \varepsilon'_\alpha \varepsilon_A J_{AI}^\alpha(-x^0, x^a), \\ \varepsilon_A = \pm 1, \quad \varepsilon'_0 = 1, \quad \varepsilon'_a = -1.$$

Отсюда при учете формулы (П.7) для T -инвариантного равновесного состояния следуют условия взаимности

$$S_{AB}^{\alpha\beta}(k_0, k_a) = \varepsilon'_\alpha \varepsilon'_\beta \varepsilon_A \varepsilon_B S_{BA}^{\beta\alpha}(k_0, -k_a). \quad (2.31)$$

В соответствии с формулой (П.10) из (2.31) вытекают условия взаимности для функций Грина

$$L_{ABF}^{\alpha\beta}(k_0, k_a) = \varepsilon'_\alpha \varepsilon'_\beta \varepsilon_A \varepsilon_B L_{BAF}^{\beta\alpha}(k_0, -k_a). \quad (2.32)$$

Определим матрицу $\Lambda_{AB} = \Lambda_{AB}(k_a)$ как фурье-образ матрицы $(\delta(x^0) \Gamma_{AB}(x^a))$. Согласно условию (2.19) возможна только полиномиальная зависимость коэффициентов Λ_{AB} от компонент волнового 3-вектора k_a . Легко найти выражение для этих коэффициентов через спектральные функции:

$$\Lambda_{AB} = (2\pi)^{-1} \int \omega^{-1} (e^{\beta\omega} - 1) S_{AB}^{00}(\omega, k_a) d\omega. \quad (2.33)$$

Из формул (2.33), (2.31) и равенства (П.4) следуют равенства

$$\Lambda_{AB}(k_c) = \varepsilon_A \varepsilon_B \Lambda_{BA}(-k_c) = \Lambda_{AB}(-k_c)^*. \quad (2.34)$$

Оказывается, что вместо коэффициентов C_{AB}^a , входящих в материальные соотношения, проще исследовать коэффициенты $A_{AB}^a = C_{AC}^a \Lambda_{CB}$. С помощью этих коэффициентов можно выразить 3-токи g_A^a через такие внешние силы $f^A = f^A(x^a)$, которые для состояния $\rho_1 = \rho_1[f]$ вида (2.12), (2.18) приводят в каждый данный момент к тем же значениям величин g_A^0 :

$$g_{AF}^0(k_\alpha) = \Lambda_{AB}(k_a) f_F^A(k_\alpha).$$

Далее, где возможно, будем опускать матричные индексы A, B, C , связанные с номерами токов. Обозначим для краткости

$$\Lambda = (\Lambda_{AB}), \quad \Delta = (\Delta_{AB}), \quad L^{\alpha\beta} = (L_{ABF}^{\alpha\beta}), \quad D^{\alpha\beta} = ({}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}), \quad A^a = (A_{AB}^a).$$

В соответствии с формулами (П.6), (П.7) имеем

$$\Lambda = \Lambda^+ \geq 0. \quad (2.34')$$

Из формул (2.33) и (П.6), (П.10) вытекает тождество

$$ik_\alpha L^{\alpha 0}(k_\beta) = -\Lambda. \quad (2.35)$$

Обозначая $B = ik_a A^a$, получаем из этого тождества выражение

$$B = ik_a A^a = -\Lambda \Delta \Lambda - ik_0 \Lambda.$$

Согласно (2.30), (2.34') матрица B удовлетворяет неравенству

$$B + B^+ \geq 0, \quad (2.36)$$

которое представляет собой обычное условие диссипативности для механических систем с наследственностью [19]. Таким образом, доказана диссипативность построенной нелокальной гидродинамической модели.

В соответствии с (2.32), (2.34) матрица B также удовлетворяет условиям взаимности (аналог соотношений Онзагера)

$$B_{AB}(k_0, k_a) = \varepsilon_A \varepsilon_B B_{AB}(k_0, -k_a). \quad (2.37)$$

Рассмотрим распространение свободных плоских волн в гидродинамической модели, что соответствует возбуждениям в квантовой системе. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$0 = \det(ik_0 \Lambda + B) = (\det \Lambda)^2 (\det L^{00})^{-1}. \quad (2.38)$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяют полюсы матричной функции L^{00} . Поскольку эта матрица голоморфна в полуплоскости $\text{Im } k_0 < 0$, то полюсы соответствуют затухающим возбуждениям.

