Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, П. Б. Медведев, Градуированные структуры Пуассона–Ли на общей линейной группе, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 1, 84–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:37:34

Г. Э. Арутюнов, П. Б. Медведев

ГРАДУИРОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–ЛИ НА ОБЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

Внешняя алгебра $\mathcal{M}$ над кокасательным расслоением к группе $GL(N)$ снабжена градуированными скобками Пуассона, совместными с групповым действием. Доказано, что существуют только две соответствующие супералгебры Пуассона–Хопфа на $\mathcal{M}$, для которых получено явное описание. Показано, что именно эти супералгебры возникают в квазиклассическом пределе биковариантного дифференциального исчисления на квантовой линейной группе $GL_q(N)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет предпринимался ряд попыток разработать калибровочную теорию, в которой роль группы локальной симметрии играла бы квантовая группа [1–5]. Хорошо известно, что описание обычных калибровочных теорий осуществляется в рамках дифференциальной геометрии, и поэтому так же естественно использовать дифференциально-геометрический язык для формулировки квантово-групповых теорий.

Одной из важнейших конструкций дифференциальной геометрии является исчисление внешних форм на группе Ли. Возможные алгебраические структуры дифференциального исчисления на квантовых группах $SU_q(N)$, $SO_q(N)$ были предложены в работах [6–8], а для группы $GL_q(N)$ – в [9, 10]. Позднее было установлено, что эти структуры выражаются на языке квантовой R -матрицы [11–13]. Отметим также работу [14], в которой некоторые понятия обычной дифференциальной геометрии были обобщены на случай квантовых групп.

В теории квантовых групп [15] имеется важное представление о квантовых группах, как об алгебраических объектах, являющихся результатом квантования (деформации) соответствующих классических структур [16–19]. А именно, алгебра регулярных функций на группе Ли может быть снабжена скобкой Пуассона, совместной с групповым умножением. Такая группа называется группой Пуассона–Ли. Для случая простых групп Ли все структуры Пуассона–Ли определяются классической r -матрицей, т.е. решением классического уравнения Янга–Бакстера (ЯБ). Рассматриваемая скобка задает росток квантования алгебры функций на группе в категории алгебр Хопфа. Получаемая в результате квантования некоммутативная алгебра $\mathcal{N}_h$ называется алгеброй функций на квантовой группе. Ее определяющие соотношения задаются при помощи квантовой $R(h)$ -матрицы, т.е. матричного решения квантового уравнения ЯБ $RTT = TTR$ [15], разлагающегося в ряд по параметру деформации h : $R(h) = 1 + hr + o(h)$ [20].

Несмотря на наличие обширной литературы по квантовому дифференциальному исчислению вопрос о структурах Пуассона–Ли на комплексе де Рама, связанном с группой Ли, не получил своего развития. В настоящей работе, являющейся расширенной версией препринта [21], мы намереваемся заполнить этот пробел.

Мы рассматриваем группу $G = GL(N)$, снабженную специальной структурой Пуассона–Ли. Эта структура задается скобкой Складина [17] с r -матрицей, являющейся поднятием канонической r -матрицы для $SL(N)$. Мы показываем, что структура Пуассона–Ли на алгебре функций на G может быть продолжена на внешнюю алгебру дифференциальных форм. Как будет доказано, на этом комплексе существует пара градуированных скобок Пуассона, определяемых той же r -матрицей, что и скобка Складина.

Далее мы рассматриваем связь с квантовым дифференциальным исчислением. Явное вычисление показывает, что квазиклассический предел внешней алгебры на квантовой группе $GL_q(N)$ [22] представляет собой не что иное, как описанную выше градуированную структуру Пуассона–Ли. При этом некоторые из конструкций квантового дифференциального исчисления находят свое естественное объяснение в аналогичных структурах внешней алгебры Пуассона–Ли.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приведены основные понятия алгебр Хопфа, необходимые для постановки задачи. В разделе 3 определена супералгебра $\mathcal{M}$ и сформулированы условия совместности градуированной скобки Пуассона на $\mathcal{M}$ с групповым умножением. Решая эти условия вместе с градуированным тождеством Якоби, мы находим явную формулу для скобки Пуассона–Ли на $\mathcal{M}$. В разделе 4 полученный на языке алгебр Хопфа результат формулируется в дифференциально-геометрических терминах. Таким путем мы получаем градуированные структуры Пуассона–Ли на внешней алгебре кокасательного расслоения к группе G . Наконец, в разделе 5 показано, что квазиклассический предел комплекса внешних форм на $GL_q(N)$ совпадает с найденной для $GL(N)$ структурой. Раздел 6 посвящен обсуждению возможных обобщений предложенного подхода.

2. ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для того чтобы определить структуру Пуассона–Ли, нам понадобится понятие алгебры Хопфа. Напомним некоторые определения [15, 16].

Ассоциативная унитарная алгебра $\mathcal{A}$ называется алгеброй Хопфа $(\mathcal{A}, \cdot, k)$ над полем k , если она снабжена операцией копроизведения $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (гомоморфизм алгебр), коединицей $\varepsilon: \mathcal{A} \rightarrow k$ (гомоморфизм алгебр) и антиподом $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (антигомоморфизм алгебр), удовлетворяющим следующему набору аксиом:

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta(a) = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta(a), \quad (\varepsilon \otimes \text{id})\Delta(a) = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta(a) = a, \quad (2.1)$$

$$\cdot(S \otimes \text{id})\Delta(a) = \cdot(\text{id} \otimes S)\Delta(a) = 1\varepsilon(a), \quad \Delta(S(a)) = \sigma(S \otimes S)\Delta(a), \quad (2.2)$$

$$\varepsilon(S(a)) = \varepsilon(a), \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad S(1) = 1, \quad \varepsilon(1) = 1, \quad (2.3)$$

где σ – оператор перестановки $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$, $a, b \in \mathcal{A}$.

Пусть G – группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли с базисом $\{e_\mu\}$. Классическим примером алгебры Хопфа является коммутативная алгебра $\text{Fun}(G)$ функции на G . Соответствующие Δ , ε и S задаются формулами

$$\Delta f(g_1, g_2) = f(g_1 g_2), \quad (\varepsilon f)(g) = f(e), \quad (Sf)(g) = f(g^{-1}),$$

где e – единица группы, а $\text{Fun } G \otimes \text{Fun } G$ отождествляется с $\text{Fun}(G \times G)$.

Пусть G снабжена скобкой Пуассона $\{.,.\}_G$:

$$\{f, h\}_G(g) = \eta^{\mu\nu}(g) \partial_\mu f \partial_\nu h, \quad (2.4)$$

где $\eta(g) = \eta^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$ – пуассонов тензор, а ∂_μ обозначает левоинвариантное векторное поле на G , соответствующее e_μ . G называется группой Пуассона–Ли, если

$$\Delta\{f, h\}_G = \{\Delta(f), \Delta(h)\}_{G \otimes G} \quad (2.5)$$

для любых $f, h \in \text{Fun}(G)$. Для простых групп Ли все решения уравнения (2.5) имеют вид

$$\eta(g) = \text{Ad}_{g^{-1}} r - r,$$

где

$$r = r^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \quad (2.6)$$

есть классическая r -матрица, т.е. решение уравнения ЯБ.

Для матричных групп Ли подходящую систему генераторов $\text{Fun}(G)$ составляют матричные элементы матрицы $T = \|t_i^j\|$ фундаментального представления G . В дальнейшем мы будем отождествлять функции на G с формальными степенными рядами по переменным t_i^j . Для случая простых групп Ли скобка Пуассона–Ли принимает на указанных генераторах следующий вид [17]:

$$\{t_i^j, t_k^l\} = r_{ik}^{mn} t_m^j t_n^l - t_i^m t_k^n r_{mn}^{jl}, \quad (2.7)$$

где r_{ik}^{mn} – r -матрица (2.6) в соответствующем представлении $\mathcal{G}$.

