Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Сокращение дуальных полей в свободнофермионных моделях с тригонометрической R -матрицей, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 2, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:26:19

Н. А. Славнов

СОКРАЩЕНИЕ ДУАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В СВОБОДНОФЕРМИОННЫХ МОДЕЛЯХ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ R -МАТРИЦЕЙ

Получено детерминантное представление для корреляционных функций в свободнофермионных моделях с тригонометрической R -матрицей, не содержащее вспомогательных квантовых операторов.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из достижений квантового метода обратной задачи (КМОЗ) является создание алгебраической схемы анзаца Бете. Данный метод позволяет явно построить собственные функции квантово-механических гамильтонианов и вычислить их спектр. Важным обстоятельством является то, что процедура построения собственных функций в рамках алгебраического анзаца Бете в достаточной степени универсальна и весьма незначительно видоизменяется в зависимости от конкретной рассматриваемой модели. Более того, если две модели, сформулированные в терминах КМОЗ, имеют одну и ту же R -матрицу, то и алгебраический анзац Бете для них совпадает. Последнее обстоятельство позволяет трактовать различные квантово-механические модели как конкретные представления одной обобщенной модели, которая характеризуется уже только своей R -матрицей.

Понятие обобщенной модели, введенное в работах [1–3], сыграло большую роль при исследовании корреляционных функций квантовых вполне интегрируемых систем. Однако несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области за последние годы, упомянутая проблема еще далека от окончательного решения. В настоящей работе мы затрагиваем один из аспектов этой проблемы, связанный с конструкцией дуальных полей.

Вспомогательные квантовые операторы, получившие название дуальных полей, впервые были введены Корепиным в работе [4]. С помощью этой конструкции удалось получить детерминантные представления для некоторых корреляционных функций в моделях нелинейного уравнения Шредингера, XX - и XXZ -магнетиков Гейзенберга [5–8]. Впоследствии было обнаружено, что полученные фредгольмовы детерминанты могут быть описаны в терминах решений классических точно решаемых интегродифференциальных уравнений [7–9]. При этом дуальные поля играют роль свободных функцио-

нальных параметров, которые не влияют на вид уравнения, а задают лишь граничные условия. Уравнения, описывающие корреляционные функции, могут быть решены с помощью методов задачи Римана. Подчеркнем, однако, что в данном случае приходится иметь дело с обобщением задачи Римана на бесконечномерный случай [10]. Последнее обстоятельство весьма усложняет соответствующие вычисления.

Альтернативный подход к данной проблеме предполагает тем или иным способом полностью исключить дуальные поля из описания корреляционных функций. Это легко можно сделать, например, для моделей с рациональной R -матрицей в точке свободных фермионов. Помимо этого, ряд результатов, полученных в работах [4, 11], указывают на то, что дуальные поля могут исчезать и в более сложных корреляторах. В настоящей работе мы развиваем именно этот подход на примере свободнофермионных моделей с тригонометрической R -матрицей. При этом, стартуя с конструкции дуальных полей, мы в итоге получим детерминантное представление для корреляционных функций, не содержащее никаких вспомогательных квантовых операторов. Изложение будет вестись в рамках обобщенной модели, что позволит нам применить полученные результаты к целому классу конкретных физических моделей, обладающих тригонометрической R -матрицей (например, XXZ -магнетик, уравнение синус-Гордон, q -бозоны).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект #96-01-00344, Международного научного фонда, проект #MET300 и INTAS, проект #93-1038.

1. ФОРМУЛИРОВКА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ И ДУАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе мы дадим краткую формулировку обобщенной модели с тригонометрической R -матрицей и опишем конструкцию дуальных полей.

Пусть дана матрица монодромии

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Матричными элементами матрицы T являются операторы, зависящие от комплексного параметра λ и действующие в некотором фоксовском пространстве. Старший вектор этого пространства – вакуумный вектор $|0\rangle$ – имеет следующие свойства:

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0. \quad (1.2)$$

Аналогичными свойствами обладает сопряженный вектор $\langle 0|$:

$$\langle 0|A(\lambda) = a(\lambda)\langle 0|, \quad \langle 0|D(\lambda) = d(\lambda)\langle 0|, \quad \langle 0|B(\lambda) = 0. \quad (1.3)$$

В формулах (1.2), (1.3) $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ – произвольные комплекснозначные функции. Явный вид этих функций не конкретизируется, и в этом состоит основное отличие обобщенной модели от конкретных физических моделей, в которых функции $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ жестко фиксированы.

Коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии задаются с помощью R -матрицы:

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = R(\lambda, \mu)(T(\mu) \otimes T(\lambda)), \quad (1.4)$$

где

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} f(\mu, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

здесь

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\text{sh}(\mu - \lambda + i\gamma)}{\text{sh}(\mu - \lambda)}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{i \sin \gamma}{\text{sh}(\mu - \lambda)}. \quad (1.6)$$