В заключение данного пункта уместно обсудить определение локально-равновесных составляющих l_A^a полных токов g_A^a [1]. Хотя то или иное определение не изменяет динамических уравнений, проблема представляет некоторый интерес. Исследуем ситуацию, когда гамильтониан взаимодействия с внешней средой имеет вид

$$H_1(t) = \int h^A(t, x^a) J_{AS}^0(x^a) dx^a.$$

Как легко убедиться, в этом случае получают следующие материальные соотношения:

$$g_F^a = D^{a0} (D^{00})^{-1} g_F^0.$$

Этот факт служит наводящим соображением для определения локально-равновесных токов:

$$l_F^a = (D^{a0} (D^{00})^{-1}) \Big|_{k_0=0} g_F^0 = -D^{a0} \Big|_{k_0=0} \Lambda^{-1} g_F^0.$$

Фурье-прообразы этих токов — действительные величины, что следует из равенства (П.1).

Если теперь представить коэффициентную матрицу A^a в виде

$$A^a = Z^a - {}^1A^a, \quad Z^a = -D^{a0} \Big|_{k_0=0}, \quad (2.39)$$

то диссипативные эффекты будут описываться матрицами ${}^1A^a$. Такое определение локально-равновесных токов корректно, поскольку, как легко проверить, матрицы Z^a вносят нулевой вклад в левую часть диссипативного неравенства (2.36).

3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Исследуем ситуацию, когда полевая модель, которую мы не будем конкретизировать, позволяет вычислить по теореме Нетер из соответствующего лагранжиана симметричный тензор энергии-импульса $T^{\alpha\beta}$, и больше никаких независимых локально сохраняющихся токов нет.

В этом случае индексы, нумерующие сохраняющиеся токи, совпадают с пространственно-временными индексами. В обозначениях п. 2 имеем $J_\beta^\alpha = T_\beta^\alpha$. В соответствии с (2.4) выполняются законы сохранения

$$\partial_\alpha T_I^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.1)$$

Определим гамильтониан системы выражением

$$H_0 = \int T_S^{0\alpha}(x^b)v_\alpha dx^b, \quad (3.2)$$

где 4-вектор v^α удовлетворяет условиям

$$v_\alpha v^\alpha = 1, \quad v^0 > 0. \quad (3.3)$$

Определение (3.2) является пуанкаре-инвариантным. Чтобы это доказать, нужно перейти в (3.2) к операторам в представлении взаимодействия и воспользоваться (3.1). Для равновесного состояния, определяемого через гамильтониан (3.2), вектор v^α имеет смысл скорости среды.

Итак, равновесное состояние характеризуется параметрами β, v^α . С учетом соотношения (3.3) это составляет 4 степени свободы: $f_e^\alpha = \beta v^\alpha$.

Для T -инвариантного равновесного состояния справедливо

$$f_e^a = 0. \quad (3.4)$$

Вследствие определения (3.2) силы $f^\beta(x^\alpha)$ (см. п. 2) естественно интерпретировать как локальные изменения величин f_e^α :

$$f^\beta(x^\alpha) = -T\Delta f_e^\alpha.$$

С учетом (3.4) отсюда получаем

$$f^0(x^\alpha) = \Delta T(x^\alpha), \quad f^b(x^\alpha) = -v^b(x^\alpha). \quad (3.5)$$

Эти формулы можно рассматривать как определения локальной температуры и локальной скорости среды в неравновесном состоянии.

В равновесном состоянии вычисляются $\varepsilon = \varepsilon(T) = \langle T^{00} \rangle_0$ – внутренняя энергия среды, $p = p(T) = \langle T^{aa} \rangle_0$ – давление (суммирование по a не производится!), $h = (p + \varepsilon)$ – энтальпия. Примем, как в [11], что матрица Λ не зависит от волнового вектора. Тогда имеем

$$\Lambda_{00} = T \left(\frac{d\varepsilon}{dT} \right), \quad \Lambda_{a\alpha} = h\delta_{a\alpha}. \quad (3.6)$$

Коэффициенты в материальных соотношениях могут быть вычислены с помощью величин $L_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}$. Чтобы исследовать их алгебраические свойства, удобно ввести в рассмотрение набор коэффициентов

$$R_{\alpha\beta|\gamma\delta} = \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\gamma\nu}L_{\beta\delta F}^{\lambda\nu}.$$

Вследствие симметрии тензора энергии-импульса имеем

$$R_{\alpha\beta|\gamma\delta} = R_{\beta\alpha|\gamma\delta}, \quad R_{\alpha\beta|\gamma\delta} = R_{\alpha\beta|\delta\gamma}.$$