В этой статье изучается случай группы $GL(N)$, которая не является простой. Однако для последующих деформаций в первую очередь важны решения, связанные с классической r -матрицей. Таким образом, следуя [15], мы определим структуру Пуассона–Ли на $GL(N)$ формулой (2.7), где r является тривиальным поднятием r -матрицы для $SL(N)$. В силу важности для дальнейшего отметим, что скобка (2.7) вырождена и функция $\det T$ – ее функция Казимира:

$$\{t_i^j, \det T\} = 0. \quad (2.8)$$

Фиксируя $\det T = 1$, мы получаем структуру Пуассона–Ли на $SL(N)$.

Нам понадобится еще один факт из дифференциальной геометрии. Пусть $\mathcal{G}^*$ обозначает дуальное пространство к $\mathcal{G}$. Кокасательное расслоение T^*G над G тривиализуется посредством правого (левого) действия G : $T^*G \approx G \times \mathcal{G}^*$. Определим на G правоинвариантную форму Маурера–Картана θ_g со значениями в $\mathcal{G}$:

$$\theta_g(X_g) = X_e,$$

где X_g – правоинвариантное векторное поле, соответствующее элементу $X_e \in \mathcal{G}$. Под действием левого сдвига $g \rightarrow g_1 g$ форма θ_g преобразуется следующим образом:

$$\theta_g \rightarrow \theta_{g_1 g} = g_1 \theta_g g_1^{-1} + dg_1 g_1^{-1}. \quad (2.9)$$

Заметим, что правую часть (2.9) можно рассматривать как дифференциальную форму на $G \times G$. Отождествляя $T^*(G \times G) \approx T^*G \otimes T^*G$, формулу (2.9) можно представить в виде

$$\theta_g \rightarrow \theta_{g_1 g} = (g_1 \otimes I)(I \otimes \theta_g)(g_1^{-1} \otimes I) + \theta_{g_1} \otimes I. \quad (2.10)$$

3. ГРАДУИРОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ПУАССОНА–ХОПФА НА $GL(N)$

Для того чтобы описать внешнюю алгебру правоинвариантных форм, добавим к набору t_i^j новые антикоммутирующие генераторы θ_i^j . По определению $\mathcal{M}$ есть свободная ассоциативная алгебра, порождаемая образующими t_i^j, θ_i^j, t и соотношениями

$$\begin{aligned} t_i^j t_k^l &= t_k^l t_i^j, & t t_i^j &= t_i^j t, & t \det T &= I, \\ t_i^j \theta_k^l &= \theta_k^l t_i^j, & t \theta_i^j &= \theta_i^j t, & \theta_i^j \theta_k^l &= -\theta_k^l \theta_i^j. \end{aligned}$$

Алгебра $\mathcal{M}$ имеет естественную градуировку $\deg(t_i^j) = 0$ и $\deg(\theta_i^j) = 1$.

Превратим пространство $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ в алгебру, введя следующее умножение:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{\deg b \deg c} (ac \otimes bd) \quad (3.1)$$

для любых $a, b, c, d \in \mathcal{M}$. Снабдим теперь $\mathcal{M}$ структурой Z_2 -градуированной алгебры Хопфа, определяя следующее действие Δ, ε, S на генераторах t_i^j, θ_i^j, t :

$$\Delta t_i^j = t_i^k \otimes t_k^l, \quad \varepsilon(t_i^j) = \delta_i^j, \quad S(t_i^j) = t \hat{t}_j^i, \quad (3.2)$$

$$\Delta \theta_i^j = \theta_i^j \otimes I + t_i^k S(t_p^j) \otimes \theta_k^p, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon(\theta_i^j) = 0, \quad S(\theta_i^j) = -S(t_i^k) \theta_k^p t_p^j, \quad (3.4)$$

$$\Delta(t) = t \otimes t, \quad \varepsilon(t) = 1, \quad S(t) = \det T, \quad (3.5)$$

где в стандартных обозначениях $\|t_i^j\|^{-1} = t \|\hat{t}_j^i\|$.

На произвольный элемент из $\mathcal{M}$ Δ, ε расширяются как гомоморфизмы, а S – как антигомоморфизм. Копроизведение (3.3) копирует закон преобразования правоинвариантных форм на группе Ли (см. (2.9), (2.10)). Отметим, что уравнение (3.3) было введено в [23–25] как копроизведение для квантовых внешних форм на $GL_q(N)$.

Наша основная цель заключается в том, чтобы снабдить $\mathcal{M}$ пуассоновой структурой, совместной с имеющимся на ней копроизведением. Это означает следующее. Введем билинейную операцию $\{, \}$: $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, которую будем называть скобкой. Поскольку алгебра $\mathcal{M}$ имеет четные и нечетные генераторы, естественно потребовать выполнения на ее однородных элементах супертождества Якоби:

$$(-1)^{\deg a \deg c} \{ \{a, b\}, c \} + (-1)^{\deg b \deg c} \{ \{c, a\}, b \} + (-1)^{\deg a \deg b} \{ \{b, c\}, a \} = 0, \quad (3.6)$$

градуированного правила Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \{b, c\} + (-1)^{\deg b \deg c} \{a, c\} b, \quad (3.7)$$

и градуированного свойства симметрии:

$$\{a, b\} = (-1)^{\deg a \deg b + 1} \{b, a\}, \quad \deg \{a, b\} = (\deg a + \deg b) \bmod 2. \quad (3.8)$$

Потребуем, чтобы скобка была совместна с копроизведением Δ :

$$\Delta\{a, b\}_{\mathcal{M}} = \{\Delta(a), \Delta(b)\}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}}, \quad (3.9)$$

где скобка на $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$ имеет вид

$$\{a \otimes b, c \otimes d\}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}} = (-1)^{\deg b \deg c} \{a, c\}_{\mathcal{M}} \otimes bd + (-1)^{\deg b \deg c} ac \otimes \{b, d\} \quad (3.10)$$

для любых однородных $a, b, c, d \in \mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Градуированная алгебра Хопфа $\mathcal{M}$ со скобкой, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, называется супералгеброй Пуассона–Хопфа.

Чтобы определить скобку на $\mathcal{M}$, достаточно задать ее на генераторах t_i^j, θ_i^j и затем расширить на всю алгебру по правилу Лейбница.

Подалгебра $\mathcal{N}$, порожденная t_i^j и t , является хопфовой подалгеброй и может быть отождествлена с коммутативной алгеброй функций на $GL(N)$. Таким образом, мы зададим на $\mathcal{N}$ скобку (2.7), описанную в разделе 2:

$$\{T_1, T_2\} = [r_+, T_1 T_2]. \quad (3.11)$$

Здесь мы использовали стандартные тензорные обозначения: $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$. Матрица r_+ удовлетворяет уравнению ЯБ и условию

$$Pr_+P + r_+ = 2P, \quad (3.12)$$

где $P_{ik}^{sp} = \delta_i^p \delta_k^s$ есть матрица оператора перестановки. Наша задача заключается в том, чтобы расширить эту скобку на $\mathcal{N}$ до структуры Пуассона–Хопфа на $\mathcal{M}$.

Общее выражение для скобки, содержащей генераторы θ и T , определяется градуировкой (3.8):

$$\{\theta_i^j, t_k^l\} = C_{ik}^{jl} \theta_s^m \theta_s^m + C_{ik}^{jl} \theta_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2 j_3} \theta_{j_1}^{i_1} \theta_{j_2}^{i_2} \theta_{j_3}^{i_3} + \dots \quad (3.13)$$

Структурные коэффициенты, входящие в (3.13), являются функциями четных генераторов t_i^j . Применяя Δ к обеим частям этой формулы, налагая (3.9) и тождество Якоби

$$\sum_{\text{ц.п.}} \{\{\theta_1, T_2\}, T_3\} = 0,$$

получаем систему уравнений для определения тензоров C . Вычисления собраны в приложении А. Здесь мы приведем результаты.

