Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Интегрируемые деформации волчков, связанных с алгеброй $so(p, q)$, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 1, 24–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:20:14

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ВОЛЧКОВ, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРОЙ $so(p, q)$

Предложена интегрируемая деформация известной модели двух взаимодействующих волчков на алгебре $so(p, q)$. Рассмотрены частные случаи, включающие в себя обобщенные волчки Лагранжа и Ковалевской. Построены матрицы Лакса и соответствующие им классические R -матрицы.

Ключевые слова: интегрируемые системы, классическая R -матрица, волчок Ковалевской.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для построения уравнений Лакса в методе классической R -матрицы необходимо указать разложение выбранной алгебры Ли на две подалгебры, определить инварианты коприсоединенного действия и описать конечномерные орбиты или подходящие пуассоновы подпространства R -скобки [1].

В общем случае матрицы Лакса, отвечающие различным разложениям одной алгебры на несколько подалгебр, никак не связаны друг с другом. Однако в некоторых специальных случаях различные матрицы Лакса связаны друг с другом, что позволяет построить интегрируемые деформации известных интегрируемых моделей [2], [3].

В данной работе мы построим деформацию известной матрицы Лакса для двух взаимодействующих волчков на алгебре $so(p, q)$. Соответствующая R -матрица согласована с гамильтоновой редукцией, которая позволяет построить матрицу Лакса для обобщенного волчка Ковалевской.

2. МАТРИЦЫ ЛАКСА НА АФФИННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Встречающиеся пространства отождествляются с двойственными к ним с помощью инвариантного скалярного произведения (см. [1]).

Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, $\mathcal{L}$ – алгебра петель

$$\mathcal{L} = \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] = \left\{ X(\lambda) = \sum_i x_i \lambda^i \mid x_i \in \mathfrak{g} \right\}. \quad (2.1)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Если алгебра $\mathcal{L}$ как векторное пространство представима в виде прямой суммы двух своих подалгебр $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_-$, то классическая R -матрица имеет вид [1]

$$R = P_+ - P_-. \quad (2.2)$$

Здесь $P_{\pm}$ – проекторы на $\mathcal{L}_{\pm}$ параллельно дополнительной подалгебре. Если a – сплетающий оператор

$$a[X, Y] = [aX, Y] = [X, aY] \quad (2.3)$$

для всех $X, Y \in \mathcal{G}$, то $R_a = R \circ a$ – классическая R -матрица [1]. Тем самым произвольное разложение исходной алгебры на две подалгебры определяет линейное семейство совместных скобок Ли–Пуассона, орбиты которых связаны заменой переменных

$$L \mapsto a^{-1}L, \quad (2.4)$$

если оператор a обратим. Например, именно так связаны матрицы Лакса для волчка Манакова на $so(4)$ и модели Клебша на $e(3)$, а также для случаев Стеклова на $so(4)$ и $e(3)$ [1].

Для стандартного разложения [1] алгебры петель

$$\mathcal{L}_+ = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i \lambda^i, \quad \mathcal{L}_- = \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}_i \lambda^i \quad (2.5)$$

конечномерные подпространства $\bigoplus_{i=-m}^n \mathfrak{g}_i \lambda^i$ являются пуассоновыми для R -скобки, т.е. инвариантны относительно коприсоединенного действия

$$\mathrm{ad}_R^* X \cdot L = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^* X_+ \cdot L)_+ - (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^* X_- \cdot L)_-, \quad X_{\pm} = P_{\pm} X, \quad (2.6)$$

и относительно потоков, задаваемых уравнениями Лакса

$$L_t = [L, M], \quad M = P_+(dH(L)). \quad (2.7)$$

Для алгебры петель $\mathcal{L}$ сплетающими являются операторы умножения на полиномы Лорана со скалярными коэффициентами.

В работах [2], [3] построены матрицы Лакса вида (2.4), где a – полином Лорана с матричными коэффициентами специального вида. Для алгебро-геометрического описания подобных матриц Лакса мы можем использовать результаты работы [4]. Напомним, что если $\mathfrak{g}$ – ассоциативная алгебра, то как векторное пространство алгебра петель $\mathcal{L}$ является прямой суммой подалгебры $\mathcal{L}_+$ и однородной подалгебры $\mathcal{L}_-(y)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_-(y), \quad \mathcal{L}_-(y) = \left\{ \sum_{i=1} x_i \lambda^i (1 - \lambda^{-1}y) \mid x_i \in \mathfrak{g} \right\}, \quad (2.8)$$

где y – фиксированный элемент в $\mathfrak{g}$. Подалгебра (2.8) является одним из основных примеров однородных подалгебр, рассмотренных в работе [4].

