Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, А. М. Малокустов, Универсальные регуляризации. IV. Компенсации диаграмм в тождествах Уорда, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 2, 249–275

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:28:24

О. И. Завьялов, А. М. Малокостов

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ.
IV. КОМПЕНСАЦИИ ДИАГРАММ
В ТОЖДЕСТВАХ УОРДА

На диаграммном уровне описан механизм компенсаций в тождествах Уорда для неабелевых калибровочных теорий. Это позволяет анализировать нелагранжевы регуляризации. Предложен вариант регуляризации (отличной от размерной регуляризации и метода высших ковариантных производных) из класса “универсальных” регуляризаций, который сохраняет калибровочную инвариантность как в однопетлевом, так и в двухпетлевом приближении, по крайней мере, для поляризационного оператора.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В предыдущих работах данного цикла (см. [1]) был описан класс регуляризаций (т.е. класс регуляризованных операторов хронологического упорядочения T_{reg}), сохраняющих такие основные свойства формального ряда теории возмущений, как коммутативность операций хронологического упорядочения и вариационного дифференцирования по полям, возможность интегрирования по частям в фейнмановских интегралах и редукционные формулы. В работе [2] было показано, что этих свойств достаточно, чтобы любая регуляризация из данного класса сохраняла калибровочную инвариантность в абелевых калибровочных теориях. Однако аналогичное утверждение для неабелевых теорий (оно также содержалось в [2]) является ошибочным. Иными словами, произвольная “универсальная” регуляризация, вообще говоря, нарушает калибровочную симметрию в неабелевых теориях, если на “мягкие массы” этой регуляризации не наложены дополнительные ограничительные условия.

Настоящая работа завершает цикл статей, посвященных “универсальным” регуляризациям. Здесь мы, во-первых, на диаграммном уровне опишем действие механизмов компенсаций в тождествах Уорда для неабелевых калибровочных теорий. Во-вторых, исправляя упомянутую ошибку, мы сформулируем рецепт регуляризации теории Янга–Миллса в двухпетлевом приближении и докажем, что эта регуляризация сохраняет калибровочную инвариантность, по крайней мере, для поляризационного оператора. На этом примере мы покажем, как применяется описанная техника.

Мы будем использовать обозначения из работы [2]. Напомним их. Эффективный лагранжиан теории Янга–Миллса записывается в виде

$$L_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a. \quad (1)$$

Здесь, как обычно, $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a$ — напряженность глюонного поля, c и $\bar{c}$ — поля госта и антигоста соответственно, а D_μ — ковариантная производная:

$$(D_\mu c)^a = \partial_\mu c^a + g(A_\mu \times c)^a$$

(“векторное произведение” понимается в смысле свертки со структурными константами: $(A_\mu \times c)^a \equiv t^{abd} A_\mu^b c^d$; ниже будет использоваться также “скалярное” произведение — свертка по изотопическим индексам: $A \cdot B \equiv A^a B^a$; в ситуациях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем вообще опускать изотопические индексы).

Этот лагранжиан, кроме двойных и тройных вершин, содержит четверную вершину $-\frac{1}{4}(A_\mu \times A_\nu) \cdot (A_\mu \times A_\nu)$. Между тем регуляризации из класса “универсальных”, в том числе и та, рецепт которой будет сформулирован ниже, требуют, чтобы все вершины были трилинейными. Поэтому вместо четверной вершины введем тройную вершину $L_\sigma = g \sigma_{\mu\nu} \cdot (A_\mu \times A_\nu)$. Здесь $\sigma_{\mu\nu}^a(x)$ — вспомогательное антисимметричное тензорное поле, имеющее δ -образный пропагатор:

$$\langle \sigma_{\mu\nu}^a(x) \sigma_{\rho\lambda}^b(y) \rangle = \frac{i}{4} \delta^{ab} [g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}] \delta(x - y).$$