Все скобки естественным образом делятся на два семейства. В первом из них скобки зависят от двух непрерывных параметров α и β и знака $\pm$ числа m (см. (3.15) ниже):

$$\{\theta_1, T_2\}_{\alpha, \beta}^{\pm} = \alpha \theta_2 T_2 + r_{\pm}^{12} \theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\mp}^{12} T_2 + \alpha_2 \operatorname{tr} \theta T_2 + \alpha_3 \operatorname{tr} \theta P^{12} T_2 + \beta \theta_1 T_2, \quad (3.14)$$

где $r_- = r_+ - 2P$,

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha^2}{m + \alpha N}, \quad \alpha_3 = -\frac{\alpha m}{m + \alpha N}, \quad \alpha \neq -\frac{m}{N}, \quad m = \pm 2. \quad (3.15)$$

Для второго семейства имеем

$$\{\theta_1, T_2\}_{\alpha_2, \beta}^{\pm} = r_{\pm}^{12} \theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\pm}^{12} T_2 + \alpha_2 \operatorname{tr} \theta T_2 + \beta \theta_1 T_2, \quad (3.16)$$

где на этот раз α_2, β произвольны.

Аналогичным образом для скобки $\{\theta, \theta\}$ мы находим (вычисления приведены в приложении Б)

$$\begin{aligned} \{\theta_1, \theta_2\}_{\alpha}^{\pm} = & \alpha(\theta_1 \theta_1 + \theta_2 \theta_2) + r_+^{12} \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 r_+^{12} - \\ & - \theta_1 \left(r_+^{12} - \frac{m+2}{2} P^{12} \right) \theta_2 + \theta_2 \left(r_+^{12} + \frac{m-2}{2} P^{12} \right) \theta_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подчеркнем, что эта скобка продолжает скобку $\{\theta, T\}$ только из первого семейства. Скобки из второго семейства не имеют расширений, совместных с копроизведением Δ . В (3.17) $m = \pm 2$ в соответствии с выбранным знаком m в скобке (3.14).

Необходимо также проверить выполнение тождеств

$$\sum (-1)^{\deg(1) \deg(3)} \{ \{ \theta, \theta \}, T \} = 0, \quad (3.18)$$

$$\sum \{ \{ \theta, \theta \}, \theta \} = 0 \quad (3.19)$$

для пары скобок (3.14) и (3.17), однако сначала удобно изучить более детально их структуру.

Итак, мы имеем два ($\pm$) бесконечных семейства претендентов на скобки, определяемых уравнениями (2.7), (3.14), (3.17). Однако необходимо принять во внимание имеющийся произвол в выборе генераторов t_i^j и θ_i^j . Существует невырожденная замена

$$\begin{aligned} T & \rightarrow \tilde{T} = T(\det T)^s, \\ t & \rightarrow \tilde{t} = (t)^{N^{s+1}}, \\ \theta & \rightarrow \tilde{\theta} = \theta + k \operatorname{tr} \theta, \quad k, s \neq -1/N, \end{aligned} \quad (3.20)$$

которая не меняет форму копроизведения

$$\Delta \tilde{t}_i^j = \tilde{t}_i^k \otimes \tilde{t}_k^j, \quad \Delta \tilde{t} = \tilde{t} \otimes \tilde{t}, \quad \Delta \tilde{\theta}_i^j = \tilde{\theta}_i^j \otimes I + \tilde{t}_i^k S(\tilde{t}_p^j) \otimes \tilde{\theta}_k^p.$$

Следовательно, возникает естественный вопрос, что означает для скобок эта ковариантность копроизведения. Прежде всего можно убедиться, что скобка (3.11) не затрагивается преобразованием (3.20):

$$\{ \tilde{T}(T)_1, \tilde{T}(T)_2 \} = \{ \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \}|_{\tilde{T}=T \det(T)^s}. \quad (3.21)$$

Это прямо следует из центральности $\det T$ по отношению к скобке Складина. Выполним преобразование (3.20) и подсчитаем скобку $\{\tilde{\theta}, \tilde{T}\}_{\alpha, \beta}^{\pm}$ для некоторых α и β . Получаем

$$\{\tilde{\theta}(\theta)_1, \tilde{T}(T)_2\}_{\alpha, \beta}^{\pm} = \{\theta_1 + k \operatorname{tr} \theta I_1, T(\det T)_2^s\}_{\alpha, \beta}^{\pm} = \{\tilde{\theta}_1, \tilde{T}_2\}_{\alpha', \beta'}^{\pm} |_{\tilde{\theta} = \theta + k \operatorname{tr} \theta, \tilde{T} = T(\det T)^s}.$$

Та же ковариантность имеет место для скобки $\{\theta, \theta\}_{\alpha}^{\pm}$:

$$\{\tilde{\theta}(\theta)_1, \tilde{\theta}(\theta)_2\}_{\alpha}^{\pm} = \{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2\}_{\alpha'}^{\pm} |_{\tilde{\theta} = \theta + k \operatorname{tr} \theta}, \quad (3.22)$$

где в обоих случаях

$$\alpha' = \alpha + k(\alpha N + m), \quad \beta' = \beta + s(\beta N + m). \quad (3.23)$$

Таким образом, при замене генераторов (3.20) скобки $\{, \}_{\alpha, \beta}^{\pm}$ и $\{, \}_{\alpha}^{\pm}$ переходят в $\{, \}_{\alpha', \beta'}^{\pm}$ и $\{, \}_{\alpha'}^{\pm}$, соответственно, с α' и β' , вычисляемыми по формулам (3.23). Обратное утверждение также верно: для любых двух допустимых пар α, β и α', β' ($\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq -m/N$) найдутся такие k и s , при которых преобразование (3.20) превращает (α, β) -скобки в (α', β') -скобки.

Следовательно, подходящим выбором генераторов скобки приводятся к каноническому виду с $\alpha = 0 = \beta$:

$$\begin{aligned} \{\theta_1, T_2\}^{\pm} &= r_{\pm}^{12} \theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\mp}^{12} T_2, \\ \{\theta_1, \theta_2\}^{\pm} &= r_{+}^{12} \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 r_{+}^{12} - \theta_1 r_{\mp}^{12} \theta_2 + \theta_2 r_{\pm}^{12} \theta_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Теперь можно вернуться к доказательству тождеств (3.18), (3.19). Благодаря наличию отмеченной выше ковариантности достаточно проверить эти тождества для фиксированных значений α и β . Удобно выбрать каноническую форму (3.24). Прямым вычислением находим

$$\begin{aligned} \sum_{\operatorname{perm}} (-1)^{\delta} \{\{\theta_1, \theta_2\}^{\pm}, T_3\}^{\pm} &= C(r_+) \theta_1 \theta_2 T_3 + \theta_1 \theta_2 C(r_+) T_3 + \\ &+ \theta_2 C(r_+) \theta_1 T_3 - \theta_1 C(r_+) \theta_2 T_3, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\delta = \deg(1) \deg(3)$ и

$$\begin{aligned} \sum_{\operatorname{perm}} \{\{\theta_1, \theta_2\}^{\pm}, \theta_3\}^{\pm} &= C(r_+) \theta_1 \theta_2 \theta_3 - \theta_1 \theta_2 \theta_3 C(r_+) + \sum_{\operatorname{perm}} (\theta_1 \theta_2 C(r_+) \theta_3 - \\ &- \theta_1 C(r_+) \theta_2 \theta_3). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Отсюда, в соответствии с уравнением ЯБ: $C(r_+) = 0$, следует выполнение тождества Якоби.