Разложение (2.8) определяет классическую R -матрицу

$$R_y = P_+^y - P_-^y \quad (2.9)$$

вида (2.2), которая не сводится с помощью сплетающих операторов к исходной (2.5). Тем не менее можно рассматривать $\mathcal{L}_-(y)$ как “возмущение” стандартной подалгебры по элементу y . В этом подходе соответствующие пуассоновы подпространства

$$\bigoplus_{i=-m}^n \mathfrak{g}_i \lambda^i (1 - \lambda^{-1}y) \quad \text{или} \quad (1 - \lambda^{-1}y)^{-1} \bigoplus_{i=-m}^n \mathfrak{g}_i \lambda^i$$

могут быть построены как “возмущения” стандартных орбит, которые при $y \rightarrow 0$ совпадают с известными орбитами, описывающими интересные в приложениях интегрируемые системы.

В данной заметке обсуждается вопрос о построении отображения инвариантных подпространств стандартной R -скобки (2.2), (2.5), состоящих из матриц Лакса вида

$$L = \lambda a + l + \lambda^{-1} s, \quad M = \lambda b, \quad (2.10)$$

в инвариантные подпространства R_y -скобки (2.8), (2.9), состоящие из матриц

$$L_y = (1 - \lambda^{-1}y)^{-1}(\lambda a + l' + \lambda^{-1} s), \quad M_y = M(1 - \lambda^{-1}y), \quad (2.11)$$

на конкретном примере взаимодействующих обобщенных волчков, связанных с алгеброй $\mathfrak{g} = so(p, q)$.

В рассматриваемом примере элемент y не принадлежит алгебре $\mathfrak{g} = so(p, q)$. В силу этого в принципе мы должны вложить исходную алгебру $\mathfrak{g}$ в алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$, содержащую и $\mathfrak{g} = so(p, q)$, и элемент y , и только затем изучать отображение орбиты (2.10) исходной R -матрицы (2.5) в орбиту (2.11) матрицы R_y (2.9), действующей в пространстве $\mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{g}})^*$. Поэтому, чтобы упростить доказательства, всюду далее мы будем использовать принятые в методе классической R -матрицы тензорные обозначения [1] и будем изучать не R -матрицы вида (2.2), (2.5) и (2.8), (2.9), а соответствующие им ядра $r(\lambda, \mu)$ и $r^y(\lambda, \mu)$.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ВОЛЧКИ. АЛГЕБРА $so(p, q)$

Пусть $p \geq q$ и в матричной реализации алгебра $\mathfrak{g} = so(p, q)$ состоит из $(p+q) \times (p+q)$ матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} \ell & s \\ s^T & m \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где ℓ, m – кососимметрические матрицы размера $(p \times p)$ и $(q \times q)$, s – матрица $(p \times q)$ и T – матричное транспонирование.

В разложении Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$, отвечающем инволюции $\sigma X = -X^T$, компактная подалгебра $\mathfrak{f} = so(p) \oplus so(q)$ состоит из матриц X (3.1) при $s = 0$:

$$\mathfrak{f} = so(p) \oplus so(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right\},$$

а ортогональное дополнение $\mathfrak{p}$ – из матриц X (3.1) при $\ell = 0$, $m = 0$:

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ s^T & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Алгебра $so(p, q)$ отождествляется с $so(p, q)^*$ при помощи стандартной билинейной формы $\langle X, Y \rangle = -(1/2) \operatorname{tr}(XY)$.

Соответствующая скрученная алгебра петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$ определяется инволюцией σ , которая является поднятием картановской инволюции $\sigma X = -X^T$ в алгебре $\mathfrak{g}$, т.е. $(\sigma X)(\lambda) = \sigma(X(-\lambda))$. Таким образом, скрученная алгебра петель $\mathcal{L}(so(p, q), \sigma)$ состоит из матриц $X(\lambda)$ таких, что

$$X(\lambda) = -X^T(-\lambda). \quad (3.2)$$

Алгебра $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$ отождествляется с $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)^*$ при помощи формы $\langle X, Y \rangle = \operatorname{Res} \lambda^{-1}(X, Y)$.

3.1. Квадратичный гамильтониан. Согласно общей схеме [1] с алгеброй $\mathfrak{g} = so(p, q)$ связаны динамические системы на фазовом пространстве $T^*SO(p) \times T^*SO(q)$, описывающие пару взаимодействующих волчков размерности p и q . Пусть $k \in SO(p)$, $r \in SO(q)$ – “конфигурационные” переменные, а $\ell \in so(p)$, $m \in so(q)$ – кинетические моменты. Скобки Ли–Пуассона между динамическими переменными имеют вид

$$\begin{aligned} \{\ell_{ij}, \ell_{mn}\} &= \delta_{in}\ell_{jm} + \delta_{jm}\ell_{in} - \delta_{im}\ell_{jn} - \delta_{jn}\ell_{im}, \\ \{\ell_{ij}, k_{nm}\} &= \delta_{jm}k_{ni} - \delta_{im}k_{nj}, \\ \{m_{ij}, m_{kn}\} &= \delta_{in}m_{jk} + \delta_{jk}m_{in} - \delta_{ik}m_{jn} - \delta_{jn}m_{ik}, \\ \{m_{ij}, r_{nk}\} &= \delta_{jk}r_{ni} - \delta_{ik}r_{nj}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Все остальные скобки равны нулю.