Далее, из соотношений (2.32) следует

$$R_{\alpha\beta|\gamma\delta}(k_0, k_a) = \varepsilon'_\alpha \varepsilon'_\beta \varepsilon'_\gamma \varepsilon'_\delta R_{\gamma\delta|\alpha\beta}(k_0, -k_a).$$

Поэтому алгебраически независимым является набор величин $R_{00|00}$, $R_{00|0a}$, $R_{00|ab}$, $R_{0a|0b}$, $R_{0a|bc}$, $R_{ab|cd}$. Из соображений $O(3)$ -инвариантности следует представление

$$\begin{aligned} R_{00|00} &= {}^0X_0, & R_{00|0a} &= ik_a {}^0X_1, \\ R_{00|ab} &= \delta_{ab} {}^0X_2 + ik_a ik_b {}^0X_3, & R_{0a|0b} &= \delta_{ab} {}^0X_4 + ik_a ik_b {}^0X_5, \\ R_{0a|bc} &= ik_a \delta_{bc} {}^0X_6 + ik_a ik_b ik_c {}^0X_7 + (\delta_{ab} ik_c + \delta_{ac} ik_b) {}^0X_8, \\ R_{ab|cd} &= \delta_{ab} \delta_{cd} {}^0X_9 + (ik_a ik_b \delta_{cd} + \delta_{ab} ik_c ik_d) {}^0X_{10} + \\ &+ (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) {}^0X_{11} + (\delta_{ac} ik_b ik_d + \delta_{ad} ik_b ik_c + \\ &+ \delta_{bc} ik_a ik_d + \delta_{bd} ik_a ik_c) {}^0X_{12} + ik_a ik_b ik_c ik_d {}^0X_{13}. \end{aligned}$$

Здесь 0X_n – скалярные ядра, в соответствии с (П.2) удовлетворяющие равенствам $({}^0X_n(k_\alpha))^* = {}^0X_n(-k_\alpha)$ и потому являющиеся фурье-образами некоторых действительных функций ${}^0Y_n = {}^0Y_n(x^\alpha)$: ${}^0Y_{nF} = {}^0X_n$. Итак, чтобы найти 256 коэффициентов $L_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}$, достаточно знать 14 скалярных функций 0X_n . Чтобы рассчитать материальные соотношения, достаточно знать только первые 9 из этих функций. Тождество (2.35) налагает на эти 9 функций следующие 5 связей

$$\begin{aligned} -\Lambda_{00} &= ik_0 {}^0X_0 + \nu {}^0X_1, \\ 0 &= ik_0 {}^0X_1 - {}^0X_2 + \nu {}^0X_3, \\ 0 &= ik_0 {}^0X_1 - {}^0X_4 + \nu {}^0X_5, \\ -h &= ik_0 {}^0X_4 + \nu {}^0X_8, \\ 0 &= ik_0 {}^0X_5 - {}^0X_6 + \nu {}^0X_7 - {}^0X_8, \end{aligned}$$

где $\nu = k_a k_a$. Поэтому достаточно из ядер 0X_n вычислить только 4 (например, 0X_0 , 0X_3 , 0X_5 , 0X_7).

В соответствии с (2.30) для произвольных комплексных величин $c^{\alpha\beta}$ выполняются неравенства

$$(R_{\alpha\beta|\gamma\delta} + R_{\gamma\delta|\alpha\beta}^*)c^{\alpha\beta*}c^{\gamma\delta} \leq 0.$$

Отметим некоторые следствия этих неравенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} {}^0X_0 \leq 0, \quad \operatorname{Re} {}^0X_4 \leq 0, \quad \operatorname{Re} {}^0X_{11} \leq 0, \\ \operatorname{Re}(9 {}^0X_9 - 6\nu {}^0X_{10} + 6 {}^0X_{11} - 4\nu {}^0X_{12} + \nu^2 {}^0X_{13}) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Исследуем вид материальных соотношений в пределе $k_a \rightarrow 0$ (длинные волны). Для этого обозначим (см. (2.39))

$${}^0Z^a = Z^a \Big|_{k_b=0}, \quad {}^0L^{ab} = L^{ab} \Big|_{k_b=0}.$$

Из (П.6), (П.8), (П.10) следует тождество

$$ik_0 L^{a0}(k_\gamma) + ik_b L^{ab}(k_\gamma) = -Z^a(k_c).$$

Отсюда и из тождества (2.35) в линейном приближении по k_a получаем выражение

$$A^a = Z^a + ik_b ({}^0L^{ab} - K^{ab}), \quad K^{ab} = {}^0Z^a \Lambda^{-1} ({}^0Z^b)^+.$$