Удобно также ввести еще две функции

$$\begin{aligned} h(\mu, \lambda) &= \frac{f(\mu, \lambda)}{g(\mu, \lambda)} = \frac{\text{sh}(\mu - \lambda + i\gamma)}{i \sin \gamma}, \\ t(\mu, \lambda) &= \frac{g(\mu, \lambda)}{h(\mu, \lambda)} = -\frac{\sin^2 \gamma}{\text{sh}(\mu - \lambda) \text{sh}(\mu - \lambda + i\gamma)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Физический смысл параметра γ , входящего в формулы (1.6), зависит от конкретного вида рассматриваемой модели. Так, например, в XXZ -магнетике $\cos \gamma$ играет роль анизотропии, а в модели q -бозонов $e^{i\gamma}$ — это параметр деформации q . Свободнофермионные модели с тригонометрической R -матрицей соответствуют значению $\gamma = \frac{\pi}{2}$. При этом функции f, g, h, t принимают вид

$$\begin{aligned} f(\mu, \lambda) &= i \text{cth}(\mu - \lambda), & h(\mu, \lambda) &= \text{ch}(\mu - \lambda), \\ g(\mu, \lambda) &= \frac{i}{\text{sh}(\mu - \lambda)}, & t(\mu, \lambda) &= \frac{2i}{\text{sh} 2(\mu - \lambda)} \quad \text{при } \gamma = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Мы подробно обсудим свободнофермионные модели в следующих разделах, а пока продолжим описание обобщенной модели при произвольном значении γ .

След матрицы монодромии $\text{tr } T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ является производящим функционалом для интегралов движения, собственные функции которых строятся в рамках алгебраического анзаца Бете с помощью операторов $B(\lambda)$:

$$\Psi_N(\{\lambda\}) = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j)|0\rangle, \quad N = 0, 1, \dots$$

При этом параметры $\{\lambda\}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} \prod_{k \neq j}^N \frac{f(\lambda_j, \lambda_k)}{f(\lambda_k, \lambda_j)} = 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.9)$$

Спектр гамильтониана полностью определяется решениями системы (1.9). Для того чтобы сделать это в конкретной физической модели, нужно просто подставить в (1.9) соответствующие функции $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$.

Помимо моделей с тригонометрической R -матрицей, существует ряд вполне интегрируемых моделей, в которых R -матрица зависит от аргументов λ и μ рациональным образом. Обобщенная модель формулируется для рационального случая точно так же, как и для тригонометрического. Единственным исключением является то, что функции f и g теперь – рациональные функции своих аргументов:

$$f(\mu, \lambda) = \frac{\mu - \lambda + ic}{\mu - \lambda}, \quad g(\mu, \lambda) = \frac{ic}{\mu - \lambda}. \quad (1.10)$$

Смысл параметра c , как и параметра γ , зависит от конкретной модели. Функции $h(\mu, \lambda)$ и $t(\mu, \lambda)$ определяются через f и g так же, как и в тригонометрическом случае (разумеется, на этот раз для f и g берутся выражения (1.10)). Формулы (1.1)–(1.5) также сохраняются.

Мы обращаем внимание читателя на то, что в дальнейшем будем использовать одни и те же обозначения для функций, входящих как в тригонометрическую, так и в рациональную R -матрицу. Преимущество такой формы записи состоит в том, что мы легко можем сравнивать результаты, полученные для одних и тех же объектов в разных моделях. Однако, чтобы избежать недоразумений, в тех случаях, когда мы будем иметь дело с рациональной R -матрицей, мы всегда будем это специально оговаривать.

Важнейшими объектами, необходимыми для вычисления корреляционных функций в рамках алгебраического анзаца Бете, являются скалярные произведения $S_N(\{\mu\}, \{\lambda\})$, которые определяются следующим образом:

$$S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) \equiv \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\mu_j) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle. \quad (1.11)$$

В (1.11) $\{\mu\}$ и $\{\lambda\}$ – два набора, каждый из которых содержит по N произвольных комплексных чисел ($N = 1, 2, \dots$). Скалярные произведения подробно исследовались в работах [2, 3]. Наиболее компактное выражение для $S_N(\{\mu\}, \{\lambda\})$ было найдено в работе [4], в которой впервые были введены вспомогательные квантовые операторы – дуальные поля. К описанию конструкции дуальных полей мы и переходим.

Рассмотрим четыре оператора $p_A(\lambda)$, $p_D(\lambda)$, $q_A(\lambda)$ и $q_D(\lambda)$, зависящих от комплексной переменной λ и действующих во вспомогательном фокковском пространстве таким образом, что

$$p_{A,D}(\lambda)|\tilde{0}\rangle = 0, \quad \langle \tilde{0}|q_{A,D}(\lambda) = 0. \quad (1.12)$$

Ненулевые коммутационные соотношения даются формулами

$$\begin{aligned} [p_A(\lambda), q_A(\mu)] &= \log h(\mu, \lambda), \\ [p_D(\lambda), q_D(\mu)] &= \log h(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Вакуумный вектор $|\tilde{0}\rangle$ нормирован на единицу. Дуальными полями $\Phi_A(\lambda)$ и $\Phi_D(\lambda)$ называются линейные комбинации операторов p и q :

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= q_A(\lambda) + p_D(\lambda), \\ \Phi_D(\lambda) &= q_D(\lambda) + p_A(\lambda).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Замечательным свойством дуальных полей является то, что они коммутируют друг с другом:

$$[\Phi_A(\lambda), \Phi_A(\mu)] = [\Phi_D(\lambda), \Phi_D(\mu)] = [\Phi_A(\lambda), \Phi_D(\mu)] = 0.\tag{1.15}$$