ТЕОРЕМА (Реймана–Семенова–Тян–Шанского). Если A и F – две постоянные $(p \times q)$ -матрицы, то спектральные инварианты матрицы Лакса

$$\begin{aligned} L &= \lambda a + l + \lambda^{-1} s = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & kAr^T \\ rA^T k^T & 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} k\ell k^T & 0 \\ 0 & rmr^T \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

находятся в инволюции относительно канонических скобок Пуассона (3.3) фазового пространства $T^*SO(p) \times T^*SO(q)$.

Согласно книге [1] доказательство состоит в проверке того, что $L(\lambda)$ (3.4) является орбитой классической R -матрицы (2.2), отвечающей стандартному разложению скрученной алгебры петель $\mathcal{L}(so(p, q), \sigma)$.

Мы повторим это доказательство, используя принятые тензорные обозначения [1]. Известно, что матрица $L(\lambda)$ является орбитой R -матрицы, если справедливо соотношение

$$\{ \overset{1}{L}(\lambda), \overset{2}{L}(\mu) \} = [r_{12}(\lambda, \mu), \overset{1}{L}(\lambda)] - [r_{21}(\lambda, \mu), \overset{2}{L}(\mu)], \quad (3.5)$$

где $\overset{1}{L}(\lambda) = L(\lambda) \otimes 1$ и $\overset{2}{L}(\mu) = 1 \otimes L(\mu)$, а r_{12}, r_{21} – ядра R -матриц R и R^* , соответственно.

Прямые вычисления показывают, что матрица $L(\lambda)$ (3.4) удовлетворяет уравнению (3.5), а соответствующие ядра R -матриц имеют вид

$$r_{12}(\lambda, \mu) = -\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2} P_{\mathfrak{f}} + \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} P_{\mathfrak{p}}, \quad r_{21}(\lambda, \mu) = \Pi r_{12}(\mu, \lambda) \Pi. \quad (3.6)$$

Здесь Π – оператор перестановки

$$\Pi X \otimes Y = Y \otimes \Pi X,$$

а $P_{\mathfrak{f}}$ и $P_{\mathfrak{p}}$ – стандартные операторы Казимира в подалгебрах $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{p}$, т.е.

$$P_{\mathfrak{f}} = \sum_{\alpha=1}^{(p(p-1)+q(q-1))/2} Z_{\alpha} \otimes Z_{\alpha}, \quad P_{\mathfrak{p}} = \sum_{\beta=1}^{pq} S_{\beta} \otimes S_{\beta},$$

где кососимметрические матрицы Z_{α} и симметрические матрицы S_{β} образуют ортонормированные базисы в соответствующих пространствах, например:

$$Z_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right), \quad Z_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right), \quad \dots,$$

и

$$S_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 1 & 0 & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & 0 \end{array} \right), \quad S_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & 0 & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & \vdots & \ddots & & & 0 \end{array} \right), \quad \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Уравнения движения, порождаемые спектральными инвариантами матрицы $L(\lambda)$ (3.4), гамильтоновы относительно канонических скобок Пуассона (3.3) и имеют вид уравнения Лакса (2.7).

Если старший коэффициент в матрице Лакса (3.4) имеет вид $A = a_i \delta_{ij}$, то среди спектральных инвариантов матрицы $L(\lambda)$ (3.4) можно выбрать наиболее общий квадратичный по всем динамическим переменным гамильтониан вида

$$\begin{aligned} H = & \sum_{i < j \leq q} \frac{a_i b_i - a_j b_j}{a_i^2 - a_j^2} (\ell_{ij}^2 + m_{ij}^2) - 2 \sum_{i < j \leq q} \frac{a_i b_j - a_j b_i}{a_i^2 - a_j^2} \ell_{ij} m_{ij} + \\ & + \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=1}^q \frac{b_j}{a_j} \ell_{ij}^2 + \gamma \sum_{i,j=q+1}^p \ell_{ij}^2 - 2 \sum_{i,j,s} b_i k_{ij} F_{js} r_{is}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь a_i, b_i , $i = 1, \dots, q$, и γ – произвольные параметры [1]. Вторая матрица M в уравнении Лакса (2.7) дается формулой

$$M(\lambda) = P_+(dH(L)) = - \begin{pmatrix} 0 & kBr^T \\ rB^T k^T & 0 \end{pmatrix} \lambda, \quad (3.8)$$

где $B = b_i \delta_{ij}$ – постоянная “усеченная” диагональная матрица.

3.2. Деформации функции Гамильтона. Рассмотрим возмущение матрицы Лакса (3.4), используя матрицу

$$y = c \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

которая является общим решением уравнений

$$yZ_\alpha s + sZ_\alpha y = 0, \quad yS_\beta s - sS_\beta y = 0 \quad (3.10)$$

для всех α и β , т.е. $yXs = \sigma(yXs)$ для любого $X \in \mathfrak{g}$. Это решение параметризуется параметром c .