Поле σ будет иметь такой пропагатор, если в “свободный” лагранжиан ввести слагаемое $(\sigma_{\mu\nu})^2$. Таким образом, вместо лагранжиана (1) мы будем рассматривать лагранжиан

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\nu)^2 + \partial_\mu \bar{c} \cdot \partial_\mu c + (\sigma_{\mu\nu})^2 - \\ & - g \partial_\mu A_\nu \cdot (A_\mu \times A_\nu) + g \partial_\mu \bar{c} \cdot (A_\mu \times c) + g \sigma_{\mu\nu} \cdot (A_\mu \times A_\nu). \end{aligned} \quad (2)$$

Легко убедиться, что, исключив диаграммы с внешними σ -линиями, мы получим набор диаграмм, порождаемый лагранжианом (1).

Полное (или эффективное) действие теории $s_{\text{eff}} = i \int dx L_{\text{eff}}$ естественным образом разбивается на “свободное” действие s_0 , состоящее из билинейных по полям членов, и взаимодействие $s = s_1 + s_c + s_\sigma$ (здесь s_1 — обычная вершина тройного самодействия глюонов, а s_c и s_σ — вершины глюон-гостового и глюон-тензорного взаимодействий, соответственно). Как и в предыдущих работах, основным объектом рассмотрения для нас будет нормальный символ матрицы рассеяния вне массовой поверхности, определяемый формулой

$$S(A_\mu, c, \partial_\mu \bar{c}, \sigma_{\mu\nu}) = T \exp(s), \quad (3)$$

который мы для краткости будем называть просто матрицей рассеяния. Он зависит от глюонного, тензорного и гостовых полей.

В качестве условия калибровочной инвариантности теории мы выберем условие БРСТ-симметрии, которое в терминах матрицы рассеяния имеет на поверхности $\sigma_{\mu\nu} = 0$ следующий вид (вывод этого соотношения из БРСТ-симметрии эффективного действия приведен в книге [3]; см. также [2]):

$$\int dx \left\{ \partial_\mu c(x) \cdot \frac{\delta S}{\delta A_\mu} + (\square_\perp^{\mu\nu} A_\nu(x)) \frac{\delta S}{\delta (\partial_\mu \bar{c}(x))} \right\} = \int dx \frac{ig}{2} T_{\text{reg}} (\square \check{c} \cdot (c \times c) e^s). \quad (4)$$

Здесь $\frac{\delta S}{\delta(\partial_\mu \bar{c})}$ – это вариационная производная матрицы рассеяния по градиенту антигоста (антигостовое поле входит в матрицу рассеяния именно в виде градиента $\partial_\mu \bar{c}$; точный смысл этой производной можно придать при использовании “естественной” системы гостов, см. [4]); “галка” над полем означает, что оно не участвует в спариваниях и всегда входит только в виде внешнего хвоста.

Введем обозначения, которые будут интенсивно использоваться в дальнейшем. Действие $s = s_1 + s_c + s_\sigma$ порождает вершины взаимодействия, которые мы графически изобразим так:

$$\begin{aligned}
 s_1 &\equiv \text{diagram with a circle labeled } s_1, \text{ one wavy line entering from the bottom, and one wavy line with a hook entering from the top}, \\
 s_c &\equiv \text{diagram with a circle labeled } s_c, \text{ one wavy line with a hook entering from the top, and two straight lines entering from the bottom}, \\
 s_\sigma &\equiv \text{diagram with a circle labeled } s_\sigma, \text{ one wavy line entering from the bottom, and two parallel straight lines entering from the top}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Пропагаторы условимся обозначать следующим образом (для глюонного пропагатора выберем диагональную калибровку):

