Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Ферапонтов, Р. А. Шарипов, О законах сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 1, 109–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 08:23:50

Е. В. Ферапонтов, Р. А. Шарипов
**О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ПЕРВОГО
ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА**

Рассмотрены квадратичные по производным законы сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа. Выведены определяющие соотношения для плотностей таких законов сохранения, и найдена инвариантная относительно точечных замен переменных форма записи определяющих соотношений. Приведены примеры недиагонализуемых систем, допускающих квадратичные законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается класс квазилинейных систем уравнений в частных производных, известный как класс уравнений *гидродинамического типа*:

$$u_t^i = A_j^i(\mathbf{u})u_x^j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Этот класс уравнений выдерживает обратимые точечные преобразования вида

$$\tilde{u}^i = \tilde{u}^i(u^1, \dots, u^n), \quad (1.2)$$

при которых компоненты матрицы $A_j^i(\mathbf{u})$ преобразуются как компоненты тензорного поля типа $(1, 1)$ при замене локальных координат u^i на $\tilde{u}^i$. Последнее обстоятельство позволяет привлекать различные дифференциально-геометрические методы к исследованию таких уравнений.

Система уравнений (1.1) называется диагонализуемой, если преобразованием (1.2) она приводится к диагональному виду

$$u_t^i = \lambda_i(\mathbf{u})u_x^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

(суммирование по i нет). Переменные u^i в этом случае называются инвариантами Римана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система уравнений (1.1) называется *гидродинамически интегрируемой*, если она обладает континуальным набором гидродинамических симметрий (или гидродинамических законов сохранения), который параметризуется n произвольными функциями одной переменной.

Напомним, что гидродинамический закон сохранения для системы уравнений (1.1) — это интегральный функционал вида

$$F = \int f(\mathbf{u}) dx, \quad (1.4)$$

производная по времени которого в силу этих уравнений равна нулю. Вопрос о гидродинамической интегрируемости уравнений (1.1) хорошо изучен для систем с матрицей общего положения, собственные числа которой вещественны и попарно различны (см. обзоры [1, 2]). Решение этого вопроса формулируется так.

ТЕОРЕМА 1. Система уравнений (1.1) с матрицей общего положения гидродинамически интегрируема тогда и только тогда, когда она диагонализуема и полугамильтонова.

Условие полугамильтоновости для диагональных систем (1.3) записывается в виде следующих соотношений:

$$\partial_i \left(\frac{\partial_j \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right) = \partial_j \left(\frac{\partial_i \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k} \right), \quad i \neq k \neq j. \quad (1.5)$$

Критерий диагонализуемости для уравнений (1.1) обсуждался в [3], а инвариантная форма записи соотношений (1.5) для недиагональных (но диагонализуемых) систем (1.1) была найдена в [4].

В данной работе мы рассматриваем законы сохранения первого порядка

$$F = \int f(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) dx. \quad (1.6)$$

Отметим, что законы сохранения вида (1.6) для диагональных систем (1.3) исследовались в работах [2] и [5, 6]. Недиagonalные (и недиагонализуемые) системы уравнений (1.1) с высшими законами сохранения в размерности $n = 3$ исследовались в [7]. Цель данной работы — исследовать такие системы в произвольной размерности.

Оказалось, что для недиагонализуемых систем (более точно, для систем, не допускающих ни одного инварианта Римана) законы сохранения первого порядка с необходимостью являются квадратичными по $\mathbf{u}_x$,

$$F = \int g_{ij}(\mathbf{u}) u_x^i u_x^j dx \quad (1.7)$$

(см. раздел 2 ниже). Коэффициенты g_{ij} (интерпретируемые как компоненты метрики) и матрица A_j^i связаны соотношениями

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad (1.8)$$

$$\nabla_k A_{ij} + \nabla_i A_{jk} + \nabla_j A_{ki} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь $A_{ij} = g_{is} A_j^s$, а ∇ — ковариантное дифференцирование, порожденное метрикой g_{ij} . Соотношение (1.9) означает, что симметричный тензор A_{ij} является тензором Киллинга для метрики g_{ij} , или же, что эквивалентно, выражение

$$h = A_{ij}(\mathbf{u}) u_x^i u_x^j$$

является квадратичным интегралом геодезических метрики g_{ij} (см., например, [8]). Уравнение Киллинга (1.9) может быть получено на основе следующего соотношения, проверяемого непосредственным вычислением:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} u_x^i u_x^j = \frac{\partial}{\partial x} A_{ij} u_x^i u_x^j + \nabla_k A_{ij} u_x^i u_x^j u_x^k.$$

Из него видим, что функционал (1.7) является законом сохранения системы (1.1) в смысле определения из раздела 2 (см. ниже) тогда и только тогда, когда

$$\nabla_k A_{ij} u_x^i u_x^j u_x^k \equiv 0.$$

Отсюда уравнения Киллинга получаются симметризацией по индексам i, j, k .

Имеется полезная конструкция (см. [9, 10]), которая позволяет по всякому интегралу (1.7) строить запас точных решений исходной системы (1.1), сводя их отыскание к интегрированию конечномерной гамильтоновой системы, получаемой ограничением исходной системы на множество стационарных точек ее интеграла. В нашем случае эта конечномерная система есть не что иное, как уравнения геодезических метрики g_{ij} . Более точно, рассмотрим стандартное $2n$ -мерное симплектическое пространство с координатами u^i, p_i и пару коммутирующих квадратичных гамильтонианов

$$H_1 = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \quad H_2 = \frac{1}{2} A^{ij} p_i p_j$$

($A^{ij} = g^{ik} A_k^j$; коммутация H_1 и H_2 следует из (1.8), (1.9)). Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$u_x^i = \frac{\partial H_1}{\partial p_i} = g^{ij} p_j, \quad p_{ix} = -\frac{\partial H_1}{\partial u^i}, \quad (1.10)$$

$$u_t^i = \frac{\partial H_2}{\partial p_i} = A^{ij} p_j, \quad p_{it} = -\frac{\partial H_2}{\partial u^i}. \quad (1.11)$$

Здесь x и t – времена, отвечающие гамильтонианам H_1 и H_2 . Исключая из (1.10) и (1.11) переменные p_i , мы приходим к уравнениям

$$u_t^i = A_j^i u_x^j, \quad u_{xx}^i + \Gamma_{jk}^i u_x^j u_x^k = 0. \quad (1.12)$$

