Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Власов, Гравитационное поле расширяющейся сферически-симметричной оболочки в РТГ в линейном приближении по скорости, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 1, 79–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:03:32

А. А. Власов

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ В РТГ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПО СКОРОСТИ

Показано, как в соответствии со спецификой теоремы Биркгофа в РТГ возникает физическая нестатичность в метрике расширяющейся оболочки в глобальной инерциальной системе координат в приближении, линейном по скорости расширения, но произвольном по величине гравитационного поля

В релятивистской теории гравитации (РТГ) [1, 2] теорема Биркгофа для сферически-симметричных конфигураций сводится к утверждению о существовании системы координат, в которой любая внешняя метрика искривленного пространства-времени для нестатического, но сферически-симметричного движения вещества принимает известный шварцшильдов вид. Однако в силу того, что в РТГ физически наблюдаемые величины строятся как с помощью метрики искривленного пространства-времени, так и метрики пространства Минковского истинное гравитационное поле в РТГ, отделенное от неинерциальных эффектов, будет тем не менее зависеть от характера движения вещества (в частности будет нестатическим в инерциальных координатах). Последнее существенно отличает [2] теорему Биркгофа в РТГ от теоремы Биркгофа в ОТО, где, как утверждается, любое внешнее гравитационное поле сферически-симметричного распределения будет статичным вне зависимости от характера движения вещества.

Данная специфика теоремы Биркгофа в РТГ была продемонстрирована в задаче о расширяющейся оболочке как в первом и втором приближениях по гравитационной постоянной (при этом величина скорости оболочки практически произвольна (но естественно меньше скорости света)) [2, 3, 4], так и в постньютоновском приближении [5]. При этом решение было найдено в классе ограниченных непрерывных функций для гравитационного поля дельта-образной оболочки и в классе ограниченных непрерывно дифференцируемых функций для гравитационного поля оболочки конечной толщины (напомним, что в ОТО известные точные решения для дельта-образной оболочки не являются непрерывными, а для оболочки конечной толщины не являются непрерывно дифференцируемыми).

В настоящей работе рассмотрена та же задача о расширяющейся оболочке, однако с другой стороны — а именно в первом приближении по величине скорости расширения оболочки, но при произвольной величине гравитационного поля.

Отметим, что метод нахождения решения нестатической задачи как первого прибли-

жения к точной статической задаче, линейного по скорости, не нов и был использован, например, в работе [6] для получения решения для постоянно вращающейся массивной сферической оболочки в ОТО.

Итак, в первом приближении по скорости уравнение движения оболочки массы m есть $R_0 + vt$, где $R_0 \gg vt$, а t – время глобальной инерциальной системы координат, т.е. параметром разложения является величина vt/R_0 (соответственно неравенство $vt/R_0 \ll 1$ определяет область применимости рассматриваемого метода). Следовательно, метрика оболочки в первом приближении может быть линейной по времени t . Далее именно такая метрика, непрерывная при переходе через границу оболочки, и будет строиться по методу теории возмущений.

Метрика искривленного пространства внутри (индекс $(-)$) и вне (индекс $(+)$) оболочки есть известное решение Шварцшильда в шварцшильдовых координатах $\tau_{\pm}, r_{\pm}$:

$$ds_{\pm}^2 = \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right) d\tau_{\pm}^2 - \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right)^{-1} dr_{\pm}^2 - r_{\pm}^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

где

$$m_{\pm} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Связь шварцшильдовых координат решения (1) с глобальными инерциальными координатами t, r ($\gamma_{ij}(t, r, \theta, \phi) = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$ – метрика пространства Минковского) в РТГ, использующей ковариантные уравнения гармоничности, определяется так [1, 2]:

$$\left[\left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_{\pm}^2} - \frac{1}{r_{\pm}^2} \frac{\partial}{\partial r_{\pm}} \left(r_{\pm}^2 \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right) \frac{\partial}{\partial r_{\pm}} \right) \right] t = 0, \quad (2)$$

$$\left[\left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_{\pm}^2} - \frac{1}{r_{\pm}^2} \frac{\partial}{\partial r_{\pm}} \left(r_{\pm}^2 \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right) \frac{\partial}{\partial r_{\pm}} \right) \right] r + \frac{2r}{r_{\pm}^2} = 0. \quad (3)$$

Для внешней области одно из возможных точных стационарных решений уравнений (1)–(3) при асимптотических условиях $t \rightarrow \tau_+$, $r \rightarrow r_+$ при $r_+ \rightarrow \infty$ известно [2]:

$$t = \tau_+ + A \ln \left(1 - \frac{2m}{r_+} \right), \quad (4)$$

$$r = r_+ - m + D \left[\frac{r_+ - m}{2m} \ln \left(1 - \frac{2m}{r_+} \right) + 1 \right]. \quad (5)$$

Для чисто статического решения параметр A в (4) нулевой.