Основной результат работы [4] заключается в том, что скалярное произведение (1.11) может быть записано как среднее от детерминанта матрицы, содержащей дуальные поля,

$$S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) = \prod_{j>k}^N [g(\mu_j, \mu_k)g(\lambda_k, \lambda_j)] \langle \tilde{0} | \det_N G_{jk} | \tilde{0} \rangle,\tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned}G_{jk} &= a(\mu_j)d(\lambda_k)t(\mu_j, \lambda_k) \exp [\Phi_A(\mu_j) + \Phi_D(\lambda_k)] + \\ &+ a(\lambda_k)d(\mu_j)t(\lambda_k, \mu_j) \exp [\Phi_A(\lambda_k) + \Phi_D(\mu_j)].\end{aligned}\tag{1.17}$$

В силу (1.15) с дуальными полями можно обращаться, как с классическими функциями, т.е. брать их произведения в произвольном порядке, поэтому детерминант в (1.16) хорошо определен. После того как этот детерминант тем или иным способом вычислен, необходимо нормально упорядочить операторы $p_{A,D}$ и $q_{A,D}$, входящие в дуальные поля, и взять среднее. Последняя процедура формально сводится к следующей формуле:

$$\langle \tilde{0} | \prod_{\mu} e^{\Phi_A(\mu)} \prod_{\lambda} e^{\Phi_D(\lambda)} | \tilde{0} \rangle = \prod_{\mu} \prod_{\lambda} h(\mu, \lambda).$$

Полученное в результате этих преобразований выражение совпадает со скалярным произведением (1.11).

Конструкция дуальных полей может быть применена и к моделям с рациональной R -матрицей. Все формулы (1.11)–(1.17) переносятся на этот случай без изменений (разумеется, под f , g , h и t следует теперь понимать рациональные функции).

С помощью метода дуальных полей можно получить детерминантные представления для различных корреляционных функций в конкретных физических моделях. Однако, как уже отмечалось, в некоторых случаях можно исключить дуальные поля из описания корреляторов. Полученные при этом формулы оказываются значительно проще исходных. Ниже мы продемонстрируем, как это можно сделать в свободнофермионных моделях.

2. СОКРАЩЕНИЕ ДУАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В моделях с рациональной R -матрицей свободнофермионная точка соответствует значению параметра c , равного бесконечности. При этом формулы для скалярного произведения (1.16), (1.17) существенно упрощаются. Действительно, при $c = \infty$

$$h(\mu, \lambda) = \frac{f(\mu, \lambda)}{g(\mu, \lambda)} = \frac{\mu - \lambda + ic}{ic} \rightarrow 1,$$

и поэтому все коммутаторы (1.13) обращаются в нуль. Это означает, что любое выражение, содержащее дуальные поля, является нормально упорядоченным, следовательно, в (1.17) можно положить дуальные поля равными нулю. Матрица G_{jk} принимает вид

$$G_{jk} = g(\mu_j, \lambda_k) (a(\mu_j) d(\lambda_k) - d(\mu_j) a(\lambda_k)). \quad (2.1)$$

Физический смысл матричного элемента G_{jk} очевиден – это двухчастичное скалярное произведение. Действительно, если переписать матричное соотношение (1.4) как шестнадцать скалярных коммутационных соотношений, то одно из них будет иметь вид

$$[C(\mu), B(\lambda)] = g(\mu, \lambda) (A(\mu) D(\lambda) - A(\lambda) D(\mu)). \quad (2.2)$$

Отсюда, используя (1.2) и (1.3), находим

$$G_{jk} = \langle 0 | C(\mu_j) B(\lambda_k) | 0 \rangle. \quad (2.3)$$

Таким образом, в свободнофермионной точке обобщенной модели с рациональной R -матрицей $2N$ -частичное скалярное произведение выражается через двухчастичное:

$$S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) \stackrel{c=\infty}{=} \prod_{j>k}^N [g(\mu_j, \mu_k) g(\lambda_k, \lambda_j)] \det_N \langle 0 | C(\mu_j) B(\lambda_k) | 0 \rangle. \quad (2.4)$$

Следовало бы ожидать, что аналогичная факторизация скалярного произведения должна существовать и для моделей с тригонометрической R -матрицей при $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Такая факторизация действительно существует, однако это далеко не столь очевидно, как в рассмотренном выше примере. Действительно, в тригонометрическом случае при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ функция $h(\mu, \lambda) = \text{ch}(\mu - \lambda)$ и коммутаторы (1.13) не исчезают, следовательно, положить дуальные поля в (1.17) равными нулю нельзя.

Для вывода формулы, аналогичной (2.4), мы воспользуемся формулой Лапласа для детерминанта суммы двух матриц. Тогда скалярное произведение (1.16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) &= \prod_{j>k} [g(\mu_j, \mu_k) g(\lambda_k, \lambda_j)] \times \\ &\times \sum_{\text{part}} (-1)^{[\mathcal{P}_\mu] + [\mathcal{P}_\lambda]} \langle \tilde{0} | \det_I \left[a(\mu_\alpha) d(\lambda_\beta) t(\mu_\alpha, \lambda_\beta) e^{\Phi_A(\mu_\alpha) + \Phi_D(\lambda_\beta)} \right] \times \\ &\times \det_{II} \left[a(\lambda_\sigma) d(\mu_\tau) t(\lambda_\sigma, \mu_\tau) e^{\Phi_A(\lambda_\sigma) + \Phi_D(\mu_\tau)} \right] | \tilde{0} \rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$