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. 1. *Супералгебра Хопфа $\mathcal{M}$ допускает структуру супералгебры Пуассона–Хопфа, соответствующие градуированные скобки даются формулами (3.11), (3.14) и (3.17).*

2. *Для любой супералгебры Пуассона–Хопфа $\mathcal{M}$ существует изоморфизм (3.20) алгебр Хопфа, приводящий скобку Пуассона к каноническому виду (3.24).*

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В этом разделе мы сформулируем полученные результаты в дифференциально-геометрических терминах. Из рассмотрения предыдущего раздела следует, что необходимо зафиксировать координатную систему на G и базис правоинвариантных дифференциальных форм, который может быть отождествлен с набором генераторов супералгебры Хопфа $\mathcal{M}$.

Пусть $g = T_{\text{id}}(g)$ – тождественное представление G . Дифференциальные формы первого порядка, т.е. гладкие сечения кокасательного расслоения T^*G образуют бимодуль над $\text{Fun}(G)$. Линейный базис T^*G можно выбрать из право- (лево-) инвариантных форм следующим образом. Пусть θ_g – каноническая правоинвариантная форма на G со значениями в $\mathcal{G}$:

$$\theta_g(X_g) = X.$$

Мы рассматриваем X_g в левой части (3.24) как правоинвариантное векторное поле в точке $g \in G$, а в правой части – как матрицу из $\mathcal{G}$. Для $GL(N)$ $\theta_g = dg g^{-1}$. Матричные элементы θ_i^j образуют базис T^*G .

Возвращаясь к алгебре Хопфа $\mathcal{M}$, мы видим, что естественно отождествить генераторы t_i^j с g_i^j и θ_i^j матричными элементами формы θ_g . Таким образом, мы приходим к следующему определению

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формулы (3.11), (3.14) и (3.17) снабжают $\wedge T^*G$ градуированной структурой Пуассона–Ли.

Градуированная структура Пуассона–Ли позволяет ввести отображение $\wedge T^*G \rightarrow \wedge T^*G$, задаваемое формулой $f \rightarrow \{\Omega, f\}$, где Ω – 1-форма и $f \in \wedge T^*G$.

ТЕОРЕМА 2. Для заданных значений $\alpha = \beta$ существует единственная 1-форма $\Omega = \frac{1}{\alpha N + m} \text{tr } \theta_g$ такая, что оператор d внешней производной имеет вид

$$d\omega = \{\Omega, \omega\}_\alpha^\pm \quad (4.1)$$

для любой $\omega \in \wedge T^*G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим оператор $d_{\alpha, \beta}^\pm$, действующий следующим образом на генераторах t_i^j, θ_i^j :

$$d_{\alpha, \beta}^\pm g = \left\{ \frac{1}{\alpha N + m} \text{tr } \theta_g, g \right\}_{\alpha, \beta}^\pm, \quad d_{\alpha, \beta}^\pm \theta_g = \left\{ \frac{1}{\alpha N + m} \text{tr } \theta_g, \theta_g \right\}_\alpha^\pm. \quad (4.2)$$

Оператор $d_{\alpha, \beta}^\pm$ удовлетворяет правилу Лейбница, поскольку ему удовлетворяют скобки $\{, \}_{\alpha, \beta}^\pm$ и $\{, \}_\alpha^\pm$. Свойство $d_{\alpha, \beta}^2 = 0$ следует из тождества Якоби и $\{\text{tr } \theta, \text{tr } \theta\}_\alpha^\pm = 0$. Прямым вычислением находим

$$d_{\alpha, \beta}^\pm g = \left(\theta_g - \frac{\alpha - \beta}{\alpha N + m} \text{tr } \theta_g I \right) g \quad (4.3)$$

или в более знакомой форме

$$d_{\alpha, \beta}^\pm g g^{-1} = \theta_g - \frac{\alpha - \beta}{\alpha N + m} \text{tr } \theta_g I. \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что если и только если $\alpha = \beta$, мы получаем нужное действие $\alpha, \beta^\pm$ на g . При этом уравнение Маурера–Картана выполняется автоматически:

$$d_{\alpha, \beta}^\pm \theta_g = \theta_g \theta_g.$$

Предположим, что существует еще один элемент, скажем ν , который также генерирует d . Тогда для любой функции $f \in \mathcal{M}$

$$\left\{ \frac{1}{\alpha m + N} \operatorname{tr} \theta_g - \nu, f \right\}_\alpha^\pm = 0, \quad (4.5)$$

тогда как разность $\omega = \operatorname{tr} \theta_g / (\alpha m + N) - \nu$ есть 1-форма. Полагая $\omega = c_i^j(g) \theta_j^i$ и выбирая $f = \det g$, получаем

$$0 = \{c_i^j \theta_j^i, \det g\}_\alpha^\pm = \{c_i^j, \det g\}_\alpha^\pm \theta_j^i + c_i^j \{\theta_j^i, \det g\}_\alpha^\pm = c_i^j \theta_j^i \det g,$$

поскольку $\det g$ – центральный элемент скобки Склаянина. Следовательно, $\omega = 0$ и $\nu = \operatorname{tr} \theta_g / (\alpha N + m)$.

Заметим, что G имеет однопараметрическое семейство неэквивалентных фундаментальных представлений. В предыдущем разделе было описано двухпараметрическое семейство преобразований генераторов алгебры $\mathcal{M}$. Теперь мы свяжем их с заменами координатной системы в $\wedge T^*G$. Очевидно, что представления

$$T = (\det g)^s g, \quad s \neq -1/N, \quad (4.6)$$

не эквивалентны g , поскольку они отличаются величиной детерминанта: $\det T = (\det g)^{sN+1}$. Точка $s = -1/N$ запрещена, т.к. соответствующее представление становится неточным и потому не может служить глобальной координатной системой на G . Поэтому, отождествляя матричные элементы t_i^j матрицы $T(g)$ с набором координат на G , мы получаем бесконечное число неэквивалентных координатных систем, характеризуемых функцией $\xi(g) = \det T(g)$. Так же можно рассматривать линейные базисы в T^*G , порождаемые матричными элементами матриц $\theta = \theta_g + k \operatorname{tr} \theta_g I$, где k – число. Очевидно, что при правых (левых) сдвигах θ преобразуется так же, как и θ_g . Можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Для любой структуры Пуассона–Ли найдется координатная система в T^*G , в которой соответствующая скобка Пуассона принимает канонический вид.*

Появление двух семейств структур Пуассона–Ли есть отражение того факта, что скобка Склаянина может быть задана с помощью как r_+ , так и r_- матриц. Градуированные расширения скобки Склаянина на всю алгебру $\mathcal{M}$ уже зависят от выбора r -матрицы.

5. СВЯЗЬ С БИКОВАРИАНТНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ИСЧИСЛЕНИЕМ НА $GL_q(N)$

В этом разделе мы установим связь нашего классического рассмотрения с биковариантным дифференциальным исчислением на $GL_q(N)$, предложенным в [9–10]. А именно, мы покажем, что квазиклассический предел этого исчисления воспроизводит полученную выше градуированную структуру Пуассона–Ли.