где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля аффинной связности, порожденной метрикой g_{ij} . Совместность переопределенной системы уравнений (1.12) является следствием (1.8), (1.9). Заметим, что второе из уравнений (1.12) есть не что иное, как уравнение стационарных точек интеграла F : $\frac{\delta F}{\delta u^i} = 0$. Таким образом, всякий квадратичный интеграл (1.7) позволяет построить $2n$ -параметрическое семейство точных решений системы (1.1), сводя их отыскание к интегрированию пары коммутирующих гамильтоновых потоков (1.10) и (1.11), или же, что эквивалентно, к интегрированию переопределенной системы уравнений (1.12). Как легко видеть, всякое решение системы уравнений (1.12) “расслоено” на однопараметрическое семейство геодезических метрики g_{ij} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Представляет интерес исследовать совместность переопределенной системы уравнений (1.12) в самом общем случае, не накладывая изначально никаких ограничений на симметричную связность Γ_{jk}^i (т.е. не считая, что эта связность является метрической и происходит из некоторого квадратичного интеграла исходной системы уравнений (1.1)). Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{xx}^i + \Gamma_{jk}^i u_x^j u_x^k) = (\nabla_k \nabla_l A_s^i + R_{lkp}^i A_s^p) u_x^k u_x^l u_x^s,$$

которое выполняется в силу (1.12) (здесь R_{lkp}^i — тензор кривизны связности Γ_{jk}^i), мы сразу же приходим к заключению, что совместность будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\nabla_k \nabla_l A_s^i + R_{lkp}^i A_s^p + \dots = 0. \quad (1.13)$$

Многоточием обозначены члены, получаемые из выписанных симметризаций по индексам k, l, s (отметим, что симметризация (1.13) по индексам k, l, s совпадает с удвоенной циклической перестановкой по тем же индексам в силу тождеств Бьянки, которым удовлетворяет тензор кривизны любой симметричной связности). Всякая связность, удовлетворяющая соотношениям (1.13), позволяет построить $2n$ -параметрическое семейство решений исходной системы путем интегрирования соответствующих уравнений геодезических. Вопрос о том, какие системы (1.1) допускают связности (1.13) (и если допускают, то сколько), требует специального исследования.

Соотношения (1.8) и (1.9) накладывают жесткие ограничения не только на метрику g_{ij} , но и на сам аффинор A_j^i . Так, из (1.8) и (1.9) следует, что собственные числа λ^i аффинора A_j^i удовлетворяют условию

$$L_i \lambda^i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где L_i — производная Ли вдоль правого собственного вектора X_i , отвечающего собственному значению λ^i . Системы (1.1), удовлетворяющие этому условию, носят название слабо нелинейных (linearly degenerate).

В качестве наиболее важных примеров недиагонализуемых систем, допускающих квадратичные по производным интегралы, следует отметить матричное уравнение Хопфа

$$U_t = (U^2)_x,$$

где U — симметрическая матрица порядка 3×3 с дополнительной редукцией $\text{tr } U^i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, а также матричное уравнение

$$U_t = (UU^T U)_x,$$

где U — матрица порядка 2×3 с редукцией $\text{tr}(UU^T)^i = \text{const}$, $i = 1, 2$. Эти примеры подробно обсуждаются в разделе 4. В обоих случаях имеется ровно два независимых интеграла, квадратичных по первым производным.

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Функционал (1.6) является законом сохранения или первым интегралом для уравнений (1.1), если его производная по t в силу уравнений (1.1) равна нулю. Математически более точным (и более удобным) является следующее определение, которое эквивалентно сформулированному выше при достаточно разумных предположениях о поведении функций $u^i(x, t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функционал (1.6) является законом сохранения для уравнений (1.1), если найдется функция $h = h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$, такая что дифференциальная 1-форма $\omega = f dx + h dt$ замкнута для любого решения $\mathbf{u}(x, t)$ этих уравнений.

Замкнутость формы ω из определения 2 означает следующее:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Вычислим производные $\partial f / \partial t$ и $\partial h / \partial x$ из (2.1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} A_j^i u_x^j + \frac{\partial f}{\partial u_x^i} A_j^i u_{xx}^j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_x^i} \frac{\partial A_j^i}{\partial u_x^k} u_x^j u_x^k \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial u^j} u_x^j + \frac{\partial h}{\partial u_x^j} u_{xx}^j \right). \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.2) с (2.3), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u_x^j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_x^i} A_j^i, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial u^j} u_x^j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} A_j^i u_x^j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_x^i} \frac{\partial A_j^i}{\partial u_x^k} u_x^j u_x^k \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Продифференцируем первое из соотношений (2.4) по u_x^k . В результате получим

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_x^j \partial u_x^k} = \sum_{i=1}^n g_{ik} A_j^i, \quad (2.5)$$

где $g_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_x^i \partial u_x^k}$. Теперь воспользуемся симметричностью смешанной производной в левой части (2.5) для получения уравнения, не содержащего функции h . Альтернируя по индексам j и k , из (2.5) находим

$$\sum_{i=1}^n A_j^i g_{ik} = \sum_{i=1}^n g_{ji} A_k^i, \quad (2.6)$$

причем $g_{ij} = g_{ji}$. При точечных преобразованиях (1.2) величины g_{ij} из (2.5) и (2.6) преобразуются как компоненты дважды ковариантного симметричного тензора. Однако зависимость этих величин от $\mathbf{u}_x$ не позволяет трактовать их как компоненты тензора

в обычном понимании — это элемент расширенной алгебры тензорных полей. Идея рассмотрения таких нестандартных тензорных полей восходит к работам Финслера и Картана [11, 12]. Применение этих объектов в теории ньютоновских динамических систем было найдено недавно в работах [13] и [14].

Пусть $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ — репер из собственных векторов матрицы скоростей A_j^i и пусть $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^n$ — сопряженный ему репер из ковекторов (1-форм). Выбор таких реперов неоднозначен, однако для матрицы $A_j^i(\mathbf{u})$ общего положения эта неоднозначность сводится к калибровочным преобразованиям

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{u}) \longrightarrow \varphi_i(\mathbf{u}) \mathbf{X}_i(\mathbf{u}), \quad \mathbf{w}^i(\mathbf{u}) \longrightarrow \varphi_i(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{w}^i(\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

Выбор реперов из (2.7) позволяет получить следующие разложения для единичного оператора $\mathbf{1}$ и для оператора $\mathbf{A}(\mathbf{u})$:

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{w}^i, \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{w}^i. \quad (2.8)$$

Разложим вектор $\mathbf{u}_x$ из аргумента функций f и h по этому реперу,

$$\mathbf{u}_x = \sum_{i=1}^n y^i \mathbf{X}_i, \quad (2.9)$$

где $y^i = \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{u}_x$. Тогда функции f и h можно считать функциями от коэффициентов такого разложения $f = f(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ и $h = h(\mathbf{u}, \mathbf{y})$. Такие функции будем называть представлениями скалярных полей f и h в репере. Использование такого представления при учете соотношений (2.8) и (2.9) позволяет переписать первое из уравнений (2.4) в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial y^i} = \lambda_i(\mathbf{u}) \frac{\partial f}{\partial y^i}. \quad (2.10)$$

