Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ю. Остапенко, А. П. Паль-Валь, Е. Я. Хруслов, Равномерные асимптотические формулы для криволинейных солитонов уравнений Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 2, 205–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:46:44

Д. Ю. Остапенко, А. П. Паль-Валь, Е. Я. Хруслов
**РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СОЛИТОНОВ
УРАВНЕНИЙ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ**

Исследуется специальный класс решений уравнений Кадомцева–Петвиашвили при $t \rightarrow \infty$. Доказывается, что эти решения в окрестности переднего фронта распадаются на бесконечную серию криволинейных солитонов, параметры которых зависят от переменной $Y = y/t$. Получены равномерные относительно Y асимптотические формулы.

1. В 1974 г. в работе Захарова и Шабата [1] была установлена применимость метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) к некоторым нелинейным эволюционным уравнениям с двумя пространственными переменными. Наиболее известным из них является уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{d}{dx}(u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = 3\alpha u_{yy}, \quad (1)$$

описывающее слабонелинейные волны в средах с малой дисперсией α . В зависимости от знака дисперсии различаются два случая: $\alpha = 1$ (уравнение КП-1) и $\alpha = -1$ (уравнение КП-2). В первом случае уравнение (1) описывает волны на поверхности жидкости с большим поверхностным натяжением, а во втором – гравитационные волны на поверхности неглубокой жидкости с малым поверхностным натяжением. В обоих случаях уравнение (1) имеет точные решения в виде солитонов (прямолинейных)

$$u(x, y, t) = \frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2[\kappa(x - ay - bt) + \varphi]}. \quad (2)$$

В 1986 г. Захаров, используя метод обратной задачи рассеяния, построил некоторые решения уравнения КП-2, которые трактовались как криволинейные солитоны [2]. Проведя асимптотический анализ, он показал, что в области больших y ($y \gg vt$) эти солитоны слабо изогнуты, так что их вершина находится на линии $x = Ay + B \ln y + C$, но в области $y \gg vt$ эти солитоны выпрямляются и их зависимость от y исчезает.

В 1994 г. в работе [3] с помощью метода Захарова–Шабата были построены специальные решения уравнения КП-2, которые при больших временах распадаются в бесконечный пучок криволинейных солитонов. Эти солитоны представляются обычными формулами вида (2), но их амплитуда, ширина, скорость и фаза зависят от параметра $Y = y/t$. Аналогичные решения для уравнения КП-1 построены в [4]. Полученные в работах [3, 4]

асимптотические формулы справедливы всюду вне точек разрыва амплитуды и фазы, но они неравномерны относительно Y и обоснованы лишь для конечных значений Y .

В данной работе мы, несколько модифицировав процедуру получения асимптотического разложения для ядра основного интегрального уравнения МОЗР (уравнения Марченко), получаем равномерные по Y асимптотические формулы для криволинейных солитонов. Для определенности рассматриваем только уравнение КП-1, хотя аналогичные утверждения справедливы и для уравнения КП-2.

2. Формальная схема метода Захарова–Шабата решения уравнения КП сводится к следующему. Решение уравнения КП ищется в виде

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, y, t), \quad (3)$$

где функция $K(x, z, y, t)$ по переменной z является решением интегрального уравнения Марченко

$$K(x, z, y, t) + F(x, z, y, t) + \int_x^\infty K(x, s, y, t) F(s, z, y, t) ds = 0, \quad z > x, \quad (4)$$

в котором ядро $F(x, z, y, t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} F_t + F_{xxx} + F_{zzz} &= 0, \\ \sqrt{-\alpha} F_y + F_{xx} - F_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Фактическая реализация метода состоит в подходящем выборе решения системы (5), доказательстве разрешимости интегрального уравнения (4) и установлении необходимой гладкости его решения $K(x, z, y, t)$. Кроме того, выбор решения системы (5) должен обеспечить вещественность решения соответствующего уравнения КП.