Напомним некоторые определения. Пусть $R \in \text{Mat}(N, \mathbf{C}) \otimes \text{Mat}(N, \mathbf{C})$ – квантовая R -матрица, т.е. обратимое матричное решение квантового уравнения ЯБ, зависящее от параметра q ($q = \exp h$) [15]. Соответствующая биалгебра $\mathcal{N}_h$ – это некоммутативная алгебра, порожденная единицей I и N^2 генераторами t_i^j по модулю следующих соотношений:

$$RT_1T_2 = T_2T_1R. \quad (5.1)$$

Выберем R , соответствующую общей квантовой линейной группе $G_q = GL_q(N)$. Добавляя еще один генератор t и факторизуя $\mathcal{N}_h$ по соотношениям

$$t \cdot \det T = \det T \cdot t = I,$$

получаем алгебру Хопфа регулярных функций на G_q [15]. Копроизведение Δ и коединица ε задаются так:

$$\Delta(T) = T \otimes T, \quad \varepsilon(T) = I. \quad (5.2)$$

Рассмотрим биковариантное дифференциальное исчисление на G_q в матричной форме [11–13]. Это ассоциативная алгебра $\mathcal{M}_h$, порожденная символами T и dT по модулю квадратичных соотношений:

$$R_{\pm}T_1T_2 = T_2T_1R_{\pm}, \quad (5.3)$$

$$R_{\pm}(dT)_1T_2 = T_2(dT)_1R_{\mp}, \quad (5.4)$$

$$R_{\pm}(dT)_1(dT)_2 = -(dT)_2(dT)_1R_{\mp}. \quad (5.5)$$

Здесь использованы обозначения: $R_+ = R$, $R_- = \sigma(R^{-1})$, где σ – оператор перестановки. Мы также предполагаем, что R -матрица удовлетворяет тождеству Гекке:

$$R_+ = R_-^{-1} + \lambda P_{12}, \quad \lambda = q - 1/q. \quad (5.6)$$

Отметим, что в (5.3) можно выбрать любой знак. Знаки в (5.4) и (5.5) отражают существование двух различных биковариантных дифференциальных исчислений (следуя [6] мы будем называть их исчислениями “+” и “–”, соответственно). Вводя квантовую правоинвариантную форму $\theta = dTT^{-1}$, определяющие соотношения (5.4) и (5.5) можно переписать в виде

$$T_2\theta_1 = R_{\pm}\theta_1R_{\mp}^{-1}T_2, \quad (5.7)$$

$$R_{\pm}\theta_1R_{\mp}^{-1}\theta_2 = -\theta_2R_{\pm}\theta_1R_{\pm}^{-1}. \quad (5.8)$$

В работах [23–25] было показано, что алгебра с определяющими соотношениями (5.3)–(5.5) есть Z_2 -градуированная алгебра Хопфа со следующими коумножением Δ и коединицей ε :

$$\Delta(\theta) = \theta \otimes I + (T \otimes \theta)(S(T) \otimes I), \quad \varepsilon(\theta) = 0. \quad (5.9)$$

Пусть $\mathcal{M}$ – коммутативная алгебра Пуассона–Хопфа. Некоммутативная алгебра Хопфа $\mathcal{M}_h$ называется квантованием $\mathcal{M}$, если: 1) $\mathcal{M}_h$ – свободный модуль над кольцом $C[[h]]$, где h – параметр квантования; 2) $\mathcal{M}_h/h\mathcal{M}_h$ изоморфна $\mathcal{M}$ как алгебра Хопфа; 3) на $\mathcal{M}$ можно определить новую скобку Пуассона

$$\{a, b\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} [a, b] \right),$$

которая совпадает с заданной [16].

Предположим, что $R_{\pm}$ квазиклассична, т.е. $R_{\pm} = 1 + hr_{\pm} + o(h)$. Тогда квантовое уравнение ЯБ для $R_{\pm}$ сводится к уравнению ЯБ для $r_{\pm}$: $C(r_{\pm}) = 0$, в то время как (5.6) приводит к (3.12) для r_{+} .

Квазиклассическое разложение закона умножения в $\mathcal{M}_h$ имеет вид

$$T_2\theta_1 = \theta_1 T_2 + h(r_{\pm}^{12}\theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\mp}^{12} T_2) + O(h^2), \quad (5.10)$$

$$\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1 - h(r_{\pm}^{12}\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2 r_{\pm}^{12} - \theta_1 r_{\mp}^{12}\theta_2 + \theta_2 r_{\pm}^{12}\theta_1) + O(h^2). \quad (5.11)$$

Определим на алгебре $\mathcal{M}$ скобку Пуассона:

$$\{\theta_1, T_2\} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\theta_1, T_2]^{\pm}, \quad \{\theta_1, \theta_2\} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\theta_1, \theta_2]^{\pm}. \quad (5.12)$$

Здесь скобки $[,]$ обозначают градуированный коммутатор. Используя (5.10), (5.11), немедленно получаем, что правая часть (5.12) совпадает с каноническими скобками (3.24). Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Алгебра $\mathcal{M}_h$, описывающая биковариантное дифференциальное исчисление на G_q , есть квантование (деформация) супералгебры Пуассона–Хопфа $\mathcal{M}$ в категории Z_2 -градуированных алгебр Хопфа.*

Теперь можно видеть, что некоторые из конструкций [8, 22], предложенных для квантовых алгебр, имеют “классическое” происхождение. Мы оставляем детальное сравнение “классических” и “квантовых” результатов читателю, отметив только связь “классического” и “квантового” операторов внешнего дифференцирования.

Общее обсуждение квантового дифференциального исчисления содержится в [26]. Там же показано, что в некоммутативной градуированной алгебре оператор $\mathbf{d}$ внешнего дифференцирования можно определить формулой $\mathbf{d}a = [\Omega, a]$, где Ω – элемент степени 1, удовлетворяющий условию $[\Omega, \Omega] = 0$. Для случая квантовых групп это определение $\mathbf{d}$ было использовано в работе [6], а в [7, 8] предложена явная реализация Ω через квантовый след. Тот же элемент Ω входит в конструкцию биковариантного дифференциального исчисления на G_q [22]. Здесь мы рассмотрим квазиклассический предел этого дифференциала.

Следуя [8, 22] рассмотрим двустороннеинвариантный элемент $\Omega = \text{tr}_q \theta$, называемый квантовым следом формы θ :

$$\text{tr}_q \theta = \text{tr} (D\theta), \quad (5.13)$$

где D – числовая матрица $D = \text{diag}(1, q^2, \dots, q^{2(N-1)})$ [15]. Используя $\text{tr}_q \theta$, определим для “ $\pm$ ” исчислений следующий оператор:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\gamma} [\text{tr}_q \theta, \], \quad (5.14)$$

где $\gamma = \mu q^{2N-1}$ для “+” и $\gamma = \mu q^{-1}$ для “−” исчислений, соответственно. Из (5.8) имеем (см. [22]) условие нильпотентности $\mathbf{d}^2 = 0$ и уравнение Маурера–Картана $\mathbf{d}\theta = \theta^2$. Нетрудно также показать, что $\mathbf{d}T = dT$. Как и следует ожидать из проведенных выше рассуждений, в квазиклассическом пределе квантовый $\mathbf{d}$ воспроизводит (4.1). Таким образом, мы видим, что возможность квантования классического $\mathbf{d}$ прямо связана с возможностью его представления в виде градуированной скобки Пуассона с некоторой 1-формой.