Матрица y (3.9) принадлежит алгебре $so(p+q) = \mathfrak{f} + i\mathfrak{p}$ и не принадлежит исходной алгебре $so(p, q) = \mathfrak{f} + \mathfrak{p}$ (3.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спектральные инварианты матрицы*

$$L_y = (1 - \lambda^{-1}y)^{-1}(\lambda a + l' + \lambda^{-1}s), \quad (3.11)$$

где

$$l' = l - \frac{1}{2}(ya + ay), \quad (3.12)$$

находятся в инволюции относительно канонических скобок Пуассона фазового пространства $T^*SO(p) \times T^*SO(q)$.

Доказательство состоит в прямой проверке уравнения (3.5), при которой используются свойства матриц y (3.10) и $r_{ij}(\lambda, \mu)$ (3.6).

Соответствующее ядро R -матрицы R_y равно

$$r_{12}^y(\lambda, \mu) = [1 \otimes (1 - \mu^{-1}y)^{-1}]r_{12}(\lambda, \mu)[(1 - \lambda^{-1}y) \otimes 1]. \quad (3.13)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Уравнения движения, порождаемые спектральными инвариантами матрицы L_y (3.11), гамильтоновы относительно канонических скобок Пуассона (3.3) и имеют вид уравнения Лакса (2.7), где*

$$M_y = P_+^y(dH(L)) = M(1 - \lambda^{-1}y). \quad (3.14)$$

Уравнение Лакса (2.7) для матрицы L_y (3.11) можно переписать в виде триады Лакса

$$\frac{d}{dt}L_i = L_i M L_2 - L_2 M L_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.15)$$

для матриц

$$L_1 = L - \frac{1}{2}(ya + ay), \quad L_2 = 1 - \lambda^{-1}y,$$

входящих в определение (3.11).

Мы выпишем явно две эквивалентные формы $H_{1,2}^y$ соответствующей функции Гамильтона H^y , применив канонические преобразования

$$l \rightarrow l \pm \frac{c}{2}(sa - as). \quad (3.16)$$

Композиции этих канонических преобразований и неканонического преобразования (3.12)

$$l \rightarrow l_{1,2} = l - \frac{1}{2}((y \mp cs)a + a(y \pm cs))$$

действуют либо в подалгебре $so(p)$:

$$\ell \rightarrow \ell_1 = \ell - c(k^T Fr A^T - Ar^T F^T k), \quad (3.17)$$

либо в подалгебре $so(q)$:

$$m \rightarrow m_2 = m - c(r A^T k^T F - F^T k Ar^T), \quad (3.18)$$

и, следовательно, в этом случае деформация функции Гамильтона H (3.7) зависит либо только от переменных ℓ , либо только от m :

$$H_1 = H - c \operatorname{tr}(k \ell B r^T F^T) + \frac{c^2}{2} \operatorname{tr}(B^T Ar F^T Fr^T), \quad (3.19)$$

$$H_2 = H + c \operatorname{tr}(r m B^T k^T F) + \frac{c^2}{2} \operatorname{tr}(B A^T k^T F F^T k). \quad (3.20)$$

Соответствующие матрицы Лакса имеют вид

$$L_y^{(1)} = (1 - \lambda^{-1}y)^{-1} \left[L(\lambda) + c \begin{pmatrix} Fr A^T k^T - k Ar^T F^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.21)$$

$$L_y^{(2)} = (1 - \lambda^{-1}y)^{-1} \left[L(\lambda) - c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Fr A^T k^T - k Ar^T F^T \end{pmatrix} \right]. \quad (3.22)$$

Подчеркнем, что преобразования (3.17), (3.18) являются неканоническими преобразованиями относительно исходной скобки Ли–Пуассона.

3.3. Матрицы Лакса в подвижной системе отсчета. Рассмотренные ранее матрицы Лакса $L(\lambda)$ (3.4) и $L_y(\lambda)$ (3.11) соответствуют описанию волчка в неподвижной системе отсчета.

Согласно книге [1] в системе отсчета, связанной с волчком, матрицы Лакса связаны калибровочным преобразованием с матрицами Лакса в неподвижной системе отсчета:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda) &= g^T L g = \lambda \tilde{a} + \tilde{l} + \lambda^{-1} \tilde{s} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & k^T Fr \\ r^T F^T k & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}(\lambda) &= g^T M(\lambda) g + w = - \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \lambda + g^T \frac{dg}{dt}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь $g = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ и $w = g^T \dot{g}$ — матрица угловых скоростей волчков, которая зависит только от моментов ℓ и m .

С алгебро-геометрической точки зрения конструкции матриц $L(\lambda)$ (3.4) и $\tilde{L}(\lambda)$ (3.23) сильно отличаются, так как при этом используются различные пуассоновы редукции. Более детальное описание приведено в работах [1], [5], [6].

Если забыть о методе построения матриц $L(\lambda)$ и $\tilde{L}(\lambda)$ и просто посмотреть, чем они отличаются, то окажется, что это отличие сводится к формальной замене спектрального параметра $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$, перестановке числовых матриц A и F и вращению кинетических моментов $\ell \rightarrow k\ell k^T$, $m \rightarrow rmr^T$.