Теперь, используя определение локально-равновесных и неравновесных токов, данное в п. 2, можно выделить в материальных соотношениях члены, соответствующие линейно-вязкой модели Навье–Стокса. Коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости η_V , η_S вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \eta_V = \frac{1}{9} \left(-{}^0L_{ab}^{ab} \Big|_{k_0=0} + K_{ab}^{ab} \right) = - \left({}^0X_9 + \frac{2}{3} {}^0X_{11} \right) \Big|_{k_\alpha=0} + \frac{1}{9} K_{ab}^{ab}, \\ \eta_S = -{}^0X_{11} \Big|_{k_\alpha=0} + K_{22}^{11}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, неравенства (3.7) обеспечивают неотрицательность коэффициентов вязкости.

Исследуем теперь более подробно алгебраическую структуру коэффициентов $A_{a\alpha\beta} = \eta_{a\gamma} A_{\alpha\beta}^\gamma$. В силу симметрии тензора энергии-импульса, во-первых, $A_{ab\alpha} = A_{ba\alpha}$, а во-вторых, $A_{a0\alpha} = \Lambda_{a\alpha}$, поскольку $g_a^0 = -g_0^a$. Используя (3.6) и $O(3)$ -инвариантность, получаем

$$\begin{aligned} A_{a00} = 0, \quad A_{a0b} = h\delta_{ab}, \quad A_{ab0} = \delta_{ab} {}^1X_0 + ik_a ik_b {}^1X_1, \\ A_{abc} = \delta_{ab} ik_c {}^1X_2 + ik_a ik_b ik_c {}^1X_3 + ik_a \delta_{bc} + (ik_b \delta_{ac}) {}^1X_4. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему 1X_n — скалярные функции, удовлетворяющие равенствам $({}^1X_n(k_\alpha))^* = {}^1X_n(-k_\alpha)$.

Построим матрицу $B_{\alpha\beta} = ik^a A_{a\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} B_{00} &= 0, & B_{0b} &= -hik_b, & B_{b0} &= -ik_b {}^1X_0 + \nu ik_b {}^1X_1, \\ B_{ab} &= ik_a ik_b (-{}^1X_2 + \nu {}^1X_3 - {}^1X_4) + \nu {}^1X_4. \end{aligned}$$

где $\nu = k_a k_a$. Из условий взаимности (2.37) получаем $h = {}^1X_0 - \nu {}^1X_1$. Таким образом, из 5 ядер 1X_n только 4 являются алгебраически независимыми. Они могут быть выражены рациональной зависимостью через 4 независимых ядра 0X_n .

Условия диссипативности (2.36) дают

$$\operatorname{Re}({}^1X_2 - \nu {}^1X_3 + 2 {}^1X_4) \geq 0, \quad \operatorname{Re} {}^1X_4 \geq 0. \quad (3.8)$$

Анализируя алгебраическую структуру набора коэффициентов $A_{\alpha\beta}^a$, можно опять в пределе длинных волн выделить навье-стоксовские линейно-вязкие члены. Получается следующая связь коэффициентов переноса с ядрами:

$$\eta_V + \frac{4}{3}\eta_S = ({}^1X_2 + 2 {}^1X_4) \Big|_{k_\alpha=0}, \quad \eta_S = {}^1X_4 \Big|_{k_\alpha=0}.$$

Неравенства (3.8) обеспечивают неотрицательность левых частей в этих соотношениях, но не обеспечивают неравенства $\eta_V \geq 0$. Таким образом, неравенства (2.36) слабее неравенств (2.30).

Важно подчеркнуть, что в излагаемом подходе получаются только 2 коэффициента переноса (коэффициенты вязкости). В этом имеется существенное расхождение с предыдущими работами [13, 14], где авторами вычислялся еще и коэффициент теплопроводности. В настоящей работе в соответствии с (3.5) принято определение скорости среды по Ландау–Лифшицу [20] через поток энергии. В локально собственной системе отсчета среды нет переноса энергии, а поэтому нет теплопроводности. Чтобы рассматривать явление теплопроводности, нужно иметь возможность определить скорость среды независимо от потока энергии, например по Эккарту [21] – через поток частиц. Однако в рассматриваемой ситуации, когда все гидродинамические характеристики связаны с компонентами тензора энергии-импульса, трудно придумать какое-либо иное определение скорости среды.