или же, вынося из-под знаков детерминантов функции a и d вместе с соответствующими экспонентами от дуальных полей и вычисляя среднее, получим

$$\begin{aligned} S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) &= \prod_{j>k} [g(\mu_j, \mu_k) g(\lambda_k, \lambda_j)] \times \\ &\times \sum_{\text{part}} (-1)^{[\mathcal{P}_\mu] + [\mathcal{P}_\lambda]} \det_I [t(\mu_\alpha, \lambda_\beta)] \det_{II} [t(\lambda_\sigma, \mu_\tau)] \times \\ &\times \prod_{\alpha} a(\mu_\alpha) \prod_{\beta} d(\lambda_\beta) \prod_{\sigma} a(\lambda_\sigma) \prod_{\tau} d(\mu_\tau) \times \\ &\times \prod_{\alpha, \beta} h(\mu_\alpha, \lambda_\beta) \prod_{\sigma, \tau} h(\lambda_\sigma, \mu_\tau) \prod_{\alpha, \tau} h(\mu_\alpha, \mu_\tau) \prod_{\beta, \sigma} h(\lambda_\sigma, \lambda_\beta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Объясним теперь обозначения, которые используются в (2.5) и (2.6). В обеих формулах набор параметров μ разбит на два непересекающихся подмножества $\{\mu\} = \{\mu^I\} \cup \{\mu^{II}\}$. Аналогично мы поступили с набором λ : $\{\lambda\} = \{\lambda^I\} \cup \{\lambda^{II}\}$. Оба разбиения независимы, за исключением того, что число элементов в наборах I совпадает: $\text{card}\{\mu^I\} = \text{card}\{\lambda^I\}$. В каждом подмножестве параметры μ и λ упорядочены в порядке возрастания их индексов. Всякое такое разбиение мы будем обозначать символом “part”. Четность разбиения равна сумме четностей двух перестановок $\mathcal{P}_\mu$ и $\mathcal{P}_\lambda$. Перестановка $\mathcal{P}_\mu$ переводит последовательность $\{\mu^I\}, \{\mu^{II}\}$ в упорядоченную последовательность $\mu_1, \dots, \mu_N$. Аналогично действует перестановка $\mathcal{P}_\lambda$. Переменным из первых наборов (все равно, $\{\mu^I\}$ или $\{\lambda^I\}$) мы будем приписывать индексы α или β , переменным из вторых наборов – индексы σ или τ .

В (2.5), (2.6) суммирование ведется по всевозможным разбиениям, описанным выше, включая разбиение на пустое множество и полный набор. В зависимости от четности разбиения каждому слагаемому из этой суммы приписывается соответствующий знак. Первый детерминант в (2.5) и (2.6) содержит параметры, входящие только в наборы I, во второй детерминант входят параметры из наборов II. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы написали соответствующие индексы у знаков детерминантов и переменных μ и λ . Произведения, входящие в (2.6), являются сокращенной формой записи следующего типа:

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha} a(\mu_{\alpha}) &= \prod_{\mu \in \{\mu^I\}} a(\mu), \\ \prod_{\sigma} a(\lambda_{\sigma}) &= \prod_{\lambda \in \{\lambda^{II}\}} a(\lambda), \\ \prod_{\alpha, \beta} h(\mu_{\alpha}, \lambda_{\beta}) &= \prod_{\mu \in \{\mu^I\}} \prod_{\lambda \in \{\lambda^I\}} h(\mu, \lambda) \end{aligned}$$

и т.п. Наконец, индексы j и k мы сохранили для переменных, входящих в полные наборы. Так, например, в выражении $\prod_{j > k} g(\mu_j, \mu_k)$ произведение берется по всем параметрам из полного набора $\{\mu\}$. При $\gamma = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$t(\mu, \lambda) = \frac{2i}{\text{sh } 2(\mu - \lambda)},$$

поэтому детерминанты в формуле (2.6) сводятся к детерминантам Коши, и их можно записать в виде двойных произведений, например

$$\det_I \frac{1}{\text{sh } 2(\mu_{\alpha} - \lambda_{\beta})} = \frac{\prod_{\alpha > \beta} \text{sh } 2(\mu_{\alpha} - \mu_{\beta}) \text{sh } 2(\lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha})}{\prod_{\alpha, \beta} \text{sh } 2(\mu_{\alpha} - \lambda_{\beta})}.$$

Подставляя эти выражения в (2.6), после несложных преобразований приходим к сле-

дующей формуле:

