Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Четырехмерное интегрирование по частям с дифференциальной перенормировкой как метод вычисления диаграмм Фейнмана, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 1, 129–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 18:18:11

В. А. Смирнов

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКОЙ КАК МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

Показано, как четырехмерное интегрирование по частям в сочетании с дифференциальной перенормировкой и ее инфракрасным аналогом может применяться для вычисления диаграмм Фейнмана.

1. Интегрирование по частям [1] в рамках размерной регуляризации [2] оказалось одним из наиболее мощных методов вычисления диаграмм Фейнмана. Несмотря на то что размерная регуляризация и перенормировка [3] обычно используются в практических вычислениях, они оказываются неудобными в ситуациях, связанных с киральной и суперсимметриями. Цель настоящей краткой заметки – предложить четырехмерную версию этого метода вычисления. Будет показано, как (обычное) четырехмерное интегрирование по частям в совокупности с техникой дифференциальной перенормировки [4–9] и ее инфракрасного (ИК) аналога ($\tilde{R}$ -операции) может быть использовано для вычисления диаграмм.

В следующем пункте будут описаны предписания дифференциальной перенормировки и $\tilde{R}$ -операции для простейших диаграмм. С использованием примера базисной двухпетлевой диаграммы в пункте 3 будет показано, как четырехмерное интегрирование по частям применяется в вычислениях. В заключение обсуждаются перспективы применения предложенного метода.

2. Дифференциальная перенормировка впервые была определена в координатном пространстве [4–8]. Можно перевести ее рецепты на язык импульсного пространства. Другой вариант – использовать однородные свойства фейнмановских интегралов и сформулировать соответствующий рецепт в импульсном пространстве – см. [9], где это предписание было сформулировано для логарифмически расходящихся диаграмм с простейшей топологией подрасходимостей. (Возможно, более естественно называть эту перенормировку однородной, а не дифференциальной.) В частности, для простейшего однопетлевого фейнмановского интеграла¹⁾ пропагаторного типа имеем следующее перенормировочное предписание [9]:

$$RF(q) \equiv R \int d^4k \frac{1}{k^2(q-k)^2} = \int d^4k \ln \frac{k^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{k^2(q-k)^2}. \quad (1)$$

¹⁾ Для простоты рассматриваются фейнмановские интегралы в евклидовом пространстве.

Здесь μ – массивный параметр, который учитывает конечный произвол перенормировки. Производная по q применяется перед интегрированием, так что соответствующий интеграл оказывается сходящимся.

Чтобы вычислить (1), разумно ввести аналитическую регуляризацию [10]

$$RF(q) = \int d^4k \left(-\frac{d}{d\lambda} \right) \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} \frac{\mu^{2\lambda}}{(k^2)^{1+\lambda}(q-k)^2} \Big|_{\lambda=0}. \quad (2)$$

Когда $\lambda \neq 0$, можно использовать следующий порядок: вычислить интеграл, продифференцировать по q , затем по λ и, наконец, положить $\lambda = 0$. При вычислении интеграла используется четырехмерная формула однопетлевого интегрирования

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2)^{\lambda_1}((q-k)^2)^{\lambda_2}} = \pi^2 G(\lambda_1, \lambda_2) \frac{1}{(q^2)^{\lambda_1+\lambda_2-2}}, \quad (3)$$

где G – четырехмерная G -функция

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 - 2) \Gamma(2 - \lambda_1) \Gamma(2 - \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1) \Gamma(\lambda_2) \Gamma(4 - \lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (4)$$

В частности,

$$G(1, 1 + \lambda) = \frac{1}{\lambda(1 - \lambda)}. \quad (5)$$

В результате имеем

$$R \int d^4k \frac{1}{k^2(q-k)^2} = \pi^2 (1 - \ln q^2/\mu^2). \quad (6)$$

Нам понадобится также ИК-аналог дифференциальной перенормировки. В случае размерной перенормировки соответствующий ИК-аналог был описан в работах [11]. Эта операция $\tilde{R}$ удаляет ИК-расходимости (вне массовой оболочки) вполне аналогично тому, как обычная размерная перенормировка удаляет ультрафиолетовые (УФ) расходимости. Когда она объединяется с самой R -операцией, получается так называемая R^* -операция [11] ($R^* = \tilde{R}R$), которая успешно применяется в ренормгрупповых вычислениях и асимптотических разложениях фейнмановских интегралов в различных пределах импульсов и масс (см., например, обзор [12]).