Сделаем следующее важное замечание. Копроизведение в $\mathcal{M}$ не меняется при квантовании. Следовательно, естественно найти квантовый аналог преобразований (3.20). Покажем, что преобразования

$$\tilde{T} = T(\det_q T)^s, \quad \tilde{\theta} = \theta + k \operatorname{tr}(D\theta) \cdot I$$

не меняют форму копроизведения (5.2) и (5.9). Используя определение D -матрицы и уравнение (5.3), можно доказать тождество [22]

$$(D^{-1})^t T^t D^t S(T)^t = S(T)^t (D^{-1})^t T^t D^t = 1. \quad (5.15)$$

Применяя Δ к $\tilde{\theta}$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\theta}_i^j) &= (\theta_i^j + k \operatorname{tr}(D\theta)\delta_i^j) \otimes I + (t_i^r S(t_p^j) + k D_s^m t_m^r S(t_p^s)\delta_i^j) \otimes \theta_r^p = \\ &= \tilde{\theta}_i^j \otimes I + (t_i^r S(t_p^j) + k (T^t D^t S(T)^t)_r^p \delta_i^j) \otimes \theta_r^p. \end{aligned}$$

Из (5.15) и центральности $\det_q T$ в алгебре функций находим

$$\Delta(\tilde{\theta}_i^j) = \tilde{\theta}_i^j \otimes I + \tilde{t}_i^r S(\tilde{t}_p^j) \otimes \tilde{\theta}_r^p.$$

Отметим, что форма определяющих соотношений (5.7), (5.8) зависит от выбора T и θ , так же как и форма скобок (3.14) и (3.17) зависит от выбора генераторов алгебры.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели вопрос о возможности представления биковариантного дифференциального исчисления на квантовой группе как результата квантования градуированной структуры Пуассона–Ли. Градуированные структуры Пуассона–Ли определены на внешней алгебре кокасательного расслоения к группе Пуассона–Ли, и их явное описание зависит от выбора r -матрицы. Для $GL(N)$ мы находим, что имеются только две такие структуры, ассоциированные с канонической r -матрицей, и квантование которых дает $\pm$ биковариантное дифференциальное исчисление на квантовой линейной группе $GL_q(N)$.

Сделаем несколько замечаний по поводу возможных применений предложенной конструкции. Напомним, что, описывая структуры Пуассона–Ли на G , мы ограничились r -матрицей, являющейся тривиальным поднятием канонической r -матрицы для $SL(N)$. Возникает естественный вопрос о возможности представить биковариантное дифференциальное исчисление на $SL_q(N)$ как квантование соответствующего классического аналога. Для этого, очевидно, необходимо изучить градуированные структуры Пуассона–Ли на $SL(N)$, и, как мы полагаем, найденные нами скобки могут служить здесь удобным орудием. Интересен также вопрос построения градуированной структуры Пуассона–Ли, индуцированной канонической r -матрицей для других классических групп. На

этом пути можно получить классификацию градуированных структур Пуассона–Ли, связанных с остальными классическими группами.

Вскоре после появления заметки [21] мы получили интересную работу [27]. Одним из ее результатов является нахождение наиболее общей формы определяющих соотношений для Z_2 -градуированной алгебры, описывающей биковариантное дифференциальное исчисление на $GL_q(N)$. Легко показать, что квазиклассический предел этих соотношений в точности воспроизводит неканонические ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) градуированные скобки Пуассона на $GL(N)$.

Авторы выражают благодарность И. Я. Арефьевой и И. В. Воловичу за ряд полезных обсуждений. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант N93-011-147, а также ISF, грант M1L-300.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Градуировка координатного тензора $\{\theta_i^j, t_k^l\}$ предполагает, что он имеет следующее разложение по базису θ_i^j :

$$\{\theta_i^j, t_k^l\} = C_0^{jl\ m}_{ik\ s}(T)\theta_m^s + C_1^{jl\ j_1j_2j_3}_{ik\ i_1i_2i_3}(T)\theta_{j_1}^{i_1}\theta_{j_2}^{i_2}\theta_{j_3}^{i_3} + \dots \quad (\text{A.1})$$

Здесь ряд имеет конечное число членов, структурные тензоры $C_0, C_1, \dots$ как неизвестные функции четных переменных t_i^j являются антисимметричными по отношению к одновременной перестановке $i_k \leftrightarrow i_m, j_k \leftrightarrow j_m$ для любых k, m . Применяя копроизведение к обеим сторонам (A.1), мы получаем с учетом (3.9) набор условий на тензоры C . Во-первых, все C_i для $i \neq 0$ должны быть равны нулю. Во-вторых, $C_0^{jl\ m}_{ik\ s}(T)$ линейны по t_i^j , т.е. имеют вид $C_{ik\ s}^{jl\ m}(T) = C_{ik\ sp}^{jl\ mr}t_r^p$ ($C_0 \equiv C$) и удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} C_{ik\ pr}^{jn\ ms}\theta_m^p t_s^r \otimes t_n^l + D_{ir\ k}^{pj\ n} \otimes \theta_p^r t_n^l + C_{pn\ bd}^{rl\ ms}t_i^p S(t_r^j)t_k^n \otimes \theta_m^b t_s^d = \\ = C_{ik\ sp}^{jl\ mr}\theta_m^s t_b^p \otimes t_r^b + C_{ik\ mr}^{jl\ sp}\theta_s^a S(t_d^m)t_p^b \otimes \theta_a^d t_b^r, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где D определяется как

$$\begin{aligned} D_{ir\ k}^{pj\ n} = \{t_i^p S(t_r^j), t_k^n\} = (r_+)^{ms}_{ik} t_m^p t_s^n S(t_r^j) - t_i^m t_k^s (r_+)^{pn}_{ms} S(t_r^j) - \\ - t_i^p S(t_r^m)(r_+)^{js}_{mk} t_s^n + t_i^p t_k^m (r_+)^{sn}_{rm} S(t_s^j). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Приравнивая в (A.2) члены, содержащие t_i^j в правом сомножителе тензорного произведения, находим $C_{ik\ sp}^{jl\ mr} \sim C_{ik\ s}^{j\ mr} \delta_p^l$. Теперь, принимая во внимание данную форму C , можно уравнивать члены в (A.2), содержащие как T -, так и θ -генераторы в правой части тензорного произведения. Это дает

$$\begin{aligned} t_i^p t_k^n (C_{pn\ s}^{r\ ml} - (r_+)^{ml}_{pn} \delta_s^r + (r_+)^{rl}_{sn} \delta_p^m) S(t_s^j) = \\ = S(t_s^r) (C_{ik\ r}^{j\ np} - (r_+)^{np}_{ik} \delta_r^j + (r_+)^{jp}_{rk} \delta_i^n) t_n^m t_p^l. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Вводя новый тензор Φ :

$$\Phi_{pn\ s}^{r\ ml} = C_{pn\ s}^{r\ ml} - (r_+)^{ml}_{pn} \delta_s^r + (r_+)^{rl}_{sn} \delta_p^m, \quad (\text{A.5})$$

уравнение (A.4) можно переписать в виде

$$t_i^p t_k^n \Phi_{pn}^r S(t_r^j) = S(t_s^r) \Phi_{ik}^j t_n^{np} t_p^m t_p^l. \quad (\text{A.6})$$

Решения уравнения (A.6) находятся следующим образом. Фактически из определения антипода $t_i^k S(t_k^j) = S(t_i^k) t_k^j = \delta_i^j$ следует, что они соответствуют различным возможностям свертки индексов в каждой части (A.6). Таким образом, общее решение для Φ имеет вид

$$\Phi_{pn}^r = \sum_{(rml)} \alpha_{(rml)} \delta_p^r \delta_n^m \delta_s^l, \quad (\text{A.7})$$

где $\alpha_{(rml)} \in \mathbf{C}$ — произвольный коэффициент, отвечающий заданной перестановке индексов r, m, l , а сумма распространяется на все перестановки этих индексов. Итак, для скобки $\{\theta_i^j, t_k^l\}$, совместной с копроизведением, имеем

$$\begin{aligned} \{\theta_i^j, t_k^l\} = & ((r_+)^{sp}_{ik} + \alpha_4 P_{ik}^{sp}) \theta_s^j t_p^l - \theta_i^m ((r_+)^{jp}_{mk} + \alpha_6 P_{mk}^{jp}) t_p^l + \\ & + \alpha_1 \delta_i^j \theta_k^m t_m^l + (\alpha_2 \delta_i^j t_k^l + \alpha_3 \delta_k^j t_i^l) \theta_m^m + \alpha_5 \theta_i^j t_k^l \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

или в тензорных обозначениях

$$\{\theta_1, T_2\} = r_A^{12} \theta_1 T_2 - \theta_1 r_B^{12} T_2 + \alpha_1 \theta_2 T_2 + \alpha_2 \text{tr } \theta T_2 + \alpha_3 \text{tr } \theta P^{12} T_2 + \alpha_5 \theta_1 T_2, \quad (\text{A.9})$$

здесь $r_A = r_+ + \alpha_4 P$ и $r_B = r_+ + \alpha_6 P$.