$$\begin{aligned}
S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) &\stackrel{\gamma=\frac{\pi}{2}}{=} \prod_{j>k} [g(\mu_j, \mu_k)g(\lambda_k, \lambda_j)] \times \\
&\times i^N \sum_{\text{part}} (-1)^{[\mathcal{P}_\mu]+[\mathcal{P}_\lambda]} \prod_{\alpha} a(\mu_\alpha) \prod_{\beta} d(\lambda_\beta) \prod_{\sigma} a(\lambda_\sigma) \prod_{\tau} d(\lambda_\tau) \times \\
&\times \left\{ \frac{\prod_{\alpha>\beta} \text{sh}(\mu_\beta - \mu_\alpha) \text{sh}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)}{\prod_{\alpha,\beta} \text{sh}(\mu_\alpha - \lambda_\beta)} \right\} \left\{ \frac{\prod_{\sigma>\tau} \text{sh}(\mu_\tau - \mu_\sigma) \text{sh}(\lambda_\sigma - \lambda_\tau)}{\prod_{\sigma,\tau} \text{sh}(\lambda_\sigma - \mu_\tau)} \right\} \times \\
&\times \left\{ \prod_{\alpha>\beta} \text{ch}(\mu_\beta - \mu_\alpha) \prod_{\sigma>\tau} \text{ch}(\mu_\sigma - \mu_\tau) \prod_{\alpha,\tau} \text{ch}(\mu_\alpha - \mu_\tau) \right\} \times \\
&\times \left\{ \prod_{\alpha>\beta} \text{ch}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \prod_{\sigma>\tau} \text{ch}(\lambda_\sigma - \lambda_\tau) \prod_{\beta,\sigma} \text{ch}(\lambda_\sigma - \lambda_\beta) \right\}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Здесь в соответствии с (1.8) мы также заменили функции h гиперболическими косинусами.

Весьма громоздкую формулу (2.7) можно сильно упростить. Рассмотрим четыре произведения, которые в (2.7) взяты в фигурные скобки. Первое из них есть не что иное, как детерминант $\det_I \frac{1}{\text{sh}(\mu_\alpha - \lambda_\beta)}$. Во вторых фигурных скобках стоит $\det_{II} \frac{1}{\text{sh}(\lambda_\sigma - \mu_\tau)}$. Легко видеть, что третий множитель – это произведение по полному набору параметров μ : $\prod_{j<k} \text{ch}(\mu_j - \mu_k)$. Аналогично четвертое произведение равно $\prod_{j>k} \text{ch}(\lambda_j - \lambda_k)$. Последние два произведения не зависят от конкретного вида разбиения и могут быть вынесены за знак суммы. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) &\stackrel{\gamma=\frac{\pi}{2}}{=} \prod_{j>k} [f(\mu_j, \mu_k)f(\lambda_k, \lambda_j)] \times \\
&\times i^N \sum_{\text{part}} (-1)^{[\mathcal{P}_\mu]+[\mathcal{P}_\lambda]} \det_I \left[\frac{a(\mu_\alpha)d(\lambda_\beta)}{\text{sh}(\mu_\alpha - \lambda_\beta)} \right] \det_{II} \left[\frac{a(\lambda_\sigma)d(\mu_\tau)}{\text{sh}(\lambda_\sigma - \mu_\tau)} \right].
\end{aligned}$$

Применяя теперь формулу Лапласа в обратную сторону, получаем окончательно

$$\begin{aligned}
S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) &\stackrel{\gamma=\frac{\pi}{2}}{=} \prod_{j>k} [f(\mu_j, \mu_k)f(\lambda_k, \lambda_j)] \times \\
&\times \det_N [g(\mu_j, \lambda_k)(a(\mu_j)d(\lambda_k) - d(\mu_j)a(\lambda_k))] \tag{2.8}
\end{aligned}$$

или же с учетом (2.2)

$$S_N(\{\mu\}, \{\lambda\}) \stackrel{\gamma=\frac{\pi}{2}}{=} \prod_{j>k} [f(\mu_j, \mu_k)f(\lambda_k, \lambda_j)] \det_N \langle 0|C(\mu_j)B(\lambda_k)|0\rangle. \tag{2.9}$$

Таким образом, для скалярного произведения в обобщенной модели с тригонометрической R -матрицей мы получили формулу, аналогичную (2.4). Заметим, что в моделях

с рациональной R -матрицей в точке свободных фермионов функции $f(\mu, \lambda)$ и $g(\mu, \lambda)$ совпадают, следовательно, в (2.4) можно заменить произведение функций g соответствующим произведением функций f . После этого формулы (2.4) и (2.9) станут совершенно идентичны.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Полученная простая формула для скалярного произведения позволяет в рамках КМОЗ явно вычислять корреляционные функции в точке свободных фермионов, не прибегая к конструкции дуальных полей. В качестве примера мы рассмотрим один из наиболее простых и в то же время достаточно важный коррелятор – среднее оператора $e^{\xi Q_1}$. Определение этого оператора мы дадим чуть позже.

В дальнейшем мы будем рассматривать только свободнофермионные модели, поэтому во всех формулах будем считать $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (хотя, например, формулы (3.1)–(3.7) справедливы и для произвольного γ).

Для определения оператора $e^{\xi Q_1}$ необходимо рассмотреть обобщенную двухузельную модель [3]. Матрица монодромии такой модели является произведением двух матриц монодромии, каждая из которых соответствует своему узлу:

$$T(\lambda) = T_2(\lambda)T_1(\lambda), \quad (3.1)$$

$$T_i(\lambda) = \begin{pmatrix} A_i(\lambda) & B_i(\lambda) \\ C_i(\lambda) & D_i(\lambda) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Каждая из матриц $T_i(\lambda)$ имеет свой вакуумный вектор $|0\rangle_i$:

$$A_i(\lambda)|0\rangle_i = a_i(\lambda)|0\rangle_i, \quad D_i(\lambda)|0\rangle_i = d_i(\lambda)|0\rangle_i, \quad C_i(\lambda)|0\rangle_i = 0. \quad (3.3)$$

Аналогичными свойствами обладают сопряженные векторы $\langle 0|_i$ (ср. (1.3)). Вакуумный вектор для полной матрицы монодромии равен прямому произведению векторов $|0\rangle_1$ и $|0\rangle_2$: $|0\rangle = |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$. Легко видеть, что $a(\lambda) = a_1(\lambda)a_2(\lambda)$ и $d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. Коммутационные соотношения между операторами, входящими в $T_i(\lambda)$ по-прежнему задаются с помощью (1.4) с той же R -матрицей (1.5). Операторы, соответствующие различным узлам, коммутируют.