Отмеченная выше линейная зависимость от времени t метрики расширяющейся оболочки в инерциальных координатах в первом приближении по скорости возникает при линейной зависимости “параметров” A и D от времени τ_+ :

$$A = v(A_0 + \tau_+ A_1), \quad D = D_0 + v\tau_+ D_1. \quad (6)$$

Здесь выделена явная зависимость от скорости v , при $v = 0$ имеем точное статическое решение.

Соотношения (4)–(6) являются точными линейными по времени решениями уравнений (2)–(3), что легко проверяется прямой подстановкой.

Таким образом, в глобальных инерциальных координатах внешняя шварцшильдова метрика (1) в первом по скорости приближении, но при произвольной величине гравитационного поля принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2m}{r_+}\right) \left(1 - 2vA_1 \ln\left(1 - \frac{2m}{r_+}\right)\right), \\ g_{01} &= v \left[-\frac{2mr'_+(A_0 + tA_1)}{r_+^2} + \left(1 - \frac{2m_{\pm}}{r_{\pm}}\right)^{-1} r'^2_+ D_1 \left(\frac{r_+ - m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{r_+}\right) + 1\right) \right], \\ g_{11} &= -\left(1 - \frac{2m}{r_+}\right)^{-1} r'^2_+ \left[1 - 2vD_1 tr'_+ \left(\frac{1}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{r_+}\right) + \frac{(r_+ - m)}{r_+^2 (1 - \frac{2m}{r_+})}\right) \right], \\ g_{22} &= -r_+^2, \quad g_{33} = -r_+^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь зависимость $r_+ = r_+(t, r)$ задается соотношением (5), штрих означает производную по r , вычисляемую из соотношения (5) при $D_1 = 0$.

Заметим, что решение (5) с линейной зависимостью “параметра” D от времени было предложено в работе [7] как одно из возможных точных решений внешней нестатической сферически-симметричной задачи в РТГ.

На границе расширяющейся оболочки метрика (7) должна непрерывно переходить в решение внутренней задачи, задаваемой соотношениями (1)–(3) при $m_- = 0$.

Внутренняя метрика нашей задачи в инерциальных координатах также может быть линейной по времени t и не должна иметь особенностей при $r = 0$. Этим требованиям удовлетворяет следующее точное линейное по скорости решение уравнений (2)–(3):

$$\begin{aligned} t &= \tau_- / \tau_0 + vB_2(3a^2(\tau_- / \tau_0)^2 + (r_- / r_0)^2), \\ r &= r_- / r_0 + vB_3(\tau_- / \tau_0)(r_- / r_0), \end{aligned} \quad (8)$$

где $a = \tau_0 / r_0$, r_0 , τ_0 , B_2 , B_3 – параметры задачи.

С использованием (8) внутреннее решение (1) в инерциальных координатах приобретает вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= (\tau_0)^2(1 - 12vB_2a^2t), \quad g_{01} = vr(B_3(r_0)^2 - 2B_2(\tau_0)^2), \\ g_{11} &= -(r_0)^2(1 - 2vB_3t), \quad g_{22} = -(r_0r)^2(1 - 2vB_3t), \quad g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

На границе расширяющейся по закону $R_0 + vt$ оболочки внутренняя (9) и внешняя (7) метрики должны быть непрерывны. Это приводит к следующей разрешимой алгебраической системе уравнений на параметры решений:

$$(\tau_0)^2 = 1 - \frac{2m}{x}, \quad (10a)$$

$$(r_0)^2 = \frac{x'^2}{1 - \frac{2m}{x}}, \quad (10б)$$

$$(r_0 R_0)^2 = x^2, \quad (10в)$$

$$-6(\tau_0)^2 B_2 a^2 = \frac{mx'}{x^2} - A_1 \left(1 - \frac{2m}{x}\right) \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + \\ + D_1 \frac{m}{x^2 x'} \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right], \quad (10г)$$

$$R_0((r_0)^2 B_3 - 2(\tau_0)^2 B_2) = -(A_0 + tA_1) \frac{2mx'}{x^2} + \\ + D_1 \left(1 - \frac{2m}{x}\right)^{-1} x'^2 \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right], \quad (10д)$$

$$-(r_0)^2 B_3 = \frac{x'^2}{1 - \frac{2m}{x}} \left(\frac{x''}{x'} - \frac{mx'}{x^2(1 - \frac{2m}{x})} \right) - \\ - \frac{x'^2}{1 - \frac{2m}{x}} D_1 \left[x' \left(\frac{1}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + \frac{x-m}{x^2(1 - \frac{2m}{x})} \right) - \right. \\ \left. - \frac{m}{(1 - \frac{2m}{x})x^2 x'} \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right] \right], \quad (10е)$$

$$(r_0 R_0)^2 \left(-B_3 + \frac{1}{R_0} \right) = xx' - D_1 \frac{x}{x'} \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right], \quad (10ж)$$

где введены обозначения $r_+(R_0) = x$, $r'_+(R_0) = x'$, $r''_+(R_0) = x''$, а зависимость $r_+(R_0)$ определяется из соотношения (5) при $D_1 = 0$ и $r = R_0$.