4. ПРОЦЕДУРА РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЯДЕР В МОДЕЛИ φ^4

Рассмотрим теорию скалярного поля $\varphi = \varphi(x^\alpha)$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \quad (4.1)$$

При варьировании получается динамическое уравнение

$$\square\varphi + m^2\varphi + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 = 0, \quad \square = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta. \quad (4.2)$$

По теореме Нетер из (4.1) вычисляется тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \eta_{\alpha\beta} \mathcal{L}.$$

Для вычислительных целей в квантовой теории мы перепишем выражение для тензора энергии-импульса с учетом уравнения (4.2) в симметричном и билинейном по φ виде:

$$T_{\alpha\beta I} = \partial_\alpha \varphi_I \partial_\beta \varphi_I - \eta_{\alpha\beta} \mathcal{L},$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu} \partial_\lambda \varphi_I \partial_\mu \varphi_I + \frac{1}{2} m^2 \varphi_I^2 + \frac{1}{8} (\varphi_I \square \varphi_I + \square \varphi_I \varphi_I). \quad (4.3)$$

Введем ряд определений:

$$\sigma(x^\alpha) = \langle \varphi_I(x^\alpha) \varphi_I(0) \rangle_0, \quad \rho(k_\alpha) = \sigma_F(k_\alpha)$$

($\rho(k_\alpha)$ – спектральная функция для скалярного поля),

$$\varphi_M(\tau, x^a) = E(i\tau) \varphi_S(x^a) E(-i\tau)$$

(скалярное поле в мацубаровском представлении),

$${}^m G(\tau, x^a) = \langle T_\tau \varphi_M(\tau, x^a) \varphi_M(0) \rangle_0$$

(температурный пропагатор).

Необходимые сведения о спектральной функции $\rho(k_\alpha)$ приведены в п.2 приложения. Отметим, что пропагатор ${}^m G(\tau, x^\gamma)$ – периодическая по параметру τ функция с периодом β [17, 18], поэтому преобразование Фурье по этой переменной дает дискретный спектр ζn , $\zeta = 2\pi T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Фурье-образ пропагатора ${}^m G$ выражается через спектральную плотность (П.16).

Поскольку для температурных функций Грина справедлив аналог теоремы Вика [17, 18], то в рамках теории возмущений по параметру λ с помощью обычной диаграммной техники можно вычислить температурные функции Грина для токов ${}^m D_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$. Затем, осуществляя аналитическое продолжение по параметру k_0 , по формулам (2.23), (2.24) можно найти опережающие и запаздывающие функции Грина ${}^a D_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}$, ${}^r D_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}$. После этого по формуле (2.22) вычисляются спектральные функции для токов. Этого достаточно, чтобы рассчитать функции $L_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}$ и, следовательно, получить коэффициенты в материальных соотношениях гидродинамической модели.

Если пользоваться скелетными диаграммами, то для реализации этой программы в силу билинейности выражения (4.3) необходимо просуммировать бесконечный ряд, изображенный на рисунке, где линиям отвечают полные пропагаторы ${}^m G$ (т.е. получающиеся после суммирования собственно-энергетических диаграмм и перенормировки).

Мы рассмотрим здесь только первый член этого ряда, т.е. вычислим ${}^m D_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}$ в низшем приближении при скелетном разложении. Используя представление (П.16), получаем выражение

$$\begin{aligned} {}^m D_{\beta\delta F}^{\alpha\gamma}(\zeta n, k_a) &= (2\pi)^{-4} \int dk_{1a} d\omega_1 d\omega_2 P_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(\omega_1, k_a - k_{1a}, \omega_2, k_{1a}) \times \\ &\times \gamma(\omega_1, k_a - k_{1a}) \gamma(\omega_2, k_{1a}) \Phi(n, \omega_1, \omega_2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(k_{1\lambda}, k_{2\mu}) &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} M_{\rho\beta}(k_{1\lambda}, k_{2\mu}) \eta^{\gamma\pi} M_{\delta\pi}(-k_{1\lambda}, -k_{2\mu}), \\ M_{\alpha\beta}(k_{1\gamma}, k_{2\delta}) &= -k_{1\alpha} k_{2\beta} - k_{2\alpha} k_{1\beta} + \\ &+ \eta_{\alpha\beta} \left(\eta^{\lambda\mu} k_{1\lambda} k_{2\mu} - m^2 + \frac{1}{4} (\eta^{\lambda\mu} k_{1\lambda} k_{1\mu} + \eta^{\lambda\mu} k_{2\lambda} k_{2\mu}) \right), \\ \gamma(\omega, k_a) &= (e^{\beta\omega} - 1) \rho(\omega, k_a), \\ \Phi(n, \omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_1} (i\zeta(n - n_1) - \omega_1)^{-1} (i\zeta n_1 - \omega_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении по параметру ζn . Для этого введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} \Phi_1(\Omega, \omega_1, \omega_2) &= (\Omega - \omega_1 - \omega_2)^{-1} \Psi(\Omega, \omega_1, \omega_2), \\ \Psi &= \Psi_1 - \Psi_2, \\ \Psi_1(\Omega, \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2} \sum_{n_1} \left((\Omega - i\zeta n_1 - \omega_1)^{-1} + (i\zeta n_1 - \omega_2)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + (\Omega - i\zeta n_1 - \omega_2)^{-1} + (i\zeta n_1 - \omega_1)^{-1} \right), \\ \Psi_2(\Omega, \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2} (r(\Omega, \omega_1) + r(\Omega, \omega_2)), \\ r(\Omega, \omega) &= \frac{1}{2} \beta \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \beta \Omega \right) \left(\operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \beta (\Omega - \omega) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \beta \omega \right) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Как легко видеть,