Дифференциальную $\tilde{R}$ -операцию в импульсном пространстве можно определить аналогично тому, как дифференциальная перенормировка определяется в координатном пространстве²⁾. Для простейшего ИК-расходящегося подграфа, состоящего из двух последовательных безмассовых скалярных линий, которые порождают неинтегрируемый множитель $1/k^4$, имеем следующее предписание:

$$\tilde{R} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \left(\frac{\ln k^2/\tilde{\mu}^2}{k^4} \right), \quad (7)$$

²⁾ Точнее говоря, УФ-перенормировочные предписания в координатном пространстве, сформулированные в работах [6, 8], переформулируются в виде “ИК-перенормировочных” предписаний в импульсном пространстве с использованием УФ–ИК-аналогии (как это делалось в случае размерной $\tilde{R}$ -операции, см. [11, 12]). Отметим, что в работе [13] авторы сделали вывод о противоречивости $\tilde{R}$ -операции на основании того, что они (в рамках своей версии $\tilde{R}$ -операции) получили разные результаты, интегрируя в разных порядках. Этот вывод представляется неправомерным, так как у авторов не был сформулирован общий рецепт $\tilde{R}$ -операции (для произвольной диаграммы), а для конкретных рассмотренных диаграмм разные ответы получились за счет того, что разный порядок интегрирования фактически соответствовал *разным* ИК-перенормировочным предписаниям.

где $\tilde{\mu}$ – ИК-перенормировочный параметр. Отсюда для однопетлевого ИК-расходящегося фейнмановского интеграла

$$\int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2}$$

получаем следующее “ $\tilde{R}$ -нормированное” выражение:

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \int d^4k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4} \right) \frac{1}{(q-k)^2}. \quad (8)$$

Производная в формулах (7) и (8) понимается в смысле теории обобщенных функций (что формально эквивалентно четырехмерному интегрированию по частям), т.е.

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \int d^4k \frac{k(k-q) \ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4(q-k)^4}. \quad (9)$$

Чтобы вычислить интеграл в (9), полезно ввести аналитическую регуляризацию, а затем продифференцировать подынтегральное выражение при $\lambda \neq 0$, используя соотношение $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\tilde{\mu}^{2\lambda}}{(k^2)^{2+\lambda}} = -\lambda \frac{\tilde{\mu}^{2\lambda}}{(k^2)^{2+\lambda}}$. Получим

$$\tilde{R} \int d^4k \frac{1}{k^4(q-k)^2} = \pi^2 \frac{1}{q^2} (1 + \ln q^2 / \tilde{\mu}^2). \quad (10)$$

Для последующих вычислений будут нужны также похожие интегралы с дополнительными логарифмами, которые тоже вычисляются с помощью аналитической регуляризации формулы однопетлевого интегрирования (3). Получаем

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln((q-k)^2 / \mu^2)}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4} \right) \frac{\ln(q-k)^2 / \mu^2}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} \ln q^2 / \mu^2 (\ln q^2 / \tilde{\mu}^2 + 1); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln^2 k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4} \right) \frac{\ln(q-k)^2 / \mu^2}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} \left(1 + \ln q^2 / \tilde{\mu}^2 + \frac{1}{2} \ln^2 q^2 / \tilde{\mu}^2 \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln^2((q-k)^2 / \mu^2)}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4} \right) \frac{\ln^2(q-k)^2 / \mu^2}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} (\ln^2 q^2 / \mu^2 (\ln q^2 / \tilde{\mu}^2 + 1) + 4\zeta(3)); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} \int d^4k \frac{\ln((q-k)^2 / \mu^2) \ln k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4(q-k)^2} &= \int d^4k \left(\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial k} k \frac{\ln^2 k^2 / \tilde{\mu}^2}{k^4} \right) \frac{\ln(q-k)^2 / \mu^2}{(q-k)^2} = \\ &= \pi^2 \frac{1}{q^2} \left(\ln q^2 / \mu^2 \left(1 + \ln q^2 / \tilde{\mu}^2 + \frac{1}{2} \ln^2 q^2 / \tilde{\mu}^2 \right) + 2\zeta(3) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