Как следствие, например, матрица $\tilde{L}(\lambda)$ (3.23) удовлетворяет уравнению (3.5), в которое входят матрицы $\tilde{r}_{ij}(\lambda, \mu)$:

$$\tilde{r}_{12}(\lambda, \mu) = -r_{12}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}), \quad \tilde{r}_{21}(\lambda, \mu) = -r_{21}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}), \quad (3.24)$$

полученные из матриц $r_{12}(\lambda, \mu)$ (3.6) заменой спектральных параметров.

Применяя то же калибровочное преобразование к матрицам $L_y(\lambda)$ (3.11) и $M_y(\lambda)$ (3.14), получим

$$\begin{aligned} \tilde{L}_y(\lambda) &= g^T L_y g = (1 - \lambda^{-1} \tilde{y})^{-1} \left(\tilde{L}(\lambda) - \frac{1}{2}(\tilde{y} \tilde{a} + \tilde{a} \tilde{y}) \right), \\ \widetilde{M}_y(\lambda) &= g^T M_y(\lambda) g + g^T \frac{dg}{dt} = \widetilde{M}(1 - \lambda^{-1} \tilde{y}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь матрица $w_y = g^T \dot{g}$ вычисляется с помощью кубического гамильтониана H^y и поэтому зависит от всех динамических переменных.

Как и ранее (3.15), две матрицы

$$L_1 = \tilde{L} + \frac{1}{2}(\tilde{y} \tilde{a} + \tilde{a} \tilde{y}), \quad L_2 = 1 - \lambda^{-1} \tilde{y},$$

входящие в определение $\tilde{L}_y$ (3.25), удовлетворяют триаде Лакса

$$\frac{d}{dt} L_i(\lambda) = L_i(\lambda) \widetilde{M}(\lambda) + \widetilde{M}^T(-\lambda) L_i(\lambda), \quad i = 1, 2. \quad (3.26)$$

Это уравнение имеет более сложную структуру по сравнению с триадой Лакса в подвижной системе отсчета (3.15).

В подвижной системе отсчета матрица деформации

$$\tilde{y} = g^T y g = c \begin{pmatrix} 0 & k^T F r \\ -r^T F^T k & 0 \end{pmatrix}$$

зависит от динамических переменных, так же как и ядро соответствующей R -матрицы.

Тем не менее и в подвижной системе отсчета мы можем построить матрицу Лакса, для которой ядро R -матрицы не будет зависеть от динамических переменных. Действительно, используя матрицу

$$\tilde{z} = c \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

мы можем построить деформацию по $\tilde{z}$ непосредственно матрицы Лакса $\tilde{L}(\lambda)$ (3.23) в подвижной системе отсчета:

$$\tilde{L}_z(\lambda) = (1 - \lambda \tilde{z})^{-1} \left(\tilde{L}(\lambda) - \frac{1}{2}(\tilde{z} \tilde{s} + \tilde{s} \tilde{z}) \right). \quad (3.28)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Матрица $\tilde{L}_z(\lambda)$ (3.28) удовлетворяет уравнению (3.5), а соответствующее ядро R -матрицы не зависит от динамических переменных:

$$\tilde{r}_{12}^z(\lambda, \mu) = [1 \otimes (1 - \lambda\tilde{z})^{-1}] \tilde{r}_{12}(\lambda, \mu) [(1 - \mu\tilde{z}) \otimes 1]. \quad (3.29)$$

Данное предложение доказывается прямым вычислением.

Применяя обратное калибровочное преобразование к $\tilde{L}_z(\lambda)$, можно построить матрицу Лакса $L_z(\lambda)$ в неподвижной системе отсчета:

$$L_z(\lambda) = gL_zg^T = (1 - \lambda z)^{-1} \left(L(\lambda) - \frac{1}{2}(zs + sz) \right), \quad z = g\tilde{z}g^T. \quad (3.30)$$

Тем самым, если для исходного гамильтониана H (3.7) были известны две различные матрицы Лакса $L(\lambda)$ (3.4) и $\tilde{L}(\lambda)$ (3.23), то для деформации этого гамильтониана H^y (3.19), (3.20) нами построены две матрицы Лакса L_y (3.11), L_z (3.30) в неподвижной системе отсчета и две матрицы Лакса $\tilde{L}_y$ (3.25), $\tilde{L}_z$ (3.28) в подвижной системе отсчета.

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Всюду далее $B = A = E$, где E – “обрезанная” единичная $(p \times q)$ -матрица $E_{ij} = \delta_{ij}$, $p \geq q$. Кроме того, далее мы будем записывать все функции Гамильтона в более принятых терминах кинетических моментов ℓ_{ij} и векторов Пуассона $x_i = k^T f_i$, где f_i – столбцы матрицы F . Эти переменные являются естественными координатами для алгебры $so(p) \ltimes (R^p \otimes \mathbb{R}^q)$ [1].