$$\Phi_1(i\zeta n, \omega_1, \omega_2) = \Phi(n, \omega_1, \omega_2)$$

для любого целого n . Кроме того, $\Psi(\Omega, \omega_1, \omega_2)$ — целая функция параметра Ω , поскольку все возможные полюсы в точках $\Omega = i\zeta n + \omega_1$, $\Omega = i\zeta n + \omega_2$ устранены вычитанием функции Ψ_2 .

Итак, искомое аналитическое продолжение достигается просто введением в формулу (4.4) функции Φ_1 вместо функции Φ . Теперь, используя формулы (2.22)–(2.24), получаем выражение для спектральной функции токов

$$\begin{aligned} (e^{\beta k_0} - 1) S_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(k_\gamma) &= -(2\pi)^{-3} \int dk_{1a} d\omega_1 P_{\beta\delta}^{\alpha\gamma}(k_0 - \omega_1, k_a - k_{1a}, \omega_1, k_{1a}) \times \\ &\times \gamma(k_0 - \omega_1, k_a - k_{1a}) \gamma(\omega_1, k_{1a}) \Psi(k_0, k_0 - \omega_1, \omega_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Эта формула представляет собой интегральную связь между спектральной функцией скалярного поля и спектральной функцией токов. Спектральная функция для поля была вычислена по теории возмущений в [14]. В этой работе было получено равенство

$$\gamma(k_\alpha) = (2\pi i)^{-1} \left(((k_0 - i\Gamma)^2 - \nu^2 - m^2)^{-1} - ((k_0 + i\Gamma)^2 - \nu^2 - m^2)^{-1} \right),$$

где для функции $\Gamma = \Gamma(k_\alpha)$ имеется представление в виде интегрального выражения. Следовательно, трудно ожидать, что выражение (4.5) точно преобразуется к элементарным или специальным функциям. Скорее, оно может быть использовано для получения асимптотических или приближенных формул, а также для реализации численных методов расчета.

То же самое справедливо и для всех остальных членов представленного на рисунке ряда.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное преимущество предлагаемого метода перехода к гидродинамическому пределу – эквивалентность получаемых гидродинамических уравнений (2.26), (2.29) уравнениям исходной квантовой статистической теории. Решая гидродинамическую задачу (2.26), (2.29), можно быть уверенным, что каждому найденному решению точно соответствует некоторый квантово-статистический процесс.

Недостаток предлагаемого метода – сложность вычисления гидродинамических ядер нелокальности. В этом нелокальная гидродинамика имеет общие черты с рядом других областей физики и механики, использующих ядра и спектральные функции, которые не удастся точно вычислить (турбулентность, квантовая теория поля, неидеальная пластичность). Применяемый на практике способ обхода этой трудности – принятие некоторых модельных выражений для ядер, функциональная структура которых, однако, должна быть обоснована строгой теорией.

Как было показано, нелокальная гидродинамика имеет область приложения во всех задачах теории многих частиц, где приложимы квантово-статистические методы. Например, ее можно использовать в квантовой электродинамике и квантовой хромодинамике при высоких температурах. Отметим, что в квантовой хромодинамике значительные усилия были затрачены на вычисление параметров плазмона в горячей глюонной плазме (см. [22] и приводимую библиографию). Коэффициент затухания получается калибровочно зависимым и в ряде случаев (у ряда авторов) отрицательным, что может означать неустойчивость плазмы. Во всех проведенных исследованиях плазмоны ассоциировались с полюсами матричной функции D^{00} . В п. 2 настоящей работы показано, что более правильно ассоциировать возбуждения с полюсами матричной функции L^{00} (см. (2.38)). При этом все такие возбуждения заведомо затухают. Возможно, именно на этом пути лежит решение проблемы глюонного плазмона.