$$\begin{aligned}
 \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle &= i\delta^{ab} g_{\mu\nu} \square^{-1}(x-y) \equiv \text{diagram with two points } x \text{ and } y \text{ connected by a wavy line}, \\
 \langle \bar{c}(x) c(y) \rangle &= i\delta^{ab} \square^{-1}(x-y) \equiv \text{diagram with two points } x \text{ and } y \text{ connected by a straight line with an arrow from } x \text{ to } y, \\
 \langle \sigma_{\mu\nu}^a(x) \sigma_{\rho\lambda}^b(y) \rangle &= \frac{i}{4} \delta^{ab} [g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}] \delta(x-y) \equiv \text{diagram with two points } x \text{ and } y \text{ connected by a double line}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для дальнейшего рассмотрения условие симметрии (4) удобно представить в “токовой” форме (доказательство эквивалентности этих двух форм записи вынесено в приложение):

$$T_{\text{reg}} \left\{ \Delta'_1 + \Delta''_1 - \Delta_1 + 2\Delta_\sigma + \Delta'_c + \Delta''_c - \Delta_c \right\} e^s = 0. \tag{7}$$

Здесь токи Δ_i заданы формулами

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &\equiv \Delta_1(\square_\perp \tilde{A}, A, \hat{c}) = -ig \int dx \left(\square_\perp^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu \right) \cdot (A_\mu \times \hat{c}) \equiv \text{diagram with a wavy line labeled } \square_\perp \tilde{A}, \text{ a triangle with vertices } 1, 1', \text{ and } A, \text{ and a horizontal line labeled } \hat{c}, \\
 \Delta'_1 &\equiv \Delta'_1(\square \hat{A}, A, \tilde{c}) = -ig \int dx \left(\square \hat{A}_\mu \right) \cdot (A_\mu \times \tilde{c}) \equiv \text{diagram with a wavy line labeled } \square \hat{A}, \text{ a triangle with vertices } 1, 1', \text{ and } A, \text{ and a horizontal line labeled } \tilde{c}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1'' &\equiv \Delta_1''(-\partial(\partial\hat{A}), A, \check{c}) = ig \int dx \partial_\mu (\partial_\nu \hat{A}_\nu) \cdot (A_\mu \times \check{c}) \equiv \text{---}\partial(\partial\hat{A})\text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1'' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} , \\
\Delta_c &\equiv \Delta_c(\partial\check{c}, c, \hat{c}) = -ig \int dx \partial_\mu \check{c} \cdot (c \times \partial_\mu \hat{c}) \equiv \begin{array}{c} \nearrow c \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \partial\check{c} \text{---} , \\
\Delta_\sigma &\equiv \Delta_\sigma(\hat{\sigma}, A, \partial\check{c}) = -ig \int dx \hat{\sigma}_{\mu\nu} \cdot (A_\nu \times \partial_\mu \check{c}) \equiv \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \partial\check{c} \text{---} , \\
\Delta_c' &\equiv \Delta_c'(-\square\hat{c}, c, \check{c}) = ig \int dx \square\hat{c} \cdot (c \times \check{c}) \equiv \begin{array}{c} \nearrow c' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} , \\
\Delta_c'' &\equiv \Delta_c''(-\partial\hat{c}, \partial c, \check{c}) = ig \int dx \partial_\mu \hat{c} \cdot (\partial_\mu c \times \check{c}) \equiv \begin{array}{c} \nearrow c'' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} .
\end{aligned} \tag{8}$$

“Крышка” над полем обозначает, что оно непременно участвует в спаривании под знаком T -произведения, а “перевернутая крышка”, как и выше, — что, напротив, поле не участвует в спариваниях и всегда выступает в качестве внешнего “хвоста”.

Такой способ записи тождества (4) позволит нам развить графическую символику, в терминах которой проверка тождеств Уорда в регуляризованной теории может быть проведена на графическом уровне, без обращения к явным выражениям, соответствующим той или иной диаграмме. В процессе такой проверки будут использоваться несколько ключевых соотношений, которые связывают между собой различные токи, спаренные валентным “хвостом” (полем с “крышкой”) с вершинами s_1 , s_c или s_σ ; эти ключевые соотношения также допускают графическое представление.