Немедленным следствием (2.10) является следующее разделение переменных:

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{u}, y^i), \quad h = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{u}) f_i(\mathbf{u}, y^i). \quad (2.11)$$

Подставим представление f и h в форму (2.11) во второе уравнение (2.4). В результате получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j) y^i L_i f_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y^i \left(\frac{\partial f_j}{\partial y^j} y^j - f_j \right) L_i \lambda_j = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\lambda_i - \lambda_j) c_{ij}^k \frac{\partial f_k}{\partial y^k} y^i y^j, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где через L_i обозначены производные Ли вдоль собственных векторов матрицы скоростей A_j^i

$$L_i = L_{\mathbf{X}_i}. \quad (2.13)$$

Структурные скаляры $c_{ij}^k(\mathbf{u})$ репера $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ из (2.12) определены посредством (2.13) из следующих соотношений:

$$L_i \mathbf{X}_j = [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k \mathbf{X}_k. \quad (2.14)$$

Выберем три попарно различных значения $i \neq j \neq k \neq i$ и вычислим смешанную производную (2.12) третьего порядка по y^i, y^j и y^k . Левая часть этого соотношения при таком дифференцировании обращается в нуль. Дифференцирование правой части дает

$$\ddot{f}_k c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) + \ddot{f}_i c_{jk}^i (\lambda_j - \lambda_k) + \ddot{f}_j c_{ki}^j (\lambda_k - \lambda_i) = 0, \quad (2.15)$$

где через $\ddot{f}_k$ обозначена вторая производная f_k по y^k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Закон сохранения (1.6) для уравнений (1.1) называется законом сохранения с существенно непостоянной сепарантой, если $\ddot{f}_k \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Для законов сохранения с существенно непостоянной сепарантой производные $\ddot{f}_i, \ddot{f}_j$ и $\ddot{f}_k$ линейно независимы над полем функций, не зависящих от $y^1, \dots, y^n$. Немедленным следствием этого являются соотношения

$$c_{ij}^k = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (2.16)$$

Имеет место следующая хорошо известная

ЛЕММА 1. Для того чтобы линейный оператор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$ общего положения был диагонализуем точечным преобразованием (1.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (2.16).

Применяя лемму 1 к нашему случаю, получаем следующую важную структурную теорему.

ТЕОРЕМА 2. Всякая система уравнений (1.1) с матрицей общего положения, обладающая законом сохранения (1.6) с существенно непостоянной сепарантой, диагонализуема.

Мы не будем исследовать диагонализуемый случай, ибо он достаточно подробно исследован в работах [5] и [6]. Противоположным является случай законов сохранения (1.6) с константной сепарантой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Закон сохранения (1.6) для уравнений (1.1) называется законом сохранения с константной сепарантой, если $\ddot{f}_k \equiv 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.

Общий случай является промежуточным между двумя крайними случаями из определений 3 и 4. Его рассмотрение есть предмет отдельной публикации.

3. ГЕОМЕТРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ С КОНСТАНТНОЙ СЕПАРАНТОЙ

Условие $\ddot{f}_k \equiv 0$, определяющее закон сохранения с константной сепарантой, означает квадратичность f_k по y^k . Величины g_{ij} из (2.5) в этом случае не зависят от $\mathbf{u}_x$, а сама плотность закона сохранения (1.6) может быть специализирована к виду

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(\mathbf{u}) u_x^i u_x^j + \sum_{i=1}^n M_i(\mathbf{u}) u_x^i + N(\mathbf{u}). \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Закон сохранения с константной сепарантой (3.1) называется невырожденным, если невырожденна матрица g_{ij} , определяющая в главном зависимость его плотности f от $\mathbf{u}_x$.

В невырожденном случае матрица g_{ij} задает риманову (или псевдориманову) метрику. В силу (2.6) операторнозначное поле $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, задаваемое матрицей скоростей системы уравнений (1.1), состоит из симметрических операторов относительно метрики g_{ij} . Метрика g_{ij} диагональна в репере из собственных векторов операторного поля $\mathbf{A}$, причем величины $\ddot{f}_k$ из (2.15) – это в точности диагональные компоненты тензора g_{ij} в таком репере: $\ddot{f}_k = g_{kk} = g(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_k)$. Сами же соотношения (2.15) для трех не совпадающих значений индексов i, j и k можно переписать в виде

$$g_{kk} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) + g_{ii} c_{jk}^i (\lambda_j - \lambda_k) + g_{jj} c_{ki}^j (\lambda_k - \lambda_i) = 0. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) следует рассматривать как систему линейных уравнений на структурные скаляры c_{ij}^k , определенные согласно (2.14). Воспользуемся соотношениями (2.12), подставив в них f_k в форме, учитывающей их квадратичную зависимость от y^k ,

$$f_k = g_{kk} (y^k)^2 + M_k y^k + N_k. \quad (3.3)$$

Суммирование по k в (3.3) нет. Величины M_k в (3.3) являются компонентами ковекторного поля $\mathbf{M}$ в репере $X_1, \dots, X_n$. Выбор величин N_k неоднозначен (они не являются компонентами ковектора). Единственное условие, которому должен удовлетворять выбор этих величин, выражается соотношениями

$$\sum_{k=1}^n N_k = f|_{\mathbf{y}=0}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k N_k = h|_{\mathbf{y}=0}. \quad (3.4)$$

Соотношения (3.4) вытекают из (2.11). Подстановка (3.3) в (2.12) приводит к соотношению, в которое входят слагаемые первой, второй и третьей степеней по $\mathbf{y}$. Это позволяет разделить его на три соотношения. Первое имеет вид

$$\lambda_i L_i \left(\sum_{j=1}^n N_j \right) = L_i \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j N_j \right). \quad (3.5)$$

Сворачивая (3.5) по индексу i с компонентами X^i произвольного тензорного поля $\mathbf{X}$ в репере $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ и учитывая (3.4), получаем

$$L_{\mathbf{A}\mathbf{X}} f(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = L_{\mathbf{X}} h(\mathbf{u}, \mathbf{0}). \quad (3.6)$$

Мы можем исключить функцию $h(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ после рассмотрения пары соотношений вида (3.6) с двумя различными векторными полями $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. В качестве условия совместности получим

$$(L_{\mathbf{X}} L_{\mathbf{A}\mathbf{Y}} - L_{\mathbf{Y}} L_{\mathbf{A}\mathbf{X}} - L_{\mathbf{A}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]})f(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0. \quad (3.7)$$

Согласно результатам [4] соотношение (3.7) есть в точности определяющее соотношение для плотности гидродинамического закона сохранения (1.4). Это наблюдение позволяет сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого закона сохранения (1.6) с константной сепарантой имеется редукция его плотности*

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x) \Big|_{\mathbf{u}_x=0},$$

являющаяся плотностью гидродинамического закона сохранения (1.4) для той же системы уравнений (1.1).