Ограничения применимости нелокальной гидродинамики в изложенной версии связаны с предположением о полноте описания набором токов (см. п. 2), что означает устойчивость гиббсовского состояния. Поэтому предлагаемая версия нелокальной гидродинамики неприменима для систем с фазовыми переходами, например для сверхпроводимости, сверхтекучести и π -мезонной конденсации в ядерных моделях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. В настоящем пункте приведены известные свойства функций Грина и спектральных функций для токов (см., например, [1, 17, 18]).

Функции Грина для токов действительные:

$$\begin{aligned}({}^r D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma))^* &= {}^r D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma), \\({}^a D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma))^* &= {}^a D_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma), \\(L_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma))^* &= L_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma).\end{aligned}$$

Эти равенства в фурье-представлении дают

$$({}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma))^* = {}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(-k_\gamma), \quad (\text{П.1})$$

$$\begin{aligned}({}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma))^* &= {}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(-k_\gamma), \\(L_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma))^* &= L_{ABF}^{\alpha\beta}(-k_\gamma).\end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Пусть P_α — 4-оператор энергии-импульса в пространстве чистых состояний. Выберем в этом пространстве базис $|n\rangle$ из собственных векторов операторов P_α : $P_\alpha|n\rangle = p_\alpha(n)|n\rangle$. Используем этот базис для вычисления функций $\Sigma_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma)$:

$$\begin{aligned}\Sigma_{AB}^{\alpha\beta}(x^\gamma) &= \langle j_A^\alpha(x^\gamma) j_B^\beta(0) \rangle_0 = \\&= \sum_{n,m} \exp\left(-i(p_\gamma(n) - p_\gamma(m))x^\gamma\right) \exp(-\beta p_0(m)) \times \\&\quad \times \langle m | j_A^\alpha(0) | n \rangle \langle n | j_B^\beta(0) | m \rangle.\end{aligned}$$

Осуществляя преобразование Фурье в этом выражении, получаем формулу для спектральной функции

$$\begin{aligned}S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma) &= (2\pi)^{-4} \sum_{n,m} \delta(k_\gamma + (p_\gamma(n) - p_\gamma(m))) \times \\&\quad \times \exp(-\beta p_0(m)) \langle m | j_A^\alpha(0) | n \rangle \langle n | j_B^\beta(0) | m \rangle.\end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Из формулы (П.3) и равенств (2.4) вытекают ряд свойств спектральных функций:

$$S_{AB}^{\alpha\beta}(-k_\gamma) = \exp(\beta k_0) S_{BA}^{\beta\alpha}(k_\gamma), \quad (\text{П.4})$$

$$c_\alpha^A c_\beta^{B*} S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma) \geq 0 \quad \text{для произвольных } c_A^\alpha, \quad (\text{П.5})$$

$$k_\alpha S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma) = 0, \quad (\text{П.6})$$

$$S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma)^* = S_{BA}^{\beta\alpha}(k_\gamma). \quad (\text{П.7})$$

Как следует из определений и формулы (П.4), обычные (нетемпературные) функции Грина связаны со спектральной плотностью следующими формулами:

$${}^r D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma) = (2\pi)^{-1} \int (e^{\beta\omega} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, k_c) (k_0 - \omega - i\varepsilon)^{-1} d\omega, \quad (\text{П.8})$$

$${}^a D_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma) = (2\pi)^{-1} \int (e^{\beta\omega} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, k_c) (k_0 - \omega + i\varepsilon)^{-1} d\omega, \quad (\text{П.9})$$

$$L_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma) = (2\pi)^{-1} i \int (e^{\beta\omega} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, k_c) \omega^{-1} (k_0 - \omega - i\varepsilon)^{-1} d\omega, \quad (\text{П.10})$$

где ε — бесконечно малая положительная величина.

Температурные функции Грина ${}^m D_{AB}^{\alpha\beta}(\tau, x^\gamma)$ периодические по параметру τ с периодом β . Для соответствующего дискретного фурье-спектра ζn , $\zeta = 2\pi T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, справедлива формула

$${}^m D_{ABF}^{\alpha\beta}(\zeta n, k_c) = -(2\pi)^{-1} \int (e^{\beta\omega} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(\omega, k_c) (i\zeta n - \omega)^{-1} d\omega. \quad (\text{П.11})$$

Из (П.10), (П.4) следует соотношение

$$L_{ABF}^{\alpha\beta}(k_\gamma) + L_{BAF}^{\beta\alpha}(-k_\gamma) = -(k_0)^{-1} (e^{\beta k_0} - 1) S_{AB}^{\alpha\beta}(k_\gamma). \quad (\text{П.12})$$

2. Ниже приведены некоторые формулы, связанные со спектральной функцией скалярного поля.