Уравнения (10а)-(10в) определяют параметры τ_0 , r_0 , D_0 как функции от массы оболочки m и ее статического радиуса R_0 и являются стандартными для статической задачи в РТГ (см., например, [8]), остальные уравнения решаются так:

$$A_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{m}{6x'x^2(1 - \frac{2m}{x})^3}, \\ B_3 = \frac{1}{R_0} - \frac{x'}{x} + D_1 \frac{1}{xx'} \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right], \\ D_1 = \frac{\frac{x''}{x'} - \frac{x'}{x} - \frac{mx'}{x^2(1 - \frac{2m}{x})} + \frac{1}{R_0}}{x' \left(\frac{1}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + \frac{x-m}{x^2(1 - \frac{2m}{x})} \right) + \frac{m}{(1 - \frac{2m}{x})x^2 x'} \left[\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right]}, \\ A_0 = \frac{x^2}{2mx'} \left[-\frac{x^2}{(R_0)^2} + \frac{xx'}{R_0} - \frac{mx'}{3R_0(1 - \frac{2m}{x})} + \right. \\ \left. + \left(\frac{x^2}{(R_0)^2} - \frac{x}{x'R_0} \right) D_1 \left(\frac{x-m}{2m} \ln\left(1 - \frac{2m}{x}\right) + 1 \right) \right], \quad (11)$$

Итак, в классе непрерывных линейных по скорости метрик найденное решение (7)–(11) будет единственным в РТГ, удовлетворяющим условию сшивки, условию в нуле и на бесконечности.

Отметим, что вид преобразований координат от шварцшильдовых к глобальным инерциальным (4), (5), (8), (11), а следовательно, и сам вид метрики в пределе слабого поля переходят в соответствующие выражения работ [2–4] внутри и вне оболочки в первом по скорости v и гравитационной постоянной приближении.

Аналогичную процедуру разложения для поиска нестатического решения можно продолжить и в других порядках теории возмущений. При этом соответствующие метрические коэффициенты в n -порядке могут содержать члены, оцениваемые как $(vt/R_0)^n$.

Физическую наблюдаемость найденного нестатического поведения решения в РТГ можно выявить следующим образом.

Ковариантное выражение для 4-вектора ускорения F^i пробной частицы, обладающей 4-скоростью u^i , в РТГ будет следующим [1, 2]:

$$\frac{Du^i}{ds} = F^i = -\Delta_{mn}^i u^m u^n,$$

где Δ_{mn}^i — ковариантный символ Кристоффеля, построенный из традиционного символа Кристоффеля Γ_{mn}^i заменой частных производных ковариантными производными по метрике пространства Минковского γ_{ij} . Модуль ускорения $F = \sqrt{F^i F_i}$ является как явно координатно инвариантной величиной, так и физически наблюдаемой величиной.

В частности, величина F внутри расширяющейся оболочки для покоящегося наблюдателя в силу формул (9) равна

$$F = |6vB_2 a^2 \tau_0|, \quad (12)$$

т.е. отлична от нуля и явно зависит как от скорости расширения оболочки, так и от ее массы и статического радиуса.

Таким образом, еще раз подтверждено, что в инерциальных координатах метрика расширяющейся оболочки оказывается явно зависящей от времени и этот результат справедлив для любых величин гравитационного поля и в линейном по скорости оболочки приближении и приводит к реально наблюдаемым эффектам.

Список литературы

- [1] А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили.. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [2] А.А. Власов.. Некалибровочный подход в РТГ. М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [3] А.А. Власов, О.В. Моноковский // ТМФ. 1992. Т. 91. №2. С. 334–345.
- [4] О.В. Моноковский.. Канд. дис. МГУ: физ. ф-т, 1994.
- [5] А.А. Власов, О.В. Моноковский.. Препринт НИИЯФ МГУ 93-2/294. М.: МГУ, 1993.
- [6] J.M. Cohen. Relativity and Astrophysics. 1. Relativity and Cosmology / Ed. J.Ehlers. Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1967. P. 200.
- [7] А.В. Генк // ТМФ. 1991. Т. 88. №2. С. 272–285.
- [8] С.Н. Соколов // ТМФ. 1990. Т. 85. №2. С. 313–320.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
16.VIII.1995 г.

A. A. Vlasov

GRAVITATIONAL FIELD OF EXPANDING SPHERICALLY SYMMETRIC SHELL IN RTG IN LINEAR VELOCITY APPROXIMATION

The appearance of the nonstatic behaviour of gravitational field of an expanding spherically symmetric shell in linear velocity approximation in the frame of RTG is shown.