В графической форме тождество (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
T_{\text{reg}} \left\{ \begin{array}{l} \text{---}\partial(\partial\hat{A})\text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1'' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} \\ + \quad \text{---}\square\hat{A}\text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} \\ - \quad \text{---}\square\perp\hat{A}\text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \hat{c} \text{---} \\ + \quad \text{---}\partial\hat{c}\text{---} \begin{array}{c} \nearrow c'' \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \check{c} \text{---} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{array}{c} \text{---} \square \hat{c} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow c' \end{array} \text{---} \check{c} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{---} \hat{\sigma} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \searrow \sigma \end{array} \text{---} \partial \check{c} \end{array} - \\
 & - \begin{array}{c} \text{---} \partial \check{c} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow c \end{array} \text{---} \partial \hat{c} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{---} \square \hat{c} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow c' \end{array} \text{---} \check{c} \end{array}} \right\} e^s = 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Отметим, что в левую часть соотношения (9) входят два типа слагаемых: одни порождают стянутую линию (те, которые содержат факторы $\hat{\sigma}$, $\square \hat{A}$ и $\square \hat{c}$), а другие – нет. Соответственно компенсации будут двух типов – локальные и нелокальные. Мы будем рассматривать те и другие по отдельности. Механизмы этих компенсаций будут описаны в пунктах 2 и 3. В пункте 4 будет сформулирован рецепт регуляризации, который обеспечивает поперечность поляризационного оператора (это будет установлено в пункте 5).

2. МЕХАНИЗМ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОМПЕНСАЦИЙ

Анализ нелокальных компенсаций основан на следующих трех ключевых соотношениях (здесь и ниже мы будем пользоваться почти исключительно графическим языком без обращения к явному выражению, соответствующему той или иной диаграмме):

$$\begin{array}{c} \text{---} s_1 \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \partial(\partial \hat{A}) \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1'' \\ \searrow 1 \end{array} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \square \perp A \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow 1 \end{array} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} s_c \text{---} \end{array}, \quad (10)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \partial \check{c} \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \partial(\partial \hat{A}) \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1'' \\ \searrow 1 \end{array} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \partial \check{c} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow c \end{array} \text{---} \partial c \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} s_c \text{---} \end{array}, \quad (11)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} s_\sigma \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \partial(\partial \hat{A}) \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow 1'' \\ \searrow 1 \end{array} \text{---} \end{array} = 2 \begin{array}{c} \text{---} \hat{\sigma} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \nearrow \sigma \\ \searrow \sigma \end{array} \text{---} \partial c \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} s_c \text{---} \end{array}. \quad (12)$$

Эти соотношения доказываются непосредственным вычислением. При этом не требуется использовать ничего, кроме интегрирования по частям. Следовательно, доказательство пройдет и в том случае, когда выражения в обеих частях равенств (10)–(12) “погружены вглубь диаграммы”. Поэтому, если интегрирование по частям допускается нашей регуляризацией, то эти базовые соотношения остаются верными и в регуляризованной теории.

Перепишем равенство (10), разбив ток Δ_1 в правой части на три слагаемых:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \\
 & \text{Diagram 1: } s_1 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow \text{triangle } 1'' \rightarrow \text{wavy} \rightarrow s_c \\
 & \text{Diagram 2: } s_1 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow \text{triangle } 1'' \rightarrow \text{wavy} \rightarrow s_c \\
 & \text{Diagram 3: } s_1 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow \text{triangle } 1' \rightarrow \text{wavy} \rightarrow s_c \\
 & \text{Diagram 4: } s_1 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow \text{triangle } 1 \rightarrow \text{wavy} \rightarrow s_c \\
 & \text{Diagram 5: } s_1 \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow \text{triangle } 1 \rightarrow \text{wavy} \rightarrow s_c
 \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) означает, что ток Δ_1'' является “подвижным”, т.е. может двигаться по диаграмме, составленной из вершин s_1 . Воздействуя на вершину s_1 , он, во-первых, воспроизводит самого себя (с единственным изменением – “короткий” внешний “хвост” $\check{c}$