Разлагая произведение квантовых операторов в сумму матричных элементов для базиса из собственных векторов 4-оператора энергии-импульса, получаем выражение

$$\begin{aligned} \sigma(x^\alpha) &= \langle \varphi_I(x^\alpha) \varphi_I(0) \rangle_0 = \\ &= \sum_{n,m} \exp(-i(p_\alpha(n) - p_\alpha(m))x^\alpha) \exp(-\beta p_0(m)) |\langle m | \varphi_I(0) | n \rangle|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Переходя к фурье-образу, находим представление для спектральной функции

$$\begin{aligned} \rho(k_\alpha) &= (2\pi)^{-4} \sum_{n,m} \delta(k_\alpha + (p_\alpha(n) - p_\alpha(m))) \times \\ &\times \exp(-\beta p_0(m)) |\langle m | \varphi_I(0) | n \rangle|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Из формулы (П.14) следуют ряд свойств спектральной функции:

$$\begin{aligned} \rho(-k_\alpha) &= \exp(\beta k_0) \rho(k_\alpha), \\ \rho(k_\alpha) &= \rho(k_\alpha)^* \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Из формул (П.13)–(П.15) следует выражение для мацубаровского пропагатора

$${}^m G_F(\zeta n, k_a) = -(2\pi)^{-1} \int (e^{\beta\omega} - 1) \rho(\omega, k_a) (i\zeta n - \omega)^{-1} d\omega. \quad (\text{П.16})$$

Список литературы

- [1] Д.Н. Зубарев. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
- [2] А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
- [3] W.A. Hiscock, L. Lindblom // Phys. Rev. D. 1985. V. 31. № 4. P. 725–733.
- [4] B. Carter // Lect. Notes in Math. 1989. V. 1385. P. 1–64.
- [5] W. Israel // Lect. Notes in Math. 1989. V. 1385. P. 152–210.
- [6] О.Ю. Динариев // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095–1097.
- [7] О.Ю. Динариев // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 250–259.
- [8] О.Ю. Динариев // Изв. вузов. Физика. 1993. № 5. С. 13–18.
- [9] О.Ю. Динариев // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 1(7). С. 161–171.
- [10] О.Ю. Динариев // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 6. С. 1877–1894.
- [11] О.Ю. Динариев // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. Вып. 5. С. 1573–1586.
- [12] А.Д. Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
- [13] Ю.С. Гангус, А.В. Прозоркевич, С.А. Смолянский // ТМФ. 1978. Т. 35. № 1. С. 68–75.
- [14] A. Hosooya, M. Sakagami, M. Takao // Ann. of Phys. 1984. V. 154. № 1. P. 229–252.
- [15] Ж. Эмт. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
- [16] Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, А.И. Оксак, И.Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [17] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962.
- [18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1978.
- [19] О.Ю. Динариев // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 3. С. 615–618.
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [21] C. Eckart // Phys. Rev. 1940. V. 58. № 10. P. 919–924.
- [22] U. Kraemmer, M. Kreuzer, A. Rebhan, H. Schulz // Lect. Notes in Phys. 1990. V. 361. P. 285–295.

Объединенный институт физики Земли
им. О.Ю. Шмидта
Российской академии наук

Поступила в редакцию
22.VI.1995 г.

О. Yu. Dinarev

NONLOCAL HYDRODYNAMICS IN THE QUANTUM FIELD MODEL φ^4

A procedure of passing from the quantum statistic mechanics to hydrodynamics previously found by the author is applied to the quantum field model φ^4 . In a certain class of external forces the equations of the quantum many-body system are shown to be equivalent to the equations of the nonlocal hydrodynamics. Hydrodynamic nonlocalities arising in the constituent relations are expressed via Green's functions for currents. By using the general symmetry properties a number of properties for the nonlocality kernels is deduced. In particular, conditions related to dissipativity and to T -invariance of the φ^4 model (an analogue of Onsager's relations) are established. The connection of the classical transport coefficients with the nonlocality kernels is found. An algorithm for calculating the constituent relations by the perturbation theory on a base of the technique of temperature Green's functions is described.