4.1. Алгебра $so(p, 1)$, волчок Лагранжа и сферический маятник. При $q = 1$ без ограничения общности можно положить

$$m = 0, \quad r = 1, \quad (4.1)$$

так как фазовое пространство равно $T^*SO(p)$. Следуя книге [1], можно доказать, что в этом случае гамильтониан (3.7) с точностью до множителя равен

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \ell_{ij}^2 + \frac{\gamma}{2} \sum_{i,j=2}^p \ell_{ij}^2 - (e_1, x), \quad x = k^T f, \quad (4.2)$$

где e_1 – первый вектор стандартного базиса, а f – произвольный вектор в пространстве $\mathbb{R}^p$.

Функция Гамильтона (4.2) описывает вращение волчка в однородном поле тяжести. При этом e_1 – вектор центра масс тела в системе отсчета, связанной с телом, а f – вектор силы тяжести. Так как тензор инерции волчка симметричен относительно оси e_1 , соединяющей точку закрепления и центр масс, то это случай Лагранжа.

Соответствующие деформации (3.19) и (3.20) имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= H + \frac{c^2}{2}(e_1, k^T f)^2 = H + \frac{c^2}{2}(e_1, x)^2, \\ H_2 &= H + c(\ell e_1, k^T f) = H + c(\ell e_1, x). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь сферический маятник [1]. В этом случае $x = k^T f$ – вектор координат на сфере S^{p-1} , $(x, x) = 1$, а p_i – сопряженные этим координатам импульсы $\{p_i, x_j\} = \delta_{ij}$ такие, что $(x, p) = 0$. Подставляя $\ell_{i,j} = x_i p_j - p_i x_j$ в $L(\lambda)$ (3.4), мы получим матрицу Лакса для сферического маятника [1]. Соответствующий гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 - \sum A_i x_i$$

описывает движение точки на сфере в однородном поле тяжести. Деформации (3.19), (3.20) этой функции Гамильтона имеют вид

$$H_1 = H + c \sum A_i p_i, \quad H_2 = H + \frac{c^2}{2} \left(\sum A_i x_i \right)^2.$$

Для алгебры $so(p, 1)$ функции Гамильтона H_1 и H_2 являются квадратичными полиномами, а не кубическими (как в общем случае). Это просто следствие условий (4.1).

4.2. Волчок Ковалевской. Согласно работам [1], [5] обобщенный волчок Ковалевской получается из системы с гамильтонианом (3.7) гамильтоновой редукцией, которая сводится к наложению связей

$$m + P\ell P = 0, \quad r = 1, \quad (4.3)$$

где P – ортогональный проектор из $\mathbb{R}^p$ на подпространство $\mathbb{R}^q$, натянутое на первые q векторов стандартного базиса. Приведенное пространство совпадает с $T^*SO(p)$ со стандартной канонической скобкой Пуассона.

Согласно книге [1] эти связи накладываются прямо на матрицы Лакса в системе координат, связанной с волчком:

$$L^k(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & kE \\ E^T k^T & 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} k\ell k^T & 0 \\ 0 & -E^T \ell E \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. После гамильтоновой редукции по группе $SO(q)$ (4.3) спектральные инварианты матриц Лакса $L(\lambda)$ (3.4) и $L_y(\lambda)$ (3.11) находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона в $T^*SO(p)$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке уравнения (3.5).

Подчеркнем, что в неподвижной системе координат ядра $r_{12}(\lambda, \mu)$ (3.6) и $r_{12}^y(\lambda, \mu)$ (3.13) не изменяются при пуассоновой редукции (4.3), т.е. R -матрицы R (2.2) и R_y (2.9) остаются разностью соответствующих проекторов.

Наоборот, в системе координат, связанной с волчком, ядра соответствующих R -матриц при редукции существенно изменяются, так как редукция (4.3) не является пуассоновой. В этой системе координат матрица Лакса имеет вид

$$\tilde{L}^{\text{Kow}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & -E^T \ell E \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & k^T F \\ F^T k & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. После редукции по группе $SO(q)$ (4.3) спектральные инварианты матриц Лакса $\tilde{L}^{\text{Kow}}(\lambda)$ (4.5) и $\tilde{L}_z(\lambda)$ (3.28) находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона в $T^*SO(p)$.

Непосредственные вычисления показывают, что матрица Лакса $\tilde{L}(\lambda)$ (3.23) после редукции удовлетворяет уравнению (3.5) с матрицей

$$\tilde{r}_{12}^{\text{Kow}}(\lambda, \mu) = \tilde{r}_{12}(\lambda, \mu) - \sum_{\alpha=1}^{(p(p-1)+q(q-1))/2} Z_\alpha \otimes \hat{P} Z_\alpha \hat{P}. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{P} Z_\alpha \hat{P} = \begin{cases} Z_{\alpha+p(p-1)/2}, & 0 < \alpha \leq \frac{q(q-1)}{2}; \\ 0, & \frac{q(q-1)}{2} < \alpha \leq \frac{p(p-1)}{2}; \\ Z_\alpha, & \frac{p(p-1)}{2} < \alpha. \end{cases}$$

Алгебро-геометрическое описание этой нестандартной R -матрицы можно найти в работе [6].