заменяется “удлиненным хвостом” $\check{c}^{(1)} = \text{Diagram}$), а во-вторых, порождает два других тока: $\Delta_1(\square_{\perp}\check{A}, A, \check{c}^{(1)})$ и $\Delta_1'(\square\hat{A}, A, \check{c}^{(1)})$. Первый из этих двух токов сокращается с аналогичным слагаемым, порожденным членом $-\Delta_1(\square_{\perp}\check{A}, A, \hat{c})$ в симметричном соотношении (9), а второй содержит фактор $\square\hat{A}$, т.е. порождает “схлопнутую” линию и участвует в локальных компенсациях (которые будут рассмотрены ниже). Далее ситуация повторяется: ток $\Delta_1''(-\partial(\partial\hat{A}), A, \check{c}^{(1)})$, действуя на следующую вершину s_1 , производит три члена: $\Delta_1(\square_{\perp}\check{A}, A, \check{c}^{(2)})$, $\Delta_1'(\square\hat{A}, A, \check{c}^{(2)})$ и $\Delta_1''(-\partial(\partial\hat{A}), A, \check{c}^{(2)})$, где

$\check{c}^{(2)} = \text{Diagram}$. Первый сокращается опять со слагаемым, порожденным током $-\Delta_1(\square_{\perp}\check{A}, A, \hat{c})$ в симметричном соотношении (9), второй участвует в локальных компенсациях, а третий снова повторяет процесс. Так продолжается до тех пор, пока ток $\Delta_1''(-\partial(\partial\hat{A}), A, \check{c}^{(k)})$ не встретит на своем пути вершины s_{σ} или s_c . Первый вариант описывается равенством (12). Соответствующий член участвует в локальных компенсациях. Что касается вершины s_c , то здесь возможны четыре случая:

а) вершина s_c произведена током Δ_1'' и лежит в начале его траектории (иначе говоря, траектория тока Δ_1'' является замкнутой и он, описав петлю по диаграмме, возвращается в исходную точку);

б) вершина s_c также произведена током Δ_1'' , но не является начальной точкой его траектории (т.е. эта траектория замкнута, но в отличие от случая “а” имеет самопересечение не в начальной точке, а в какой-то другой);

в) вершина s_c не произведена током Δ_1'' (т.е. траектория его не замкнута), а принадлежит замкнутой гостовой цепи, которая является “родной” для данной диаграммы;

г) вершина s_c также не произведена током Δ_1'' , но относится теперь к незамкнутой гостовой цепи.

Рассмотрим случай “а”. Ему соответствует диаграмма

$$(14)$$

(здесь опущены все члены типа $\Delta_1(\square_{\perp}\check{A}, A, \check{C}^{(k)})$ и $\Delta'_1(\square\hat{A}, A, \check{C}^{(k)})$); жирная линия со стрелкой показывает траекторию тока Δ''_1 . Пользуясь базовым соотношением (11), эту диаграмму можно представить в виде

$$(15)$$

Она сокращается с такой же диаграммой, порожденной током $\Delta''_c(-\partial\hat{c}, c, \check{c})$ в симметричном соотношении (9), поскольку они совпадают графически, но отличаются знаком (знак минус перед последним током).

Рассмотрим теперь случай “б”. Траектория тока Δ''_1 представляет собой “мягкий

знак”:

(16)

Используя соотношение (11), эту диаграмму можно представить в следующем виде:

(17)

Эта диаграмма сокращается (с точностью до членов, участвующих в локальных компенсациях) с аналогичной диаграммой, соответствующей случаю “в”, которая выгля-

лит так же, как диаграмма в левой части (16), но имеет вместо глюонной петли гостовую:

Представив здесь ток Δ_c в виде суммы $\Delta'_c + \Delta''_c$, получим

Очевидно, второе слагаемое в правой части (19) равно по величине диаграмме (17), но имеет противоположный знак. Поэтому в сумме два этих выражения дают ноль. Первое же слагаемое содержит фактор $\square \widehat{c}$ (т.е. порождает “схлопнутую” линию) и участвует в локальных компенсациях.