Напомним, что теорема доказана нами для систем уравнений (1.1) с матрицей скоростей общего положения, собственные числа которой вещественны и попарно различны.

Второе соотношение, вытекающее из подстановки (3.3) в (2.12), имеет следующий вид:

$$L_i M_j - L_j M_i - \sum_{k=1}^n c_{ij}^k M_k = 0. \quad (3.8)$$

После свертки (3.8) по индексам i и j с компонентами двух векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ в репере из собственных векторов матрицы скоростей $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ получаем соотношение

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} \cdot \mathbf{M}) - L_{\mathbf{Y}}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{M}) - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \cdot \mathbf{M} = 0.$$

Это соотношение эквивалентно замкнутости 1-формы $\mathbf{M}$, которой определяется линейная по $\mathbf{u}_x$ часть плотности закона сохранения (3.1). Это обстоятельство приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Система уравнений (1.1) общего положения не имеет нетривиальных законов сохранения первого порядка, линейных по $\mathbf{u}_x$, и линейная часть любого закона сохранения с невырожденной константной сепарантой может быть отброшена.*

Результаты, подобные теоремам 3 и 4, содержатся в [7] для уравнений (1.1) в размерности $n = 3$. Из соотношения (3.1) и доказанных выше теорем 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Всякий первый интеграл системы уравнений (1.1) общего положения, имеющий константную сепаранту, квадратичен по производным $\mathbf{u}_x$ и имеет вид (1.7).*

Отметим, что всякое отклонение от условия константности сепаранты в законе сохранения первого порядка (1.6) влечет частичную диагонализуемость системы уравнений (1.1). Действительно, пусть одна из производных $\ddot{f}_k$ отлична от нуля, для определенности можно считать $\ddot{f}_n \neq 0$. Тогда из соотношения (2.15) получаем

$$c_{ij}^n = 0 \text{ для всех } i \neq n \neq j.$$

Значит, собственные векторы матрицы скоростей $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n-1}$ порождают инволютивное распределение. Это означает, что точечным преобразованием (1.2) уравнения (1.1) приводятся к виду

$$\begin{cases} u_t^i = \sum_{j=1}^n A_j^i(\mathbf{u}) u_x^j, & i = 1, \dots, n-1, \\ u_t^n = A_n^n(\mathbf{u}) u_x^n, \end{cases}$$

имеющему один инвариант Римана $\lambda_n = A_n^n$. Полученное утверждение сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 6. *Всякий первый интеграл системы уравнений (1.1) общего положения, не имеющей ни одного инварианта Римана, является интегралом с константной сепарантой. Он квадратичен по производным $\mathbf{u}_x$ и имеет вид (1.7).*

Это утверждение было декларировано в разделе 1. Вместе с предположением о невырожденности матрицы g_{ij} в (1.7) оно использовалось при выводе соотношений (1.8) и (1.9). При этом, по существу, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Метрика g_{ij} определяет квадратичный по $\mathbf{u}_x$ закон сохранения для системы (1.1) тогда и только тогда, когда она диагонализуется в репере из собственных векторов матрицы скоростей и тензор A_{ij} является тензором Киллинга.*

Дальнейшее исследование законов сохранения первого порядка в случае существенно недиагонализуемых систем уравнений (1.1) основывается на соотношениях (1.8) и (1.9). Первое из них означает диагональность метрики g_{ij} в репере из собственных векторов матрицы скоростей. Запись второго соотношения в этом репере несколько сложнее. Для вычисления ковариантных производных из (1.9) в репере $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ определим компоненты метрической связности в этом репере из следующего соотношения:

$$\nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k. \quad (3.9)$$

Несмотря на симметричность связности Леви-Чивиты ее компоненты в репере Γ_{ij}^k из (3.9) не являются симметричными по i и j . Имеет место соотношение, связывающее их со структурными скалярами репера,

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = c_{ij}^k. \quad (3.10)$$

В силу (3.10) из условия согласованности метрики и связности для Γ_{ij}^k можно вывести следующие явные формулы:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k = & \frac{1}{2} \left(\frac{L_i g_{jj}}{g_{jj}} \delta_j^k + \frac{L_j g_{ii}}{g_{ii}} \delta_i^k - \frac{L_k g_{ii}}{g_{kk}} \delta_j^i \right) + \\ & + \frac{1}{2} c_{ij}^k + \frac{1}{2} \frac{g_{jj}}{g_{kk}} c_{ki}^j + \frac{1}{2} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} c_{kj}^i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При несовпадающих значениях индексов формула (3.11) принимает вид

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} c_{ij}^k + \frac{1}{2} \frac{g_{jj}}{g_{kk}} c_{ki}^j + \frac{1}{2} \frac{g_{ii}}{g_{kk}} c_{kj}^i, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (3.12)$$

При совпадении значений каких-либо двух индексов (3.11) дает

$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2} \frac{L_k g_{ii}}{g_{kk}} + \frac{g_{ii}}{g_{kk}} c_{ki}^i, \quad k \neq i, \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \frac{L_j g_{ii}}{g_{ii}} + c_{ij}^i, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} \frac{L_i g_{jj}}{g_{jj}}. \quad (3.15)$$

В формулах (3.14) и (3.15) совпадение индексов $i = j$ возможно, тогда как в формуле (3.13) оно исключается.

Возвращаясь к формуле (1.9), вычислим компоненты ковариантной производной тензора Киллинга в репере $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$. Они определяются формулой

$$\nabla_k A_{ij} = L_k A_{ij} - \sum_{s=1}^n A_{sj} \Gamma_{ki}^s - \sum_{s=1}^n A_{is} \Gamma_{kj}^s. \quad (3.16)$$

Напомним, что матрицы A_{ij} и g_{ij} в репере $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ диагональны, т.е.

$$A_{ij} = \lambda_i g_{ii} \delta_j^i, \quad g_{ij} = g_{ii} \delta_j^i. \quad (3.17)$$

Учет соотношений (3.17) при подстановке (3.12) в формулу (3.16) для несовпадающих значений индексов $i \neq j \neq k \neq i$ дает

$$\nabla_k A_{ij} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{2} (g_{jj} c_{ki}^j + g_{ii} c_{jk}^i - g_{kk} c_{ij}^k). \quad (3.18)$$

Подстановка (3.18) в уравнение (1.9) приводит к соотношению, в точности совпадающему с (3.2).