В случае КП-1 широкий класс решений системы уравнений (5), удовлетворяющих отмеченным выше требованиям, представим в виде

$$F(x, z, y, t) = \iint_\Sigma \exp[i\mu(x-z) - \nu(x+z) + 4\mu\nu y - 2\nu(3\mu^2 - \nu^2)t] d\sigma(\mu, \nu), \quad (6)$$

где $d\sigma(\mu, \nu)$ – некоторая положительная вещественная мера, сосредоточенная в верхней полуплоскости $\lambda = \mu + i\nu$. А именно, справедлива

ЛЕММА. Если носитель меры $d\sigma(\mu, \nu)$ находится на положительном расстоянии от оси $\text{Im } \lambda = 0$ в верхней полуплоскости и для любых $a > 0$, $b > 0$

$$\iint_\Sigma e^{a\nu^3 - b\nu\mu^2} d\sigma(\mu, \nu) < \infty,$$

то формулы (3)–(5) дают вещественное решение $u(x, y, t)$ уравнения КП-1, определенное для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $t > 0$ и стремящееся к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Наша основная цель состоит в изучении асимптотического поведения таких решений при $t \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть на носителе Σ меры $d\sigma(\mu, \nu)$ максимальное значение функции

$$f(\lambda, Y) = \nu^2 - 3\mu^2 + 2\mu Y$$

строго положительно и для всех $Y = y/t$ достигается лишь в одной точке $\lambda(Y) = \mu(Y) + i\nu(Y)$. Положим

$$C(Y) = \max_{\lambda \in \Sigma} f(\lambda, Y) = f(\lambda(Y), Y) > 0. \quad (7)$$

Тогда решение $u(x, y, t)$ уравнения КП-1, фигурирующее в лемме, в области

$$G_N(t) = \left\{ x, y : x > C(Y)t - \frac{1}{2\nu(Y)} \ln t^N, -\infty < y < +\infty \right\}$$

для любого натурального N представимо в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{[p^{-1}(N)]} \frac{2\nu^2(Y)}{\text{ch}^2[\nu(Y)(x - C(Y)t) + \varphi_n(t, Y)]} + O(t^{-1/2+\varepsilon}), \quad (8)$$

где $\varphi_n(Y, t) = p(n) \ln t - \ln b_n(Y)$, функции $p(n)$ и $b_n(Y)$ определяются поведением меры $d\sigma(\mu, \nu)$ в окрестности точки $\lambda(Y)$, причем асимптотика (8) равномерна относительно $(x, y) \in G_N(t)$ при любом фиксированном N .

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательствам работ [3, 4]. Однако равномерность асимптотики относительно Y требует дополнительного изучения асимптотического поведения решений при $|y| \rightarrow \infty$, которое проводится тем же методом, что и при $t \rightarrow \infty$.

В качестве примера рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть

$$\Sigma = \{\lambda = \mu + i\nu : \nu = \nu_0 > 0\},$$

$$d\sigma(\mu, \nu) = g_0(\mu) \delta(\nu - \nu_0) d\nu d\mu,$$

где $g_0(\mu)$ — некоторая гладкая положительная суммируемая функция, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда в формуле (8) имеем

$$C(Y) = \max_{\lambda \in \Sigma} (\nu^2 - 3\mu^2 + 2\mu Y) = \nu_0^2 + \frac{Y^2}{3}, \quad \nu(Y) = \nu_0,$$

$$p(n) = \frac{2n-1}{2}, \quad [p^{-1}(N)] = N,$$

$$b_n(Y) = \frac{g_0(Y)}{(n!)^2 (2\nu_0)^{\frac{2n-1}{2}}} \frac{(\Gamma^{(n+1)})^2}{(\Gamma^{(n)})^2} > 0,$$

где $\Gamma^{(n)}$ — определитель матрицы порядка n с элементами

$$\Gamma(l+m+1) \quad (l, m = \overline{0, n-1}).$$

Таким образом, решение распадается на криволинейные солитоны постоянной амплитуды и ширины, а их вершины находятся на линиях

$$x = \nu_0^2 t + \frac{y^2}{3t} + \frac{2n-1}{2\nu_0} \ln t - \ln b_n\left(\frac{y}{t}\right).$$