Базисная двухпетлевая диаграмма

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

3. Чтобы вычислить базисную двухпетлевую диаграмму (см. рисунок) в точности в четырех измерениях

$$J(q) = \iint \frac{d^4 k d^4 l}{k^2 (k-q)^2 (k-l)^2 l^2 (l-q)^2}, \quad (15)$$

применим четырехмерное интегрирование по частям

$$\iint d^4 k d^4 l \frac{\partial}{\partial l_\alpha} \left\{ \frac{(k-l)_\alpha}{k^2 (k-q)^2 (k-l)^2 l^2 (l-q)^2} \right\} = 0. \quad (16)$$

Формально это то же самое тождество, которое использовалось в рамках стандартного метода интегрирования по частям [1], основанного на размерной регуляризации. Используя соотношения $2(k-l)l = k^2 - (k-l)^2 - l^2$, $2(k-l)(l-q) = (k-q)^2 - (k-l)^2 - (l-q)^2$, получаем

$$\iint d^4 k d^4 l \frac{(k-l)^2 - (k-q)^2}{k^2 (k-q)^2 (k-l)^2 l^2 (l-q)^4} = 0. \quad (17)$$

Хотя этот интеграл УФ- и ИК-сходящийся, расходимости обоих типов получаются при отдельном рассмотрении двух слагаемых в числителе. Можно, однако, отделить их, вводя (заранее) R - и $\tilde{R}$ -операции. Например, для R -операции используются следующие тождества (при $j = 1, 2, \dots$):

$$\int dk \ln^j l^2 / \tilde{\mu}^2 \Pi(k, l, q) = \int dk \ln k^2 / \mu^2 \ln^j l^2 / \tilde{\mu}^2 \frac{1}{2} \left(q \frac{\partial}{\partial q} + l \frac{\partial}{\partial l} - \lambda - 4 \right) \Pi(k, l, q), \quad (18)$$

где Π – однородная функция переменных k, l, q степени λ . После этого получаем

$$R^* \iint d^4 k d^4 l \frac{1}{k^2 (k-q)^2 l^2 (l-q)^4} = R^* \iint d^4 k d^4 l \frac{1}{k^2 (k-l)^2 l^2 (l-q)^4}, \quad (19)$$

где $R^* = R\tilde{R}$.

Применим теперь четырехмерное интегрирование по частям с дополнительным логарифмом

$$\iint d^4 k d^4 l \frac{\partial}{\partial l_\alpha} \left\{ \frac{(k-l)_\alpha \ln l^2 / \tilde{\mu}^2}{k^2 (k-q)^2 (k-l)^2 l^2 (l-q)^2} \right\} = 0. \quad (20)$$

После этого приходим к соотношению

$$\begin{aligned} J(q) &= R \int d^4 k \frac{1}{k^2 (q-k)^2} \tilde{R} \int d^4 l \frac{\ln((q-l)^2 / \tilde{\mu}^2)}{l^2 (q-l)^4} + \\ &+ R \int d^4 k \frac{1}{k^2 (q-k)^2} \tilde{R} \int d^4 l \frac{\ln l^2 / \tilde{\mu}^2}{l^2 (q-l)^4} - \\ &- R^* \iint d^4 k d^4 l \frac{\ln l^2 / \tilde{\mu}^2}{k^2 (k-l)^2 l^2 (q-l)^4} - \\ &- R^* \iint d^4 k d^4 l \frac{\ln((l-q)^2 / \tilde{\mu}^2)}{k^2 (k-l)^2 l^2 (q-l)^4}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для вычисления присутствующих рекурсивно-однопетлевых фейнмановских интегралов используются соотношения (6), (10)–(14). В конце концов получаем хорошо известный результат [14]:

$$J(q) = 6\zeta(3)\pi^4/q^2. \quad (22)$$

4. Как и в приведенном примере базисной двухпетлевой диаграммы, можно применять четырехмерное интегрирование по частям с дифференциальными R - и $\tilde{R}$ -операциями по крайней мере в каждой ситуации, когда применяется интегрирование по частям в рамках размерной регуляризации. При этом надо использовать почти те же самые тождества [1], что и в случае размерной регуляризации. Грубо говоря, отрицательные степени параметра $\varepsilon = (4 - d)/2$ (где d – размерность пространства-времени) заменяются на некоторые степени логарифмов от петлевых импульсов. Чтобы иметь возможность отдельно рассматривать слагаемые в этих тождествах, заранее удаляются искусственные УФ- и ИК-расходимости (в случае размерной регуляризации эти расходимости автоматически регуляризуются). Для проведения дальнейших вычислений нужна соответствующая таблица однопетлевых интегралов с логарифмами (в рассмотренном случае это формулы (6), (10)–(14)).