Для матрицы $\tilde{L}_z(\lambda)$ ядро соответствующей R -матрицы после редукции также изменяется по правилу

$$\tilde{r}_{12}^{z-\text{Kow}}(\lambda, \mu) = [1 \otimes (1 - \lambda \tilde{z})^{-1}] \tilde{r}_{12}^{\text{Kow}}(\lambda, \mu) [(1 - \mu \tilde{z}) \otimes 1].$$

Подставляя связи (4.3) в исходный гамильтониан (3.7), получаем функцию Гамильтона для обобщенного волчка Ковалевской:

$$H = \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j=1}^p \ell_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^q \ell_{ij}^2 \right) - \sum_{i=1}^q (e_i, k^T f_i), \quad (4.7)$$

где $e_1, \dots, e_p$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^p$ (он имеет смысл репера, связанного с волчком), а векторы $f_1, \dots, f_q$ – столбцы матрицы F .

Условие $r = 1$ приводит к тому, что для деформации волчка Ковалевской функции Гамильтона H_1 (3.19) и H_2 (3.20) становятся квадратичными полиномами:

$$H_1 = H - c \sum_{i=1}^q (P \ell P e_i, k^T f_i) + \frac{c^2}{2} \sum_{i=1}^q (k^T f_i, k^T f_i), \quad (4.8)$$

$$H_2 = H - c \sum_{i=1}^q (\ell e_i, k^T f_i), \quad (4.9)$$

а не кубическими, как в общем случае.

Таким образом, и характерное удвоение членов ℓ_{ij}^2 при $i, j \leq q$ в (4.7), и существование нетривиальных квадратичных деформаций H_1^y (4.8) и H_2^y (4.9) – результат редукции по группе $SO(q)$.

Выпишем явно функции Гамильтона при $p = 3$, $q = 2$ и $f_2 = 0$, т.е. для случая, отвечающего обычному волчку Ковалевской на алгебре $e(3)$ с одним вектором Пуассона $x = k^T f_1$. Итак, деформации гамильтониана для волчка Ковалевской равны

$$H_1 = \frac{1}{2}(\ell_{23}^2 + \ell_{13}^2 + 2\ell_{12}^2) - x_1 + c\ell_{12}x_2 + \frac{c^2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (4.10)$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(\ell_{23}^2 + \ell_{13}^2 + 2\ell_{12}^2) - x_1 + c(\ell_{12}x_2 + \ell_{13}x_3). \quad (4.11)$$

Гамильтонианы H_1 и H_2 связаны каноническим преобразованием вида (3.16), порождаемым действием группы $SO(3)$.

Матрица Лакса $\tilde{L}_y(\lambda)$ была построена в терминах кинетических моментов ℓ_{ij} и векторов Пуассона $x_i = k^T f_i$ в работе [2].

4.3. Интегрируемые системы на алгебре $so(4)$. Полагая $p = q = 3$ и $F_{ij} = 0$ в функции Гамильтона H (3.7), мы получим интегрируемый гамильтониан на фазовом пространстве $so(3) \oplus so(3)$. В переменных

$$u_k = -\varepsilon_{ijk}\ell_{jk}, \quad v_k = -\varepsilon_{ijk}m_{jk}$$

гамильтониан (3.7) равен

$$H = \sum_{k=1}^3 \alpha_k (u_k^2 + v_k^2) - 2 \sum_{k=1}^3 \beta_k u_k v_k.$$

Коэффициенты

$$\alpha_k = \varepsilon_{ijk}^2 \frac{a_i b_i - a_j b_j}{a_i^2 - a_j^2}, \quad \beta_k = \varepsilon_{ijk}^2 \frac{a_i b_j - a_j b_i}{a_i^2 - a_j^2}$$

удовлетворяют соотношению

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\beta_3^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\beta_1^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)\beta_2^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.$$

Поэтому согласно работе [7] этот гамильтониан принадлежит семейству систем Стеклова–Манакова с дополнительным квадратичным гамильтонианом. Так как в этом случае $F = 0$, то мы не можем построить “возмущение” этой интегрируемой системы в рамках предлагаемого подхода.

Более сложный переход к алгебре $so(4)$ был предложен в работе [3]. Рассмотрим обобщенный волчок Ковалевской в неподвижной системе координат с матрицей Лакса $g^T L_y^{(2)} g$ (3.22) при учете соотношений (4.3). Применив дополнительное преобразование подобия

$$\hat{L}_y = (1 - \lambda^{-1}g)(g^T L_y^{(2)}(\lambda)g)(1 - \lambda^{-1}g)^{-1}, \quad g = c \begin{pmatrix} 0 & k^T F \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

мы получим

$$\begin{aligned} \hat{L}_y = & \left[1 + \frac{c^2}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F^T F \end{pmatrix} \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & -E^T \ell E \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^T F \\ F^T \gamma & 0 \end{pmatrix} + \frac{c^2}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F^T d F \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\gamma = (1 + \ell^T)k, \quad d = k^T \ell k. \quad (4.13)$$