Противоположным по отношению к только что рассмотренному случаю является случай полного совпадения всех индексов $i = j = k$. В этом случае соотношение (3.16) после подстановки в уравнение (1.9) с учетом (3.15) дает

$$L_i \lambda_i = 0. \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) не содержит компонент метрики g_{ij} . Оно накладывает ограничение на выбор самой матрицы скоростей. Системы уравнений (1.1), удовлетворяющие этому ограничению, носят название *слабо нелинейных*.

Остается рассмотреть промежуточный случай $i \neq j = k$. В этом случае из соотношения (3.16) с учетом (3.13), (3.14) и (3.15) получаем

$$\frac{L_i g_{jj}}{g_{jj}} = -\frac{L_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} + 2c_{ij}^j, \quad i \neq j. \quad (3.20)$$

Заметим, что формулы типа (3.2) и (3.20) были получены ранее в [15]. В целом вся совокупность соотношений (3.2), (3.19) и (3.20) эквивалентна уравнениям (1.9). Несмотря на то что уравнения Киллинга (1.9) имеют простой и инвариантный дифференциально-геометрический смысл, соотношения (3.2), (3.19) и (3.20) несут гораздо большую информацию. В частности, они позволяют легко получить оценку сверху числа квадратичных по $\mathbf{u}_x$ интегралов для существенно недиагонализуемых систем (1.1). Обозначим через r ранг линейной (по g_{ii}) системы (3.2), вычисленный в точке общего положения.

ТЕОРЕМА 8. *Существенно недиагонализуемая система (1.1) порядка $n \times n$ может иметь не более $n - r$ линейно независимых интегралов первого порядка, квадратичных по $\mathbf{u}_x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коэффициент g_{jj} при фиксированном значении индекса j . Уравнения (3.20) дают явные выражения для $L_i g_{jj}$ при $i \neq j$. Для нахождения $L_j g_{jj}$ мы поступим следующим образом. Выберем пару индексов $i \neq k$, отличных от j , таких что $c_{ik}^j \neq 0$, после чего применим оператор L_j к соотношению (3.2). Подставляя $L_j g_{ii}$ и $L_j g_{kk}$ из соотношений (3.20), мы получим явное выражение для $L_j g_{jj}$. Таким образом, все производные от g_{jj} оказались выраженными через сами коэффициенты g_{jj} , т.е. мы получили на g_{jj} систему уравнений Пфаффа, общее решение которой зависит не более чем от n произвольных постоянных. Учитывая, что соотношения (3.2) задают r дополнительных линейных ограничений, мы приходим к утверждению теоремы. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Недиагонализуемая система порядка 3×3 (а также 4×4) может иметь не более двух интегралов, квадратичных по $\mathbf{u}_x$.*

В самом деле, для $n = 3$ имеется ровно одно соотношение (3.2), причем оно не обращается тождественно в ноль в силу недиагонализуемости. Случай $n = 4$ не многим сложнее предыдущего. Пусть (без ограничения общности) коэффициент $c_{12}^3 \neq 0$. Тогда соотношение (3.2), записанное для тройки индексов $(1, 2, 3)$, содержит лишь коэффициенты g_{11}, g_{22}, g_{33} . Пусть $c_{ij}^4 \neq 0$ для некоторой пары $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда соотношение (3.2), записанное для тройки индексов $(4, i, j)$, будет заведомо линейно независимо с первым. Таким образом, $r \geq 2$, что и доказывает следствие 2 для $n = 4$.

Приводимые в следующем разделе примеры показывают, что в случаях $n = 3$ и $n = 4$ полученные выше оценки для числа квадратичных интегралов у недиагонализуемых систем являются точными.

4. ПРИМЕРЫ. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХОПФА

ПРИМЕР 1. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение вида

$$U_t = (U^2)_x, \quad (4.1)$$

где U – симметрическая матрица порядка 3×3 с дополнительной редукцией

$$\text{tr } U = \text{const}, \quad \text{tr } U^2 = \text{const}, \quad \text{tr } U^3 = \text{const} \quad (4.2)$$

(легко проверяется, что редукция (4.2) совместима с уравнениями (4.1)). Представим U в виде

$$U = Q^{-1} R Q, \quad (4.3)$$

где $Q \in SO(3)$, $R = \text{diag}(R^1, R^2, R^3)$. Здесь $R^i = \text{const}$ в силу (4.2). Подстановка (4.3) в (4.1) приводит к уравнению

$$[Q_t Q^{-1}, R] = [Q_x Q^{-1}, R^2], \quad (4.4)$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор. Поскольку матрица $Q \in SO(3)$ зависит от трех параметров (например, трех углов Эйлера), уравнение (4.4) представляет собой систему гидродинамического типа порядка 3×3 , которая, как несложно показать [16], является

недиагонализуемой. Эта система имеет ровно два интеграла, квадратичных по первым производным,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr}[(Q_x Q^{-1})^2] &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tr}[2R(Q_x Q^{-1})^2], \\ \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{tr}[R(Q_x Q^{-1})^2] &= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tr}[R^2(Q_x Q^{-1})^2 + (RQ_x Q^{-1})^2].\end{aligned}\quad (4.5)$$

Приведенные формулы становятся более прозрачными, если в уравнениях (4.4) перейти от матрицы Q к переменным y^1, y^2, y^3 по формуле

$$Q_x Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & y^3 & -y^2 \\ -y^3 & 0 & y^1 \\ y^2 & -y^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

(переход от Q к y^i есть не что иное, как дифференциальная подстановка первого порядка). Из (4.4) сразу же вытекает, что

$$Q_t Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & y^3 \lambda^3 & -y^2 \lambda^2 \\ -y^3 \lambda^3 & 0 & y^1 \lambda^1 \\ y^2 \lambda^2 & -y^1 \lambda^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где $\lambda^1 = R^2 + R^3$, $\lambda^2 = R^1 + R^3$, $\lambda^3 = R^1 + R^2$. Из (4.6) и (4.7) следует, что переменные y^1, y^2, y^3 удовлетворяют системе трех волн

$$\begin{aligned}y_t^1 &= \lambda^1 y_x^1 + (\lambda^3 - \lambda^2) y^2 y^3, \\ y_t^2 &= \lambda^2 y_x^2 + (\lambda^1 - \lambda^3) y^1 y^3, \\ y_t^3 &= \lambda^3 y_x^3 + (\lambda^2 - \lambda^1) y^1 y^2.\end{aligned}$$

При этом интегралы (4.5) переходят в известные интегралы системы трех волн:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (y^{12} + y^{22} + y^{32}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda^1 y^{12} + \lambda^2 y^{22} + \lambda^3 y^{32}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^1 y^{12} + \lambda^2 y^{22} + \lambda^3 y^{32}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda^{12} y^{12} + \lambda^{22} y^{22} + \lambda^{32} y^{32}).\end{aligned}$$