Отметим, что в рамках аналитической регуляризации не удастся использовать интегрирование по частям для вычисления базисной двухпетлевой диаграммы так, как это возможно в размерной регуляризации и в четырех измерениях в предложенной технике. Это объясняется невозможностью сокращений типа $p^2/p^2 = 1$ в подынтегральных выражениях (из-за того, что в знаменателях появляется p^2 в степени, зависящей от параметра аналитической регуляризации). Поэтому, несмотря на то что таблица однопетлевых интегралов выведена с помощью аналитической регуляризации, появляющиеся логарифмы не мешают таким сокращениям (графически соответствующим стягиванию линий в точку), которые приводят к рекурсивно однопетлевым фейнмановским интегралам в правой части (21).

Этот факт вселяет оптимизм при построении дифференциальных перенормировочных схем, совместных с калибровочной инвариантностью, поскольку в конечном счете тождества Уорда связаны с возможностью упомянутых сокращений в перенормированных интегралах Фейнмана. Оказывается, действительно удастся модифицировать предписания дифференциальной перенормировки работ [6, 8] так, что калибровочная инвариантность будет обеспечена автоматически (т.е. без “подгонки” конечных контрчленов) по крайней мере в абелевом случае³⁾. Этому будет посвящена отдельная работа.

В заключение подчеркнем, что для применений в теориях с киральной и суперсимметриями четырехмерная техника выглядит наиболее предпочтительной.

Я благодарен К.Г. Четыркину и Г.А. Кравцовой за ценные обсуждения.

Эта работа поддержана РФФИ, грант 96-01-00654.

Список литературы

- [1] *K.G. Chetyrkin, F.V. Tkachov* // Nucl. Phys. 1981. V. B192. P. 159.
- [2] *G. 'tHooft, M. Veltman* // Nucl. Phys. 1972. V. B44. P. 189; *C.G. Bollini, J.J. Giambiagi* // Nuovo Cim. 1972. V. 12B. P. 20.
- [3] *P. Breitenlohner, D. Maison* // Commun. Math. Phys. 1977. V. 52. P. 11, 39, 55.

³⁾См. также работу [15], где в рамках дифференциальной перенормировки для некоторых специальных классов диаграмм доказаны соотношения, обеспечивающие тождества Уорда в КЭД.

- [4] *D.Z.Freedman, K.Johnson, J.I.Latorre* // Nucl. Phys. 1992. V. B371. P. 353.
- [5] *J.I.Latorre, C.Manuel, Cardona X.Vilasís* // Ann. Phys. 1994. V. 231. P. 149.
- [6] *О.И.Завьялов, В.А.Смирнов* // ТМФ. 1993. Т. 96. С. 288.
- [7] *V.A.Smirnov* // Nucl. Phys. 1994. V. B427. P. 325.
- [8] *V.A.Smirnov* // Z. Phys. C. 1995. V. 67. P. 531.
- [9] *О.И.Завьялов* // ТМФ. 1994. Т. 98. С. 536.
- [10] *E.R.Speer* // J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1404.
- [11] *K.G.Chetyrkin, V.A.Smirnov* // Phys. Lett. 1984. V. 144B. P. 419; Препринт НИИЯФ МГУ 89-2/79. М., 1989.
- [12] *V.A.Smirnov*. Renormalization and asymptotic expansions. Basel: Birkhäuser, 1991.
- [13] *L.V.Avdeev, D.I.Kazakov, I.N.Kondrashuk* // Int. J. Mod. Phys. 1994. V. A9. P. 1067.
- [14] *J.L.Rosner* // Ann. Phys. 1967. V. 44. P. 11.
- [15] *О.И.Завьялов, Г.А.Кравцова, А.М.Малюков* // ТМФ. 1996. Т. 107. №1. С. 64–74.

НИИ ядерной физики МГУ
 E-mail: smirnov@theory.npi.msu.su

Поступила в редакцию
 27.IX.1996 г.

V. A. Smirnov

**FOUR-DIMENSIONAL INTEGRATION BY PARTS WITH
 DIFFERENTIAL RENORMALIZATION AS A METHOD
 OF EVALUATION OF FEYNMAN DIAGRAMS**

It is shown how strictly four-dimensional integration by parts combined with differential renormalization and its infrared analogue can be applied for calculation of Feynman diagrams.