Матрица деформации

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F^T F \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r^T F^T k k^T F r \end{pmatrix}$$

не зависит от динамических переменных только вследствие $r = 1$ (4.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Матрица $\hat{L}_y(\lambda)$ (4.12) удовлетворяет уравнению (3.5), а ядро соответствующей R -матрицы не зависит от динамических переменных и равно

$$\hat{r}_{12}^{\text{Kow}}(\lambda, \mu) = \left[1 \otimes \left(1 + \frac{c^2}{\mu^2} h \right)^{-1} \right] \hat{r}_{12}^{\text{Kow}}(\lambda, \mu) \left[\left(1 + \frac{c^2}{\lambda^2} h \right) \otimes 1 \right]. \quad (4.14)$$

Данное предложение доказывается прямым вычислением.

Скобки Пуассона между переменными ℓ , γ и d (4.16) имеют вид

$$\begin{aligned} \{\ell_{ij}, \ell_{mn}\} &= \delta_{in} \ell_{jm} + \delta_{jm} \ell_{in} - \delta_{im} \ell_{jn} - \delta_{jn} \ell_{im}, \\ \{\ell_{ij}, \gamma_{nm}\} &= \delta_{jm} \gamma_{ni} - \delta_{im} \gamma_{nj}, \\ \{d_{ij}, d_{kn}\} &= \delta_{ik} d_{jn} + \delta_{jn} d_{ik} - \delta_{in} d_{jk} - \delta_{jk} d_{in}, \\ \{d_{ij}, \gamma_{nk}\} &= \delta_{in} \gamma_{kj} - \delta_{jn} \gamma_{ki}, \\ \{\gamma_{ij}, \gamma_{kn}\} &= c^2 (\delta_{jn} \ell_{is} - \delta_{ik} d_{jn}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Все остальные скобки равны нулю.

Матрица ℓ совместно с любым из столбцов матрицы γ образует подалгебру относительно скобок (4.15). Если $\text{rank } F = 1$, то

$$F^T d F = 0, \quad (\gamma^T F)_{ij} = \delta_{j1} \gamma_{i1},$$

и, следовательно, в этом случае матрица (4.12) определена на одной из этих подалгебр. Заметим, что матрица d совместно с любой из строк матрицы γ также образует подалгебры, изоморфные рассмотренным выше.

При $p = 3$ эти подалгебры $\{\ell, \gamma_{j1}\}$ или $\{d, \gamma_{1j}\}$ изоморфны алгебре Ли $so(4)$ [3]. Введем новые обозначения для координат

$$J_i = -\varepsilon_{ijk} \ell_{jk}, \quad y_j = \gamma_{j1} \quad (4.16)$$

так, чтобы скобки (4.15) совпадали со стандартными скобками на алгебре $so(4)$:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, y_j\} = \varepsilon_{ijk} y_k, \quad \{y_i, y_j\} = c^2 \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (4.17)$$

При $q = 1$ и $q = 3$ гамильтониан (3.20) в переменных (4.16) равен

$$H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - y_1.$$

Этот гамильтониан отвечает волчку Лагранжа на алгебре $so(4)$. При $q = 2$ гамильтониан (3.20)

$$H_2 = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2) - y_1$$

отвечает волчку Ковалевской на алгебре $so(4)$. Как и для обычного волчка Ковалевской [1], при $p = 3$, $q = 2$ матрица Лакса (4.12) допускает обобщение, которое позволяет описать гиростат Ковалевской на алгебре $so(4)$ [3]. Это обобщение связано с редукцией специального вида по подгруппе $SO(2)$, которое не меняет ядро соответствующих R -матриц (4.6) и (4.14).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построены матрицы Лакса для интегрируемой деформации известной системы взаимодействующих волчков, связанных с алгеброй $so(p, q)$. Построены классические R -матрицы как для этой новой системы, так и для обобщенных волчков Лагранжа и Ковалевской, матрицы Лакса для которых были получены ранее.

Для рассмотренных нами систем элемент y (3.9), определяющий деформацию (2.11) известных ранее орбит, может быть единственным образом определен как решение системы уравнений (3.10), связанных с исходной орбитой (3.4) и соответствующей R -матрицей (3.6). Алгебро-геометрический смысл уравнений (3.10) нам не известен.

Благодарности. Автор благодарен М. А. Семенову-Тянь-Шанскому, И. В. Комарову и В. В. Соколову за внимание к работе и полезные замечания. Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00888.

Список литературы

- [1] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
- [2] В. В. Соколов, А. В. Цыганов. ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 118.
- [3] I. V. Kottarova, V. V. Sokolov, A. V. Tsiganov. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 8035.
- [4] И. З. Голубчик, В. В. Соколов. Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 9.
- [5] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 321.
- [6] I. D. Marshall. Commun. Math. Phys. 1998. V. 191. P. 723.
- [7] А. П. Веселов. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298.

Поступила в редакцию 19.XII.2003 г.