Оператор Q_1 определяется с помощью коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [Q_1, A_i(\lambda)] &= [Q_1, D_i(\lambda)] = 0, \\ [Q_1, B_i(\lambda)] &= \delta_{i1}B_i(\lambda), \\ [Q_1, C_i(\lambda)] &= -\delta_{i1}C_i(\lambda), \\ Q_1|0\rangle_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) немедленно следует, что

$$Q_1 \prod_{j=1}^N B_1(\lambda_j)|0\rangle_1 = N \prod_{j=1}^N B_1(\lambda_j)|0\rangle_1,$$

поэтому естественно назвать Q_1 оператором числа частиц в первом узле (хотя в конкретной модели физический смысл этого оператора может быть несколько иным).

Наша задача – вычислить среднее от оператора $e^{\xi Q_1}$, где ξ – произвольный комплексный параметр. В конкретных моделях такое среднее является производящим функционалом для некоторых корреляционных функций (см. [5, 12]), а кроме того, при $\xi \rightarrow -\infty$ величина $\langle e^{\xi Q_1} \rangle$ имеет простой физический смысл – это вероятность образования пустоты в первом узле.

Для того чтобы вычислить среднее $\langle e^{\xi Q_1} \rangle$, необходимо сначала записать произведения операторов $B(\lambda)$ и $C(\mu)$ через произведения $B_i(\lambda)$ и $C_i(\mu)$. Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= A_2(\lambda)B_1(\lambda) + B_2(\lambda)D_1(\lambda), \\ C(\lambda) &= C_2(\lambda)A_1(\lambda) + D_2(\lambda)C_1(\lambda). \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами работы [3], мы получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j)|0\rangle &= \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^I\}\cup\{\lambda^{II}\}} \prod_{\alpha} [a_2(\lambda_{\alpha})B_1(\lambda_{\alpha})]|0\rangle_1 \times \\ &\times \prod_{\sigma} [d_1(\lambda_{\sigma})B_2(\lambda_{\sigma})]|0\rangle_2 \prod_{\alpha,\sigma} f(\lambda_{\alpha}, \lambda_{\sigma}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\mu_j) &= \sum_{\{\mu\}=\{\mu^I\}\cup\{\mu^{II}\}} \langle 0|_1 \prod_{\alpha} [d_2(\mu_{\alpha})C_1(\mu_{\alpha})] \times \\ &\times \langle 0|_2 \prod_{\sigma} [a_1(\mu_{\sigma})C_2(\mu_{\sigma})] \prod_{\alpha,\sigma} f(\mu_{\sigma}, \mu_{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначения в (3.5) и (3.6) такие же, как в формуле (2.5). Теперь мы можем записать матричный элемент оператора $e^{\xi Q_1}$ в виде

$$\begin{aligned} \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\mu_j) e^{\xi Q_1} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) |0\rangle &= \sum_{\text{part}} e^{\xi n_I} S_{n_I}^{(1)}(\{\mu^I\}, \{\lambda^I\}) S_{n_{II}}^{(2)}(\{\mu^{II}\}, \{\lambda^{II}\}) \times \\ &\times \prod_{\alpha} a_2(\lambda_{\alpha}) \prod_{\beta} d_2(\mu_{\beta}) \prod_{\sigma} d_1(\lambda_{\sigma}) \prod_{\tau} a_1(\mu_{\tau}) \prod_{\alpha,\sigma} f(\lambda_{\alpha}, \lambda_{\sigma}) \prod_{\beta,\tau} f(\mu_{\tau}, \mu_{\beta}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) n_I и n_{II} – количество элементов в первом и втором наборах ($n_I + n_{II} = N$), $S_{n_I, II}^{(1,2)}$ – скалярные произведения в первом и втором узлах. Поскольку коммутационные соотношения матричных элементов матриц $T_i(\lambda)$ ($i = 1, 2$) задаются формулой (1.4), то для скалярных произведений, входящих в (3.7), справедливы представления типа (2.8). Следует только заменить в (2.8) функции a и d на a_1 и d_1 для произведения $S^{(1)}$ и на a_2 и d_2 для произведения $S^{(2)}$. Подставляя соответствующие формулы в (3.7),

после несложных преобразований, аналогичных тем, которые мы проводили с (2.7), находим