Рассмотрим теперь случай “г”. Здесь возможны три ситуации: рассматриваемая вершина лежит в начале рассматриваемой гостовой цепи (слово “начало” условно и означает здесь лишь начало по отношению к направлению стрелки на гостовой линии, не путать с началом траектории тока Δ_1''), т.е. содержит внешнее поле антигоста, в середине гостовой цепи и в конце ее (т.е. имеет внешний хвост – гостовое поле). Первая ситуация описывается диаграммой

$$(20)$$

которую, пользуясь соотношением (11), можно представить в следующей форме:

$$(21)$$

Она сокращается с диаграммой, произведенной последним слагаемым в симметричном

соотношении (9):

$$(22)$$

Вторая ситуация, когда ток Δ_1'' приходит к вершине s_c , лежащей в середине гостовой цепи, описывается следующей диаграммой:

$$(23)$$

Партнер по сокращению для нее берется из похожей диаграммы, в которой кусок гостовой цепи, лежащий справа от рассматриваемой вершины s_c , и траектория тока Δ_1'' как

бы поменялись местами:

$$=$$

$$=$$
(24)

Представим ток Δ_c в правой части равенства (24) в виде суммы токов Δ'_c и Δ''_c . Слагаемое, отвечающее току Δ''_c , сокращается с диаграммой (23), а оставшаяся диаграмма с током Δ'_c участвует в локальных компенсациях.

Что же касается третьей ситуации, когда ток Δ''_1 приходит к вершине в конце гостевой цепи, то здесь механизм сокращений тот же, что и во втором случае, только ток Δ''_c берется непосредственно из левой части симметричного соотношения (9).

Подведем некоторые итоги. Во-первых, нелокальные компенсации осуществляются между диаграммами одинаковой топологии. Во-вторых, как мы видели, для нелокальных компенсаций требуется лишь интегрирование по частям. Поэтому, чтобы нелокальные компенсации осуществлялись и в регуляризованной теории, регуляризация должна обеспечивать возможность интегрирования по частям.

После нелокальных компенсаций остались лишь члены, содержащие факторы $\square\hat{A}$, $\square\hat{c}$, $\hat{\sigma}$. Все они участвуют в локальных компенсациях, к рассмотрению которых мы и переходим.

3. МЕХАНИЗМ ЛОКАЛЬНЫХ КОМПЕНСАЦИЙ. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Локальными компенсациями мы называем сокращения диаграмм, содержащих в качестве одной из вершин токи Δ'_1 , Δ'_c или Δ_σ . Эти токи содержат факторы $\square\hat{A}$, $\square\hat{c}$ либо

$\hat{\sigma}$, которые стягивают линию диаграммы в точку и преобразуют две тройные вершины в одну четверную. Это соответствует нелинейной части БРСТ-вариации действия, и, как известно, для сокращения таких членов требуется применить тождество Якоби.

При проверке БРСТ-инвариантности действия Янга–Миллса тождество Якоби используется для доказательства равенства нулю трех групп слагаемых: во-первых, суммы нелинейной БРСТ-вариации вершины s_1 и линейной вариации четверной вершины $-\frac{ig^2}{4}(A_\mu \times A_\nu) \cdot (A_\mu \times A_\nu)$; во-вторых, нелинейной вариации гостового лагранжиана и, в-третьих, нелинейной БРСТ-вариации четверной глюонной вершины. Поскольку условие (9) получается из БРСТ-инвариантности действия (см. [3, 2]), то при его проверке также возникают аналогичные группы.