3. Условие, чтобы максимальное значение в (7) достигалось лишь в одной точке носителя Σ меры $d\sigma(\mu, \nu)$ при всех Y , определяет глобальный характер асимптотической формулы (8). Конечно, оно выполняется не всегда, хотя множество тех Y , для которых оно не выполняется в определенном смысле, мало. Например, если граница множества Σ состоит из конечного числа аналитических кривых, то множество тех Y , где это условие не выполняется, не более чем конечно. В этих точках функции $\nu(Y)$ и $b_n(Y)$ претерпевают разрывы первого рода, хотя функция $C(Y)$ остается непрерывной всюду. При этом асимптотическая формула (8) также справедлива всюду вне точек разрыва функций $\nu(Y)$ и $b_n(Y)$ и равномерна вне произвольно малых окрестностей этих точек.

Однако метод работы [3] допускает уточнение, позволяющее построить глобальную (равномерную по $Y \in R$) асимптотическую формулу. Мы покажем это на простейшем примере.

Пусть носитель Σ меры $d\sigma(\mu, \nu)$ состоит из двух вертикальных отрезков, т.е.

$$\Sigma = \{\lambda = \mu + i\nu : \mu = \mu_1, 0 < \varepsilon \leq \nu \leq \nu_1\} \cup \{\lambda = \mu + i\nu : \mu = \mu_2, 0 < \varepsilon \leq \nu \leq \nu_2\},$$

$$\nu_k^2 > 3\mu_k^2, \quad k = 1, 2; \quad \mu_1, \mu_2 < 0,$$

а сосредоточенная на нем мера имеет вид

$$d\sigma(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^2 g_k \delta(\mu - \mu_k) d\mu d\nu, \quad g_k > 0.$$

В данном случае максимальное значение (7) достигается в одной точке ($\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1$ или $\lambda_2 = \mu_2 + i\nu_2$) при всех $Y \neq Y_0$, а при $Y = Y_0$ — в двух точках λ_1 и λ_2 . При этом

$$Y_0 = \frac{3(\mu_1^2 - \mu_2^2) + \nu_2^2 - \nu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_2)},$$

а функция $C(Y)$ имеет вид

$$C(Y) = \begin{cases} \nu_1^2 - 3\mu_1^2 + 2\mu_1 Y & \text{при } Y \geq Y_0, \\ \nu_2^2 - 3\mu_2^2 + 2\mu_2 Y & \text{при } Y \leq Y_0. \end{cases}$$

Именно эти точки дают основной вклад в асимптотику интеграла (6) при $t \rightarrow \infty$.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{aligned} x &= C(Y)t + \xi, \\ z &= C(Y)y + \zeta, \\ Y &= y/t \end{aligned}$$

получаем для ядра (6) выражение

$$F(\xi, \zeta, Y, t) = \sum_{k=1}^2 q_k \int_{\varepsilon}^{\nu_k} \exp\left\{i\mu_k(\xi - \zeta) + \nu(\xi + \zeta) + 2\nu[\nu^2 - 3\mu_k^2 + 2\mu_k Y - C(Y)]t\right\} d\nu.$$

Основная идея работы [3], перенесенная на уравнение КП из [5], состоит в том, чтобы представить $F(\xi, \zeta, Y, t)$ в виде суммы вырожденного ядра и ядра $G_N(\xi, \zeta, Y, t)$ тако-кого, чтобы при $t \rightarrow \infty$ нормы порождаемых им согласно уравнению (4) интегрального оператора $\hat{G}(Y, t)$ и вектора $G(Y, t)$ в пространстве $L_2(\xi, \infty)$ стремились к нулю равномерно относительно Y , изменяющегося на некотором множестве $A \in R$. Имея это в виду и пользуясь методом Лапласа для оценки асимптотики интегралов при больших t , получаем