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\mu_j) e^{\xi Q_1} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle &= \prod_j d(\lambda_j) d(\mu_j) \times \\ &\times \prod_{j>k} [f(\mu_j, \mu_k) f(\lambda_k, \lambda_j)] \sum_{\text{part}} (-1)^{[\mathcal{P}_\mu] + [\mathcal{P}_\lambda]} e^{\xi n_1} \prod_{\alpha} m(\lambda_{\alpha}) \prod_{\sigma} l(\mu_{\sigma}) \times \\ &\times \det_I [g(\mu_{\alpha}, \lambda_{\beta}) (l(\mu_{\alpha}) - l(\lambda_{\beta}))] \det_{II} [g(\mu_{\sigma}, \lambda_{\tau}) (m(\mu_{\sigma}) - m(\lambda_{\tau}))]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь мы ввели новые функции $l(\lambda) = a_1(\lambda)/d_1(\lambda)$ и $m(\lambda) = a_2(\lambda)/d_2(\lambda)$. Кроме того, при выводе последней формулы мы воспользовались антисимметричностью функции $f(\mu, \lambda) = i \operatorname{cth}(\mu - \lambda)$. Теперь остается в очередной раз воспользоваться формулой Лапласа, чтобы получить представление для матричного элемента оператора $e^{\xi Q_1}$ в виде детерминанта

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\mu_j) e^{\xi Q_1} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle = \prod_j d(\lambda_j) d(\mu_j) \prod_{j>k} [f(\mu_j, \mu_k) f(\lambda_k, \lambda_j)] \det_N \tilde{V}_{jk}, \quad (3.9)$$

где

$$\tilde{V}_{jk} = g(\mu_j, \lambda_k) [e^{\xi} m(\lambda_k) (l(\mu_j) - l(\lambda_k)) + l(\mu_j) (m(\mu_j) - m(\lambda_k))]. \quad (3.10)$$

Устремляя теперь параметры μ_j к λ_j ($j = 1, \dots, N$), получаем

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) e^{\xi Q_1} \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle = \prod_j d^2(\lambda_j) \prod_{j \neq k} f(\lambda_j, \lambda_k) \det_N V_{jk}, \quad (3.11)$$

$$V_{jj} = i(e^{\xi} m(\lambda_j) l'(\lambda_j) + m'(\lambda_j) l(\lambda_j)), \quad (3.12)$$

$$V_{jk} = g(\lambda_j, \lambda_k) [m(\lambda_k) l(\lambda_j) (e^{\xi} - 1) + r(\lambda_j) - r(\lambda_k) e^{\xi}], \quad j \neq k, \quad (3.13)$$

где штрих означает производную, а

$$r(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} = m(\lambda) l(\lambda).$$

Таким образом, мы вычислили среднее от оператора $e^{\xi Q_1}$ по произвольному ненормированному состоянию $\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle$.

Нам остается сделать последний шаг – потребовать, чтобы состояние $\prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle$ было собственной функцией оператора $\operatorname{tr} T(\nu) = A(\nu) + D(\nu)$. Как уже отмечалось, это требование приводит к системе уравнений алгебраического анзаца Бете (1.9), которая в точке свободных фермионов $\gamma = \frac{\pi}{2}$ выглядит особенно просто:

$$r(\lambda_j) = (-1)^{N-1}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

Заметим, что (3.14) является системой уравнений на параметры $\{\lambda\}$ лишь в конкретных моделях, где функция $r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda)$ задана явно. В обобщенной же модели равенства (3.14) задают лишь значения функции $r(\lambda)$ в N точках $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. При этом производные функции $r(\lambda)$ в этих точках, равно как и сама функция $r(\lambda)$ во всех остальных точках, по-прежнему не фиксированы.

Подставляя (3.14) в (3.12) и (3.13), получим

$$V_{jk} = (-1)^{N-1} [\delta_{jk} Z(\lambda_j) + g(\lambda_j, \lambda_k)(e^\xi - 1)(l(\lambda_j)l^{-1}(\lambda_k) - 1)], \quad (3.15)$$

где

$$Z(\lambda_j) = i \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \log r(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_j}.$$

При $j = k$ V_{jk} доопределяется по непрерывности:

$$V_{jj} = (-1)^{N-1} \left(Z(\lambda_j) + i(e^\xi - 1) \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \log l(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_j} \right).$$

Полагая в (3.11) и (3.15) $\xi = 0$, находим норму собственной функции

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^N C(\lambda_j) \prod_{j=1}^N B(\lambda_j) | 0 \rangle = \prod_j (Z(\lambda_j) d^2(\lambda_j)) \prod_{j \neq k} f(\lambda_j, \lambda_k). \quad (3.16)$$

Следовательно, нормированное среднее оператора $e^{\xi Q_1}$ равно

$$\langle e^{\xi Q_1} \rangle_N = \det_N \left[\delta_{jk} + g(\lambda_j, \lambda_k) \frac{e^\xi - 1}{Z(\lambda_k)} (l(\lambda_j)l^{-1}(\lambda_k) - 1) \right]. \quad (3.17)$$

В заключение отметим, что все проведенные в этом разделе вычисления практически дословно переносятся на случай моделей с рациональной R -матрицей. Формула (3.17) остается справедливой и в этом случае.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В КОНКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

Для того чтобы вычислить среднее $\langle e^{\xi Q_1} \rangle$ в конкретной свободнофермионной модели с тригонометрической R -матрицей, достаточно просто подставить в (3.17) соответствующие функции $l(\lambda)$ и $Z(\lambda)$. В этом смысле полученная формула для коррелятора столь же универсальна, как и уравнения анзаца Бете. В качестве примера мы рассмотрим XXZ -магнетик Гейзенберга спина $1/2$ на решетке с M узлами

$$H = \sum_{m=1}^M \left[\sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)} + \Delta \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} \right], \quad (4.1)$$

где $\Delta = \cos \gamma$ — параметр анизотропии.