Первая группа состоит из двух слагаемых:

$$+ 2 \quad \text{[Diagram 2]} \quad (25)$$

Эти диаграммы получаются при движении тока Δ_1'' по незамкнутой траектории. Обозначив через $\check{C}$ “длинную” гостовую цепь

$$\rightarrow \text{[Diagram 3]} \rightarrow ,$$

перепишем сумму (25):

$$+ 2 \quad \text{[Diagram 4]} \quad (26)$$

(Гостовая цепь может иметь различную длину; в частности, она может просто совпадать с гостовым полем $\check{C}$. Это соответствует тому, что токи Δ_1' и Δ_σ в формулах (25) и (26) – это токи, стоящие непосредственно в симметричном соотношении (9), а не произведенные током Δ_1'' при его движении.) Выражение (26) в координатном представлении имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} & (A_\mu \times \partial_\mu A_\nu) \cdot (A_\nu \times \check{C})(x) + (\partial_\mu A_\nu \times A_\nu) \cdot (A_\mu \times \check{C})(x) + \\ & + (A_\mu \times A_\nu) \cdot (\partial_\mu A_\nu \times \check{C})(x). \end{aligned} \quad (27)$$

Если считать все глюонные поля внешними, то выражение (27) обращается в ноль в силу тождества Якоби.

Рассмотрим подробнее, что происходит, когда весь блок (26) вместе с множителем e^S помещен под знак T -произведения. При этом получатся диаграммы, которые (в трилинейной формулировке) будут иметь различную топологию, и только сумма этих диаграмм даст ноль. Отдельные же диаграммы со вставками (26) в ноль не обращаются.

Действительно, в импульсном представлении блоку (26) соответствует выражение

$$\begin{aligned} & (A_\mu(k_1) \times k_2^\mu A_\nu(k_2)) \cdot (A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (k_1^\mu A_\nu(k_1) \times A_\nu(k_2)) \cdot (A_\mu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (A_\nu(k_1) \times A_\mu(k_2)) \cdot (k_3^\mu A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + (k_1 \leftrightarrow k_2), \end{aligned} \quad (28)$$

где $A_\mu(k_i)$ обозначают глюонные “хвосты”, возможно, спаренные с другими глюонными полями из e^S . Оно, разумеется, нулю не равно. Чтобы получить ноль, мы должны учесть все варианты спариваний глюонных полей, которые осуществляются под знаком T -произведения. Таких вариантов три, и графически их можно представить следующим образом:

$$= 0 \quad (29)$$

(здесь мы символом обозначили весь блок (26) целиком). В импульсном представлении трем диаграммам (29) соответствуют 18 слагаемых, которые в сумме уже дают ноль:

$$\begin{aligned} & (A_\mu(k_1) \times k_2^\mu A_\nu(k_2)) \cdot (A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (k_1^\mu A_\nu(k_1) \times A_\nu(k_2)) \cdot (A_\mu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (A_\nu(k_1) \times A_\mu(k_2)) \cdot (k_3^\mu A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (A_\mu(k_2) \times k_1^\mu A_\nu(k_1)) \cdot (A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (k_2^\mu A_\nu(k_2) \times A_\nu(k_1)) \cdot (A_\mu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (A_\nu(k_2) \times A_\mu(k_1)) \cdot (k_3^\mu A_\nu(k_3) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (A_\mu(k_1) \times k_3^\mu A_\nu(k_3)) \cdot (A_\nu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \\ & + (k_1^\mu A_\nu(k_1) \times A_\nu(k_3)) \cdot (A_\mu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (A_\nu(k_1) \times A_\mu(k_3)) \cdot (k_2^\mu A_\nu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\mu(k_3) \times k_1^\mu A_\nu(k_1)) \cdot (A_\nu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (k_3^\mu A_\nu(k_3) \times A_\nu(k_1)) \cdot (A_\mu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\nu(k_3) \times A_\mu(k_1)) \cdot (k_2^\mu A_\nu(k_2) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\mu(k_3) \times k_2^\mu A_\nu(k_2)) \cdot (A_\nu(k_1) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (k_3^\mu A_\nu(k_3) \times A_\nu(k_2)) \cdot (A_\mu(k_1) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\nu(k_3) \times A_\mu(k_2)) \cdot (k_1^\mu A_\nu(k_1) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\mu(k_2) \times k_3^\mu A_\nu(k_3)) \cdot (A_\nu(k_1) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (k_2^\mu A_\nu(k_2) \times A_\nu(k_3)) \cdot (A_\mu(k_1) \times \check{C}(k_4)) + \\
 & + (A_\nu(k_2) \times A_\mu(k_3)) \cdot (k_1^\mu A_\nu(k_1) \times \check{C}(k_4)) = 0
 \end{aligned} \tag{30}$$