Другие примеры недиагонализуемых систем, допускающих пару квадратичных интегралов, могут быть получены следующей простой конструкцией. Пусть $A(u) dt + B(u) dx$ и $M(u) dt + N(u) dx$ — пара интегралов гидродинамического типа исходной системы (1.1). Переходя в уравнениях (1.1) от x, t к новым независимым переменным X, T по формулам

$$dX = A dt + B dx, \quad dT = M dt + N dx, \quad (4.8)$$

мы приходим к системе

$$u_T^i = \tilde{A}_j^i(u) u_X^j,$$

где новая матрица $\tilde{A}_j^i$ связана с A_j^i следующей формулой:

$$\tilde{A}_j^i = (A_j^i B - \delta_j^i A)(\delta_j^i M - A_j^i N)^{-1}.$$

Преобразования типа (4.8) носят название преобразований “по решению” (reciprocal transformations), поскольку переменные X , T явно зависят от решения $\mathbf{u}(x, t)$ системы (1.1). Легко видеть, что квадратичные по $\mathbf{u}_x$ интегралы исходной системы (если таковые имеются) переходят в квадратичные по $\mathbf{u}_X$ интегралы преобразованной системы по несложным формулам, вывод которых мы оставляем читателю. Таким образом, выбирая в качестве исходной некоторую систему, имеющую квадратичные по $\mathbf{u}_x$ интегралы (например, систему (4.4), имеющую пару квадратичных интегралов) и применяя произвольные преобразования по решению, мы получим широкий запас примеров, которые также будут допускать квадратичные интегралы.

Подчеркнем, что система (4.4) имеет ровно 5 интегралов гидродинамического типа [16]. В самом деле, консервативная запись (4.1) дает 6 законов сохранения (напомним, что матрица U является симметрической). Линейное соотношение $\text{tr } U = \text{const}$ уменьшает их число на единицу (оставшиеся нелинейные соотношения (4.2) не приводят к дальнейшему уменьшению размерности пространства гидродинамических интегралов).

Следует отметить, что все известные на настоящий момент недиагонализуемые системы (1.1) порядка 3×3 , допускающие пару интегралов, квадратичных по $\mathbf{u}_x$, сводятся к (4.4) преобразованиями по решению.

Аналогичным образом исследуется и общий случай матричного уравнения Хопфа

$$U_t = (U^2)_x,$$

где U – матрица порядка $n \times n$ с дополнительной редукцией

$$\text{tr } U^k = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Это матричное уравнение представляет собой недиагонализуемую систему гидродинамического типа порядка $N \times N$, где $N = n(n-1)/2$. Можно показать, что она имеет ровно $n-1$ интегралов, квадратичных по производным, а также ровно $n(n+1)/2 - 1$ интегралов гидродинамического типа. Так, для $n = 4$ плотности законов сохранения, квадратичные по производным, имеют вид

$$\text{tr}[(Q_x Q^{-1})^2], \quad \text{tr}[R(Q_x Q^{-1})^2], \quad \text{tr}\left[R^2(Q_x Q^{-1})^2 + \frac{1}{2}(R Q_x Q^{-1})^2\right].$$

Здесь $Q \in SO(4)$ и $R = \text{diag}(R^1, R^2, R^3, R^4)$ определяются из представления $U = Q^{-1} R Q$. (При $n = 3$ третья плотность является линейной комбинацией первых двух.)

ПРИМЕР 2. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение вида

$$U_t = (U U^T U)_x, \tag{4.9}$$

где U – матрица размера 2×3 с дополнительной редукцией

$$\text{tr } U U^T = \text{const}, \quad \text{tr}(U U^T)^2 = \text{const} \tag{4.10}$$

(U^T обозначает транспонированную матрицу). Легко проверяется, что редукция (4.10) совместима с уравнениями (4.9). Представим U в виде

$$U = P^{-1} R Q, \tag{4.11}$$

где $P \in SO(2)$, $Q \in SO(3)$, а R — матрица размера 2×3 следующего специального вида:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ в силу (4.10). Подстановка (4.11) в (4.9) приводит к уравнению

$$RQ_tQ^{-1} - P_tP^{-1}R = \tilde{R}Q_xQ^{-1} - P_xP^{-1}\tilde{R}, \quad (4.12)$$

где $\tilde{R} = RR^TR$. Уравнение (4.12) представляет собой систему гидродинамического типа порядка 4×4 относительно коэффициентов матриц P , Q , которая, как несложно показать [17], является недиагонализуемой. Эта система имеет ровно два интеграла, квадратичных по первым производным, плотности которых имеют вид

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(Q_xQ^{-1})^2 + (P_xP^{-1})^2], \\ & \text{tr}[R^TR(Q_xQ^{-1})^2 + RR^T(P_xP^{-1})^2 + RQ_xQ^{-1}R^TP_xP^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Приведенные формулы становятся более прозрачными, если в (4.12) перейти от матриц Q , P к переменным y^1, y^2, y^3, y^4 по формуле

$$Q_xQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & y^3 + y^4 & -y^2 \\ -y^3 - y^4 & 0 & y^1 \\ y^2 & -y^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_xP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & y^3 - y^4 \\ y^4 - y^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Из (4.12) сразу же вытекает, что

$$\begin{aligned} Q_tQ^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & y^3\lambda^3 + y^4\lambda^4 & -y^2\lambda^2 \\ -y^3\lambda^3 - y^4\lambda^4 & 0 & y^1\lambda^1 \\ y^2\lambda^2 & -y^1\lambda^1 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_tP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & y^3\lambda^3 - y^4\lambda^4 \\ y^4\lambda^4 - y^3\lambda^3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $\lambda^1 = \beta^2$, $\lambda^2 = \alpha^2$, $\lambda^3 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$, $\lambda^4 = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$. Из (4.14) и (4.15) следует, что переменные y^1, y^2, y^3, y^4 удовлетворяют системе четырех волн

$$\begin{aligned} y_t^1 &= \lambda^1 y_x^1 + (\lambda^3 - \lambda^2)y^2y^3 + (\lambda^4 - \lambda^2)y^2y^4, \\ y_t^2 &= \lambda^2 y_x^2 + (\lambda^1 - \lambda^3)y^1y^3 + (\lambda^1 - \lambda^4)y^1y^4, \\ y_t^3 &= \lambda^3 y_x^3 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda^1)y^1y^2, \\ y_t^4 &= \lambda^4 y_x^4 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda^1)y^1y^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В нашем примере двойное отношение четверки скоростей λ^i равно -1 :

$$\frac{(\lambda^1 - \lambda^4)(\lambda^2 - \lambda^3)}{(\lambda^1 - \lambda^3)(\lambda^2 - \lambda^4)} = -1. \quad (4.17)$$