Среднее оператора $e^{\xi Q_1}$ в XXZ -магнетике (при $\Delta = 0$) было вычислено в работе [12] с использованием метода координатного анзаца Бете. Тем не менее нам хотелось бы в качестве примера рассмотреть именно эту модель, чтобы продемонстрировать особую простоту предлагаемого нами подхода.

Явный вид оператора Q_1 дается формулой

$$Q_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (1 - \sigma_z^{(k)}),$$

где m — произвольное целое число из множества $1, \dots, M$. Физический смысл этого оператора состоит в том, что Q_1 является оператором числа квазичастиц (спин вниз) в первых m узлах решетки.

Функции $l(\lambda)$ и $Z(\lambda)$ при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ равны

$$l(\lambda) = [-i \operatorname{cth}(\lambda - i\pi/4)]^m, \quad (4.2)$$

$$Z(\lambda) = M \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \operatorname{cth}(\lambda - i\pi/4) = \frac{2M}{\operatorname{ch} 2\lambda}. \quad (4.3)$$

Остается подставить (4.2) и (4.3) в (3.17), и мы получим среднее для оператора $e^{\xi Q_1}$ в модели XXZ при $\Delta = 0$:

$$\langle e^{\xi Q_1} \rangle_N = \det_N \left\{ \delta_{jk} + i \frac{e^{\xi} - 1}{2M} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda_k}{\operatorname{sh}(\lambda_j - \lambda_k)} \left[\left(\frac{\operatorname{cth}(\lambda_j - i\pi/4)}{\operatorname{cth}(\lambda_k - i\pi/4)} \right)^m - 1 \right] \right\}. \quad (4.4)$$

Производя замену переменных

$$\operatorname{cth}(\lambda - i\pi/4) = ie^{ip},$$

мы воспроизводим результат работы [12]:

$$\langle e^{\xi Q_1} \rangle_N = \det_N \left[\delta_{jk} + \left(\frac{e^{\xi} - 1}{M} \right) \frac{\sin \frac{m}{2}(p_j - p_k)}{\sin \frac{1}{2}(p_j - p_k)} \right]. \quad (4.5)$$

При этом равенства (3.14) переходят в уравнения на параметры p_j

$$e^{iMp_j} = (-1)^{N-1}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Дифференцируя (4.5) по ξ в нуле, легко получить корреляционные функции типа $\langle \sigma_z^{(m)} \rangle$, $\langle \sigma_z^{(m)} \sigma_z^{(1)} \rangle$ и т. п.

Точно так же, подставляя в (3.17) соответствующие функции $l(\lambda)$ и $Z(\lambda)$, можно получить среднее $\langle e^{\xi Q_1} \rangle$ и в других свободнофермионных моделях с тригонометрической R -матрицей (например, синус-Гордон, q -бозоны и др.).

Корреляционные функции других операторов также могут быть вычислены в рамках развиваемого подхода. При этом основной проблемой является задание коммутационных соотношений между этими операторами и матрицей монодромии. Это всегда можно сделать, по крайней мере, в рамках многоузельной модели, которая является

прямым обобщением двухузельной модели. Если коммутационные соотношения заданы, вычисление корреляционных функций сводится к суммированию скалярных произведений аналогично формуле (3.7). В результате мы получим детерминантные формулы, не содержащие дуальных полей.

Список литературы

- [1] *B.E. Korepin* // ДАН СССР. 1982. Т. 265. С. 1361.
- [2] *V.E. Korepin* // Comm. Math. Phys. 1982. V. 86. P. 391.
- [3] *A.G. Izergin, V.E. Korepin* // Comm. Math. Phys. 1984. V. 94. P. 67.
- [4] *V.E. Korepin* // Comm. Math. Phys. 1987. V. 113. P. 177.
- [5] *B.E. Korepin* // Функциональный анализ. 1989. Т. 23. С. 15.
- [6] *V.E. Korepin, N.A. Slavnov* // Comm. Math. Phys. 1991. V. 136. P. 633.
- [7] *H. Frahm, A.R. Its, V.E. Korepin* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 428 [FS]. P. 694.
- [8] *F.H.L. Essler, H. Frahm, A.G. Izergin, V.E. Korepin*. Preprint ITP-UH-09/94, ITP-SB-94-24.
- [9] *A.R. Its, A.G. Izergin, V.E. Korepin, N.A. Slavnov* // Int. Jour. Mod. Phys. 1990. V. B4. P. 1003.
- [10] *V.E. Korepin, A.G. Izergin, N.M. Bogoliubov*. Quantum inverse scattering method and correlation functions. Cambridge: Univ. Press., 1993.
- [11] *Н.А. Славнов* // ТМФ. 1989. Т. 79. С. 232.
- [12] *F. Colomo, A.G. Izergin, V.E. Korepin, V. Tognetti* // ТМФ. 1993. Т. 94. С. 19.

Математический институт
им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
25.XII.1995 г.

N. A. Slavnov

CANCELLATION OF DUAL FIELDS IN FREE FERMION MODELS WITH TRIGONOMETRIC R -MATRIX

The determinant representation for correlation functions in free fermion models with trigonometric R -matrix is obtained. This representation does not contain auxiliary quantum operators.