Дальнейшие ограничения на коэффициенты в (A.9) следуют из тождества Якоби (3.6) для θ и двух T :

$$\{\{\theta_1, T_2\}, T_3\} - \{\{\theta_1, T_3\}, T_2\} - \{\theta_1, \{T_2, T_3\}\} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Для решения (A.10) необходима формула

$$\{\text{tr } \theta, T\} = \gamma_1 \theta T + \gamma_2 \text{tr } \theta T, \quad (\text{A.11})$$

которая выводится из (A.9). Здесь $\gamma_1 = \alpha_1 N + \alpha_4 - \alpha_6$ и $\gamma_2 = \alpha_2 N + \alpha_3 + \alpha_5$. Прямым вычислением находим

$$\sum_{\text{перест}} \{\{\theta_1, T_2\}, T_3\} = C(r_A, r_+) \theta_1 T_2 T_3 - \theta_1 C(r_B, r_+) T_2 T_3 + K_1 + \text{tr } \theta K_2, \quad (\text{A.12})$$

где введены два фактора:

$$\begin{aligned} K_1 \equiv & \alpha_1 (r_A^{12} - r_B^{12}) \theta_3 T_3 T_2 + (\alpha_1^2 + \gamma_1 \alpha_2) \theta_3 T_3 T_2 - \alpha_1 (P^{23} r_A^{23} P^{23} + r_+^{23}) \theta_3 T_3 T_2 + \\ & + \alpha_1 \theta_3 (P^{23} r_B^{23} P^{23} + r_+^{23}) T_2 T_3 + \gamma_1 \alpha_3 P^{12} \theta_3 T_3 T_2 + \\ & + \alpha_1 (r_B^{13} - r_A^{13}) \theta_2 T_2 T_3 - (\alpha_1^2 + \gamma_1 \alpha_2) \theta_2 T_2 T_3 + \alpha_1 (r_A^{23} - r_+^{23}) \theta_2 T_2 T_3 + \\ & + \alpha_1 \theta_2 (r_+^{23} - r_B^{23}) T_2 T_3 - \gamma_1 \alpha_3 P^{13} \theta_2 T_2 T_3, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} K_2 \equiv & \alpha_2 (r_B^{13} - r_A^{13}) + \alpha_3 \alpha_5 P^{13} + \alpha_3 P^{12} r_B^{13} - \alpha_3 r_A^{13} P^{12} - \alpha_3 \gamma_2 P^{13} + \\ & + \alpha_3 P^{13} r_+^{23} - \alpha_3 r_+^{23} P^{13} + \alpha_2 (r_A^{12} - r_B^{12}) + \alpha_3 r_A^{12} P^{13} - \alpha_3 P^{13} r_B^{12} + \\ & + \alpha_3 \gamma_2 P^{12} + \alpha_3 P^{12} r_+^{23} - \alpha_3 r_+^{23} P^{12} - \alpha_3 \alpha_5 P^{12}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

и тензоры $C(r_A, r_+)$ ($C(r_B, r_+)$):

$$C(r_A, r_+) = [r_A^{12}, r_A^{13}] + [r_A^{12}, r_+^{23}] + [r_A^{13}, r_+^{23}]. \quad (\text{A.15})$$

Простой анализ показывает, что все члены в (A.12) линейно независимы. Следовательно, для выполнения тождества Якоби необходимо выбрать коэффициенты α_i ($i = 1, \dots, 6$) так, чтобы удовлетворить условиям $C(r_A, r_+) = C(r_B, r_+) = K_1 = K_2 = 0$. Заметим, что $C(r_+) \equiv C(r_+, r_+) = 0$ является уравнением ЯБ.

Рассмотрим первые два уравнения: $C(r_A, r_+) = 0 = C(r_B, r_+)$. Определение r_A , соотношение (3.12) и уравнение ЯБ для r_+ дают

$$C(r_A, r_+) = \alpha_4(\alpha_4 + 2)P^{13}(P^{23} - P^{12}). \quad (\text{A.16})$$

Отсюда получаем два решения $\alpha_4 = 0, -2$ или иначе $r_A = r_{\pm}$, где $r_- = r_+ - 2P$, и ту же пару для α_6 .

Требование $K_1 = K_2 = 0$ приводит к системе уравнений на оставшиеся коэффициенты α :

$$\begin{aligned} m\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1^2 + \gamma_1\alpha_2 &= 0, \\ \alpha_1(\alpha_4 + \alpha_6 + 2) &= 0, \\ \alpha_3(\alpha_4 + \alpha_6 + 2) &= 0, \\ m\alpha_2 - \alpha_3\alpha_5 + \gamma_2\alpha_3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где для простоты положено $\alpha_4 - \alpha_6 = m$. Последнее уравнение в (A.17) является прямым следствием первого и второго. Третье и четвертое уравнения показывают, что, за исключением точки $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, можно положить $r_A = r_B$ и как следствие получить две возможные комбинации: ($r_A = r_+$, $r_B = r_-$) или ($r_A = r_-$, $r_B = r_+$). Общее решение системы (A.17) имеет вид

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = -\frac{\alpha^2}{m + \alpha N}, \quad \alpha_3 = -\frac{\alpha m}{m + \alpha N}, \quad m = \pm 2, \quad \alpha \in \mathbf{C}, \quad (\text{A.18a})$$

$$\alpha = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = \alpha_6 = 0, -2, \quad m = 0. \quad (\text{A.18б})$$

Таким образом, скобки распадаются на два семейства. В (A.18a) они параметризуются двумя непрерывными параметрами α и $\beta = \alpha_5$ и знаком числа m :

$$\{\theta_1, T_2\}_{\alpha, \beta}^{\pm} = \alpha\theta_2 T_2 + r_{\pm}^{12}\theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\mp}^{12} T_2 + \alpha_2 \text{tr } \theta T_2 + \alpha_3 \text{tr } \theta P^{12} T_2 + \beta\theta_1 T_2, \quad (\text{A.19})$$

где α_2 и α_3 выражаются через α по формулам (A.18a). Для семейства (A.18б) имеем

$$\{\theta_1, T_2\}_{\alpha_2, \beta}^{\pm} = r_{\pm}^{12}\theta_1 T_2 - \theta_1 r_{\pm}^{12} T_2 + \alpha_2 \text{tr } \theta T_2 + \beta\theta_1 T_2, \quad (\text{A.20})$$

где на этот раз α_2, β произвольны.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Повторяя рассуждения приложения А, определим скобку $\{\theta_i^j, \theta_k^l\}$:

$$\{\theta_i^j, \theta_k^l\} = W_{ik\ sp}^{jl\ mn}(T) \theta_m^s \theta_n^p, \quad (\text{Б.1})$$

где $W_{ik\ sp}^{jl\ mn}(T)$ – неизвестный структурный тензор, зависящий от четных переменных t_i^j . Применяя Δ к обеим частям (Б.1) и используя (3.9):

$$\{\Delta \theta_i^j, \Delta \theta_k^l\} = \Delta W_{ik\ sp}^{jl\ mn}(T) \Delta \theta_m^s \Delta \theta_n^p, \quad (\text{Б.2})$$