При выполнении условия (4.17) система (4.16) является интегрируемой методом обратной задачи (см. [17; 18, с. 216]). По-видимому, (4.17) является также и необходимым

условием интегрируемости. Тем не менее при любых λ^i система (4.16) имеет пару квадратичных интегралов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (y^{1^2} + y^{2^2} + 2y^{3^2} + 2y^{4^2}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda^1 y^{1^2} + \lambda^2 y^{2^2} + 2\lambda^3 y^{3^2} + 2\lambda^4 y^{4^2}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^1 y^{1^2} + \lambda^2 y^{2^2} + 2\lambda^3 y^{3^2} + 2\lambda^4 y^{4^2}) &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda^{1^2} y^{1^2} + \lambda^{2^2} y^{2^2} + 2\lambda^{3^2} y^{3^2} + 2\lambda^{4^2} y^{4^2}), \end{aligned}$$

плотности которых в точности отвечают плотностям (4.13).

Другие примеры недиагонализуемых систем порядка 4×4 , допускающих пару интегралов, квадратичных по первым производным, могут быть получены применением преобразований по решению к системе (4.12) (отметим, что система (4.12) имеет ровно 6 интегралов гидродинамического типа).

Подчеркнем, что в обоих рассмотренных выше примерах имеется бесконечное число высших интегралов (по два интеграла в каждом четном порядке по производным; при этом интегралы, квадратичные по первым производным, имеют второй порядок).

5. ПРИЛОЖЕНИЕ. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ СООТНОШЕНИЙ (3.2), (3.19), (3.20)

Соотношение (3.19), выведенное выше прямым вычислением в репере из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, ввиду тензорного характера входящих в него величин остается верным в любых локальных координатах. При заданных матрицах A_j^i и g_{ij} его проверка не составляет труда. Однако оно плохо подходит для нахождения метрики g_{ij} по заданной матрице скоростей. Поскольку оно содержит в себе три условия (3.2), (3.19), (3.20), естественно поставить вопрос об отдельном преобразовании соотношений (3.2), (3.19) и (3.20) в произвольную систему локальных координат $u^1, \dots, u^n$.

Инвариантная форма записи условия слабой нелинейности (3.19) известна (см. [7] и [16]). Оно дается в терминах коэффициентов характеристического полинома матрицы скоростей. Пусть

$$P(\lambda) = \det(\lambda - \mathbf{A}) = \lambda^n + \sum_{s=0}^{n-1} P_s(\mathbf{u}) \lambda^s$$

и пусть $A^{(s)}_j{}^i$ — s -я степень матрицы скоростей $\mathbf{A}$. Тогда условие слабой нелинейности (3.19) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_s(\mathbf{u})}{\partial u^i} A^{(s)}_j{}^i = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Для записи соотношений (3.2) в произвольных локальных координатах воспользуемся тензором Хаантьеса $\mathbf{H}$. Напомним, что это тензорное поле типа $(1, 2)$, которое строится по матрице $\mathbf{A}$. Предварительным этапом при этом является построение тензора Нейенхейса $\mathbf{N}$. Тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H}$ могут быть определены формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= [\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}] + \mathbf{A}^2[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbf{A}[\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}] - \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) + \mathbf{A}^2\mathbf{N}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{N}(\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{N}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — два произвольных векторных поля. Компоненты тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{H}$ вычисляются так:

$$N_{ij}^k = \sum_{s=1}^n (A_i^s \partial_s A_j^k - A_j^s \partial_s A_i^k + A_s^k \partial_j A_i^s - A_s^k \partial_i A_j^s),$$

$$H_{ij}^k = \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n (A_s^k A_r^s N_{ij}^r - A_s^k N_{rj}^s A_i^r - A_s^k N_{ir}^s A_j^r + N_{sr}^k A_i^s A_j^r).$$

В репере из собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ тензор Хаантьеса выглядит чрезвычайно просто. Замечательное обстоятельство состоит в том, что его компоненты пропорциональны структурным скалярам репера:

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sum_{k=1}^n (\lambda_i - \lambda_k)^2 (\lambda_j - \lambda_k)^2 c_{ij}^k \mathbf{X}_k. \quad (5.3)$$

Сравнивая (5.3) с (3.2), замечаем, что для записи (3.2) в тензорной форме необходимо ввести тензор $\mathbf{W}$, такой что

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = (\lambda_i - \lambda_j)^2 \mathbf{H}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j).$$

Этот тензор можно определить инвариантным образом, не привязываясь к собственным векторам матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{H}(\mathbf{A}^2 \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - 2 \mathbf{H}(\mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{A} \mathbf{Y}) + \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{A}^2 \mathbf{Y}). \quad (5.4)$$

Соотношениям (5.4) в координатах соответствуют следующие формулы для компонент тензора $\mathbf{W}$:

$$W_{ij}^k = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (A_i^p A_p^q H_{qj}^k - 2 A_i^p A_j^q H_{qp}^k + A_j^p A_p^q H_{iq}^k).$$

Соотношение (3.2) теперь может быть переписано в следующей инвариантной форме:

$$g(\mathbf{W}(\mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{W}(\mathbf{X}, \mathbf{A} \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) + \dots = 0, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ — три произвольных векторных поля. Многоточием в (5.5) обозначены слагаемые, получаемые циклической перестановкой $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$. В локальных координатах (5.5) принимает вид

$$\sum_{s=1}^n \sum_{q=1}^n (W_{qj}^s A_i^q - W_{iq}^s A_j^q) g_{sk} + \dots = 0, \quad (5.6)$$

недостающие слагаемые в (5.6) получаются циклической перестановкой индексов i, j, k .