$$F(\xi, \zeta, Y, t) = F_N(\xi, \zeta, Y, t) + G_N(\xi, \zeta, Y, t),$$

где вырожденное ядро $F_N(\xi, \zeta, Y, t)$ определяется формулами

$$\begin{aligned} F_N(\xi, \zeta, Y, t) &= \sum_{k=1}^2 q_k e^{i\mu_k(\xi-\zeta)-\nu_k(\xi+\zeta)} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-n-1} \xi^n \zeta^m \omega_{nm}^k(Y, t) (1 + \delta_n^k(t)); \\ \omega_{nm}^k &= e^{-\varphi_k(Y)t} \frac{\Gamma(n+m+1) \nu_k^{n+m}}{n! m! a_k^{n+m+1} t^{n+m+1}}; \\ a_k &= \frac{\partial}{\partial \nu} [2\nu(\nu^2 - 3\mu_k^2 + 2\mu_k Y - C(Y))] \Big|_{\lambda=\lambda_k} = 4\nu_k^2; \\ \varphi_1(Y) &= \begin{cases} 4\nu_1(Y - Y_0)(\mu_2 - \mu_1), & Y \geq Y_0, \\ 0, & Y \leq Y_0; \end{cases} \\ \varphi_2(Y) &= \begin{cases} 4\nu_2(Y_0 - Y)(\mu_2 - \mu_1), & Y \leq Y_0, \\ 0, & Y \geq Y_0; \end{cases} \\ |\delta_n^k(t)| &\leq \frac{c}{\sqrt{t}} \end{aligned} \quad (9)$$

и равномерна относительно Y .

При этом существует функция $T(N)$ такая, что при любом фиксированном N в области

$$\xi > -\frac{1}{2 \max(\nu_1, \nu_2)} \ln t^N, \quad t > T(N),$$

справедлива равномерная относительно Y ($-\infty < Y < +\infty$) оценка норм оператора $\hat{G}_N(Y, t)$ и вектора $G_N(Y, t)$:

$$\|\hat{G}_N(Y, t)\| \leq \frac{c}{t^{1/2-\varepsilon}}, \quad \|G_N(Y, t)\| \leq \frac{c}{t^{1/2-\varepsilon}}. \quad (10)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения Марченко с вырожденным ядром (9). Представляя его решение в виде

$$K_N(\xi, \zeta, Y, t) = \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n^k(\xi, Y, t) \zeta^n e^{i\mu_k(\xi-\zeta)-\nu_k \zeta}, \quad (11)$$

получаем для $X = (\alpha_0^1 \dots \alpha_{N-1}^1 \alpha_0^2 \dots \alpha_{N-1}^2)^T$ систему линейных алгебраических уравнений

$$(I + Q_N)X = Y, \quad (12)$$

где

$$Y = (\beta_0^1 \dots \beta_{N-1}^1 \beta_0^2 \dots \beta_{N-1}^2)^T;$$

$$\beta_n^k = e^{-\nu_k \xi} \sum_{j=0}^{N-k-1} \omega_{nj}^k \xi^j,$$

а Q_N – блочная матрица размера $2N \times 2N$:

$$Q_N(\xi, Y, t) = \begin{pmatrix} \|A^1\| & \|B\| \\ \|C\| & \|A^2\| \end{pmatrix}.$$

Элементы блоков A^1, B, C, A^2 размера $n \times n$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_{jm}^k &= \sum_{i=0}^{N-j-1} \omega_{ji}^k I_{i+m}^k(\xi), \quad k = 1, 2; \\ B_{jm} &= \sum_{i=0}^{N-j-1} \omega_{ji}^1 J_{i+m}(\xi), \\ C_{jm} &= \sum_{i=0}^{N-j-1} \omega_{ji}^2 \tilde{J}_{i+m}(\xi), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} I_{j+m}^k &= \int_{\xi}^{\infty} s^{j+m} e^{-2\nu_k s} ds, \quad k = 1, 2; \\ J_{j+m} &= e^{i(\mu_2 - \mu_1)\xi} \int_{\xi}^{\infty} s^{j+m} e^{i(\mu_1 - \mu_2)s - (\nu_1 + \nu_2)s} ds; \\ \tilde{J}_{j+m} &= e^{i(\mu_1 - \mu_2)\xi} \int_{\xi}^{\infty} s^{j+m} e^{i(\mu_2 - \mu_1)s - (\nu_1 + \nu_2)s} ds; \quad j, m = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение системы (12) вместе с (11) дает

$$K_N(\xi, \zeta, Y, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \det [I + Q_N(\xi, Y, t)].$$