находим, что W не должен зависеть от T . Подчеркнем, что, вычисляя левую часть (Б.2), мы используем общий вид $\{\theta, T\}$ -скобки (А.9). Уравнивая члены, содержащие один генератор θ в правом сомножителе тензорного произведения, получаем условия на антисимметричную при перестановках $s \leftrightarrow p$, $m \leftrightarrow n$ часть W :

$$\begin{aligned} W_{ik\ ps}^{jl\ nm} - W_{ik\ sp}^{jl\ mn} = & (r_A)_{ki}^{nm} \delta_p^l \delta_s^j + (r_A)_{ik}^{nm} \delta_p^j \delta_s^l - \delta_k^n (r_B)_{pi}^{lm} \delta_s^j - \\ & - \delta_i^m (r_A)_{ks}^{nj} \delta_p^l + \delta_i^m \delta_k^n (r_B)_{ps}^{lj} - \delta_i^n (r_B)_{pk}^{jm} \delta_s^l - \\ & - \delta_k^m (r_A)_{is}^{nl} \delta_p^j + \delta_k^m \delta_i^n (r_B)_{ps}^{jl} + \alpha_1 (\delta_k^l \delta_i^n \delta_p^m \delta_s^j - \\ & - \delta_i^m \delta_s^n \delta_k^l \delta_p^j + \delta_i^j \delta_k^n \delta_p^m \delta_s^l - \delta_k^m \delta_s^n \delta_i^j \delta_p^l). \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Рассмотрим теперь члены (Б.2), содержащие два θ -генератора в правой части тензорного произведения. Они приводят к уравнению для тензора $\hat{\Phi}$

$$t_i^m t_k^n \hat{\Phi}_{mn\ bd}^{pr\ ac} S(t_p^j) S(t_r^l) = S(t_b^s) S(t_d^p) \hat{\Phi}_{ik\ sp}^{jl\ mn} t_m^a t_n^c, \quad (\text{Б.4})$$

где $\hat{\Phi}$ определяется формулой

$$\hat{\Phi}_{mn\ bd}^{pr\ ac} = W_{mn\ bd}^{pr\ ac} - (r_+)_{mn}^{ac} \delta_d^r \delta_b^p + \delta_n^c (r_+)_{md}^{ar} \delta_b^p + (r_+)_{bn}^{pc} \delta_m^a \delta_d^r - \delta_m^a \delta_n^c (r_+)_{bd}^{pr}. \quad (\text{Б.5})$$

Уравнение (Б.4) имеет общее решение

$$\hat{\Phi}_{ik\ sp}^{jl\ mn} = \sum_{\text{перест}} \mu_{(jlmn)} \delta_i^j \delta_k^l \delta_s^m \delta_p^n, \quad (\text{Б.6})$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов j, l, m, n , а $\mu_{(jlmn)}$ – произвольный коэффициент, соответствующий данной перестановке. Теперь, подставляя (Б.6) в (Б.5), получаем W -тензор. Принимая во внимание симметрию скобок, потребуем, чтобы общее выражение W -тензора было согласовано с (Б.3). На этом шаге удобно различать $\{\theta, T\}$ -скобки из первого и второго семейств. Мы находим, что для второго семейства ($r_A = r_B, \alpha_1 = 0$) уравнение (Б.3) не имеет решений, т.е. $\{\theta, T\}$ -скобка, определяемая с помощью (А.20), не может быть продолжена до $\{\theta, \theta\}$ -скобки, совместной с копроизведением Δ . Для первого семейства можно выписать общее выражение скобки $\{\theta, \theta\}$. В тензорных обозначениях оно имеет вид

$$\begin{aligned} \{\theta_1, \theta_2\}_\alpha^m = & \alpha(\theta_1 \theta_1 + \theta_2 \theta_2) + r_+^{12} \theta_1 \theta_2 + \theta_1 \theta_2 r_+^{12} - \\ & - \theta_1 \left(r_+^{12} - \frac{m+2}{2} P^{12} \right) \theta_2 + \theta_2 \left(r_+^{12} + \frac{m-2}{2} P^{12} \right) \theta_1. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Список литературы

- [1] *I.Ya. Aref'eva, I.V. Volovich* // Mod. Phys. Lett. 1991. V. 6A. P. 893.
- [2] *I.Ya. Aref'eva, I.V. Volovich* // Phys. Lett. 1991. V. 264B. P. 62.
- [3] *T. Brzezinski, S. Majid*. Quantum Group Gauge Theory on Classical Spaces. Prep. Univ. of Cambridge. DAMTP/92-51. 1992.
- [4] *A.P. Isaev, Z. Popovicz* // Phys. Lett. 1993. V. 307B. P. 353.
- [5] *И.Я. Арефьева, Г.Е. Арутюнов* // Тр. МИ РАН им. В.А. Стеклова. 1994. Т. 203. С. 202.
- [6] *S. Woronowicz* // Commun. Math. Phys. 1986. V. 111. P. 613.
- [7] *B. Jurco* // Lett. Math. Phys. 1991. V. 22. P. 177.
- [8] *U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, W. Weich* // Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 605.
- [9] *Yu. Manin*. Bonn Prep. MPI/91-47. 1991.
- [10] *G. Maltziniotis* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1990. V. 331. P. 831.
- [11] *A. Schirrmacher*. Munich Prep. MPI-PTH-91-117. 1991.
- [12] *A. Sudbery*. York Prep. PRINT-91-0498(YORK). 1991.
- [13] *A. Sudbery*. York Prep. PRINT-92-1(YORK). 1992.
- [14] *P. Schupp, P. Watts, B. Zumino*. Cartan Calculus for Hopf Algebras and Quantum Groups: Prep. NSF-ITP-93-75. 1993.
- [15] *Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев* // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 179–205.
- [16] *V.G. Drinfel'd* // Proc. Int. Congr. Math. Berkley. 1986. V. 1. P. 798.
- [17] *E.K. Sklyanin* // Funkts. Anal. Prilozh. 1982. V. 16. № 4. P. 27.
- [18] *E.K. Sklyanin* // Funkts. Anal. Prilozh. 1983. V. 17. № 4. P. 34.
- [19] *M.A. Semenov-Tian-Shansky* // Publ. RIMS Kyoto Univ. 1985. V. 21. № 6. P. 1237.
- [20] *N.Yu. Reshetikhin, M.A. Semenov-Tian-Shansky* // Geometry and Physics. 1988. V. 5. № 4. P. 533.
- [21] *G.E. Arutyunov, P.B. Medvedev*. Quantization of the external algebra on a Poisson–Lie group: Prep. SMI-11-93. hep-th/9311096. 1993.
- [22] *P. Schupp, P. Watts, B. Zumino* // Lett. Math. Phys. 1992. V. 25. P. 139.
- [23] *A.P. Isaev, P.N. Pyatov* // Phys. Lett. 1993. V. 179A. P. 81.
- [24] *A. Sudbery* // Math. Proc. Camb. Phyl. Soc. 1993. V. 114. P. 111.
- [25] *T. Brzezinski* // Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. P. 287.
- [26] *A. Connes* // Publ. Math. IHES. 1986. V. 62. P. 41.
- [27] *A.P. Isaev, P.N. Pyatov*. Covariant differential complexes on quantum linear groups: HEP-TH/931112. 1993.

E-mail: arut@gft.mian.su

Математический институт им. Стеклова,
ул. Вавилова 42, ГСП-1, 117966, Москва, Россия;
Институт теоретической и экспериментальной физики,
117259, Москва, Россия.

Поступила в редакцию
17.IX.1995 г.

G. E. Arutyunov, P. B. Medvedev
QUANTIZATION OF THE EXTERNAL
ALGEBRA ON A POISSON–LIE GROUP

The external algebra $\mathcal{M}$ on $GL(N)$ is shown to be equipped with graded Poisson brackets compatible with the group action. The corresponding Poisson–Hopf superalgebra structures on $\mathcal{M}$ are classified. They form two families, each of them is parametrized by two continuous parameters (α, β) . It is shown that the structures from the first family with $\alpha = 0 = \beta$ appear as the semiclassical limit of the bicovariant differential calculi on the quantum linear group $GL_q(N)$.