Запись уравнений (3.10) в произвольных локальных координатах требует значительно больших усилий. С репером собственных векторов матрицы скоростей $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ свяжем следующие величины:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^k &= 0, \quad i \neq j, j \neq k, k \neq i, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^i &= 0, \quad \bar{\Gamma}_{ii}^j = 0, \quad i \neq j, \\ \bar{\Gamma}_{ij}^j &= c_{ij}^j - \frac{1}{2} \frac{L_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Величины $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ из (5.7) преобразуются как компоненты некоторой связности при калибровочных преобразованиях репера (2.7). Величины $\bar{\Gamma}_{ii}^i$, не определенные в (5.7), выберем произвольным образом, например, положив их равными нулю при некотором фиксированном выборе калибровки репера $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$. В результате этого мы построим связность, определяемую только матрицей скоростей $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, хотя и не совсем однозначно. Нетрудно проверить, что соотношение (3.10) может быть переписано в терминах ковариантных производных, определяемых этой связностью:

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}} g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}).\tag{5.8}$$

Остается лишь вопрос об инвариантном (не использующем реперы $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$) определении ковариантных производных из (5.8). В качестве первого этапа при этом определим тензор $\mathbf{C}$ типа $(1, 2)$, задав его следующей формулой:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}}^n c_{ij}^k \mathbf{X}_k.\tag{5.9}$$

Тензор $\mathbf{C}$ из (5.9) связан с тензором Хаантьеса (5.2) через промежуточный тензор $\mathbf{U}$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{U}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{U}(\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{Y}) - \mathbf{A}\mathbf{U}(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y}).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Соотношения (5.10) удастся обратить, т.е. выразить тензор $\mathbf{C}$ через тензор Хаантьеса. Для осуществления такого обращения рассмотрим полином двух переменных x и y следующего вида:

$$Q(x, y) = \sum_{1 \leq i \neq k \leq n} \left(\frac{1}{(\lambda_i - \lambda_k)^2} \prod_{r \neq i}^n \frac{x - \lambda_r}{\lambda_i - \lambda_r} \prod_{s \neq k}^n \frac{y - \lambda_s}{\lambda_k - \lambda_s} \right).\tag{5.11}$$

Степень полинома (5.11) по каждой из переменных x и y равна $n - 1$. Поэтому

$$Q(x, y) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} Q_{pq}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) x^p y^q.\tag{5.12}$$

Коэффициенты полинома $Q(x, y)$ в (5.12) являются симметрическими рациональными функциями собственных чисел матрицы скоростей $\mathbf{A}$. Поэтому они рациональным образом выражаются через коэффициенты ее характеристического полинома. В силу сказанного вычисление полинома (5.11) по матрице скоростей, не будучи явным, является

все же алгоритмически эффективным. Формула обращения для (5.10) может быть записана так:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} Q_{pq} Q_{rs} \mathbf{A}^{q+s} \mathbf{H}(\mathbf{A}^p \mathbf{X}, \mathbf{A}^r \mathbf{Y}). \quad (5.13)$$

В силу (5.10) и (5.13) компоненты тензоров $\mathbf{C}$ и $\mathbf{U}$ эффективно вычислимы по матрице скоростей в любых локальных координатах. Для тензора Нейенхейса имеется разложение $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{U}$, причем

$$\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = (\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{X}_i L_j \lambda_i + \mathbf{X}_j L_i \lambda_j). \quad (5.14)$$

Компоненты тензора $\tilde{\mathbf{N}}$ также эффективно вычислимы в любых локальных координатах. Назовем его *главной частью* тензора Нейенхейса. Используя коэффициенты полинома $Q(x, y)$ из (5.11) и тензор $\tilde{\mathbf{N}}$ из (5.14), построим еще один тензор $\mathbf{D}$ по следующей формуле:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{A}^p \mathbf{X}, \mathbf{A}^q \mathbf{Y}). \quad (5.15)$$

Тензор $\mathbf{D}$ входит в инвариантные определяющие соотношения для связности $\bar{\nabla}$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} &= [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\ \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \bar{\nabla}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{D}(\mathbf{A} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{D}(\mathbf{X}, \mathbf{A} \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Соотношения (5.16) определяют связность $\bar{\nabla}$ с той же степенью произвола, что и соотношения (5.7), задающие компоненты этой связности в репере из собственных векторов матрицы скоростей. Резюмируя полученные результаты, переформулируем теорему 5 в следующем виде.

ТЕОРЕМА 9. *Метрика g_{ij} определяет квадратичный по $\mathbf{u}_x$ закон сохранения для системы уравнений (1.1) тогда и только тогда, когда она диагонализуетя в репере из собственных векторов матрицы скоростей и имеют место соотношения (5.1), (5.5) и (5.8).*

Отметим, что соотношения (5.8) представляют собой переопределенную систему уравнений на метрику g_{ij} , условия совместности которых аналогичны условиям полугамильтоновости в диагонализуемом случае. Вывод и анализ этих условий совместности требует, однако, отдельного рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Сороса (проекты № RK4000, RKR000) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 93-01-00273, 93-011-168).

Список литературы

- [1] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков // УМН. 1989. Т. 44. №6. С. 29–98.
- [2] С.П.Царев // Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54. №5. С. 1048–1068.
- [3] Е.В.Ферапонтов, С.П.Царев // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. №2. С. 82–91.
- [4] М.В.Павлов, С.И.Свинолулов, Р.А.Шарипов // В сб.: Интегрируемость в динамических системах / Ред. Л.А.Калякин. Уфа: Институт математики, 1994. С. 30–48. (см. также solv-int@xyz.lanl.gov #9407003).
- [5] М.Б.Шефтель // Диф. уравнения. 1993. Т. 29. №10. С. 1782–1795.
- [6] М.Б.Шефтель // Диф. уравнения. 1994. Т. 30. №3. С. 444–456.
- [7] E.V.Ferapontov // Physica D. 1993. V. 63. P. 50–70.
- [8] Л.П.Эйзенхарт. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.
- [9] О.И.Богоявленский, С.П.Новиков // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. С. 9–13.
- [10] О.И.Мохов // Изв. АН СССР, сер. матем. 1987. Т. 51. С. 1345–1352.
- [11] P.Finsler. Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Göttingen: Dissertation, 1918.
- [12] E.Cartan. Les espaces de Finsler. Paris: Actualites 79, 1934.
- [13] А.Ю.Болдин, В.В.Дмитриева, С.С.Сафин, Р.А.Шарипов // ТМФ. 1995. Т. 103. №2. С. 256–266.
- [14] А.Ю.Болдин, А.А.Бронников, В.В.Дмитриева, Р.А.Шарипов // ТМФ. 1995. Т. 103. №2. С. 267–275.
- [15] D.Serre // J. of Diff. Eq. 1983. V. 49. P. 270–280.
- [16] E.V.Ferapontov // Phys. Lett. A. 1993. V. 179. P. 391–397.
- [17] E.V.Ferapontov // Diff. Geometry and Appl. 1995. V. 5. P. 121–152.
- [18] В.Е.Захаров, С.В.Манакон, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский. Теория солитонов. М.: Наука, 1980.

Институт математического моделирования РАН
Башкирский государственный университет

Поступила в редакцию
17.IX.1995 г.

E. V. Ferapontov, R. A. Sharipov

ON FIRST-ORDER CONSERVATION LAWS FOR
SYSTEMS OF HYDRONAMIC TYPE EQUATIONS

We consider conservation laws of the first order quadratic in derivatives related to systems of equations of hydrodynamic type. We derive the defining relations for their densities in a form invariant with respect to the pointwise change of variables. Examples of nondiagonalizable systems admitting quadratic conservation laws are given.