Отсюда, учитывая (10) и (3), приходим к следующей асимптотической формуле, справедливой в области

$$\begin{aligned} x &> C(Y)t + \frac{1}{2 \max(\nu_1, \nu_2)} \ln t^N \left(t > T(N), \quad -\infty < Y < +\infty, \quad Y = \frac{y}{t} \right); \\ u(x, y, t) &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ln \det [I + Q_N(\xi, Y, t)] \Big|_{\xi=\zeta=x-C(Y)t} + O(t^{-1/2+\epsilon}). \end{aligned}$$

Элементы матрицы $Q_N(\xi, Y, t)$ определены формулами (13), (14). Например, при $N = 1$ имеем

$$u(x, y, t) \sim 2 \frac{q_1 e^{-\varphi_1(Y)t} e^{-2\nu_1 \xi} \frac{1}{4\nu_1^2 t} + q_2 e^{-\varphi_2(Y)t} e^{-2\nu_2 \xi} \frac{1}{4\nu_2^2 t}}{\left(1 + q_1 e^{-\varphi_1(Y)t} e^{-2\nu_1 \xi} \frac{1}{4\nu_1^2 t} + q_2 e^{-\varphi_2(Y)t} e^{-2\nu_2 \xi} \frac{1}{4\nu_2^2 t} \right)^2}.$$

Эта формула при $|Y - Y_0| \geq \varepsilon > 0$ дает

$$u(x, y, t) \sim \begin{cases} 2\nu_1^2 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \nu_1 (x - 2\mu_1^2 y - (\nu_1^2 - 3\mu_1^2)t) + \frac{2\nu_1}{\sqrt{q_1}} \ln t^{1/2} \right\} & \text{при } Y \geq Y_0 + \varepsilon; \\ 2\nu_2^2 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \nu_2 (x - 2\mu_2^2 y - (\nu_2^2 - 3\mu_2^2)t) + \frac{2\nu_2}{\sqrt{q_2}} \ln t^{1/2} \right\} & \text{при } Y \leq Y_0 - \varepsilon, \end{cases}$$

т.е. глобально описывает “изломанный” солитон, расположенный на фронте решения.

Эта работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант U2O200.

Список литературы

- [1] В.Е. Захаров, А.Б. Шабат // Функции, анализ и его прилож. 1974. Т. 6. №3. С. 43–53.
- [2] В.Е. Захаров // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. №9. С. 1073–1078.
- [3] И.А. Андерс, В.П. Котляров, Е.Я. Хруслов // ТМФ. 1994. Т. 99. №1. С. 27–35.
- [4] И.А. Андерс // Матем. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1. №2. С. 175–185.
- [5] Е.Я. Хруслов // Матем. сб. 1976. Т. 2. С. 261–281.

Математическое отделение
Физико-технического института низких температур
Академии наук Украины

Поступила в редакцию
16.XI.1995 г.

D. Yu. Ostapenko, A. P. Pal-Val, E. Ya. Khruslov

UNIFORM ASYMPTOTIC FORMULAS FOR THE CURVED SOLITONS OF THE KADOMTSEV–PETVIASHVILI EQUATIONS

The special class of solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equations is investigated in the limit $t \rightarrow \infty$. It's proved that these solutions split into infinite series of curved solitons in the neighbourhood of the leading edge. Parameters of these solitons depend on the variable $Y = y/t$. Uniform in Y asymptotic formulas are obtained.