в силу тождества Якоби для структурных констант.

Учет всех вариантов спариваний, т.е. трех диаграмм (29), можно трактовать графически как “перекладывание” средней “схлопнутой” линии. Поскольку “схлопнутой” может оказаться любая линия, то для обращения в ноль регуляризованных диаграмм, получающихся вставкой блока (26), требуется, чтобы регуляризация обеспечивала перекладывание всех внутренних линий всех диаграмм.

Перейдем теперь к компенсациям диаграмм, возникающих при движении тока Δ_1'' по замкнутой траектории. Пусть она заканчивается не в начальной точке, а где-то в промежуточной. Это соответствует сокращению нелинейной вариации гостовой вершины по глюонному “хвосту” и вариации той же вершины по гостовому “хвосту”. Все, что было сказано выше о необходимости перекладывания линий в диаграммах, участвующих в локальных компенсациях, полностью относится и к данному случаю. Однако здесь это перекладывание осуществляется несколько по-другому, а именно, за счет суммирования “неродственных” диаграмм. Точнее, нулю равна сумма следующих трех блоков:

$$= 0. \tag{31}$$

гии:

В силу равенства (31) сумма этих трех диаграмм равна нулю.

Если же ток Δ_1'' описал замкнутую петлю по диаграмме и вернулся в исходную точку, то получилась диаграмма, аналогичная диаграмме (32), но без “длинной” гостовой цепи. Эта диаграмма сокращается с двумя другими, которые порождаются токами $\Delta_1'(\square\hat{A}, A, \check{c})$ и $\Delta_c'(-\square\hat{c}, c, \check{c})$, содержащимися в левой части симметричного соотношения (9); механизм этой компенсации также дается формулой (31).

Рассмотрим теперь случай, когда ток Δ_1'' дошел до вершины s_c , принадлежащей незамкнутой гостовой цепи (предположим вначале, что эта вершина не инцидентна внешнему гостовому хвосту). Механизм локальных компенсаций дается также формулой (31); ток Δ_c' остался после нелокальных компенсаций (см. формулу (24)):

Два других слагаемых, содержащие ток Δ'_1 , образуются при движении тока Δ''_1 по следующим двум траекториям:

и

(36)

Если же рассматриваемая вершина s_c имеет внешний гостовой хвост, то происхождение токов иное: один ток Δ'_1 образовался при движении тока Δ''_1 по незамкнутой траектории до рассматриваемой вершины, а второй ток Δ'_1 и ток Δ'_c берутся непосредственно из левой части симметричного соотношения (9).

Наконец, последний тип локальных компенсаций соответствует обращению в ноль нелинейной БРСТ-вариации четверной глюонной вершины. На нашем языке это эквивалентно тому, что ток Δ'_1 “садится” на вершину s_σ . Легко видеть, что равна нулю сумма четырех диаграмм:

+

$$+ \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} = 0. \quad (37)$$

Действительно, сумме четырех диаграмм (37) соответствует (с точностью до множителя ig^3) аналитическое выражение

$$\begin{aligned} & ((A_\mu(k_1) \times A_\nu(k_2)) \times A_\mu(k_3)) \cdot (A_\nu(k_4) \times \mathbb{C}(p)) + \\ & + ((A_\mu(k_2) \times A_\nu(k_1)) \times A_\mu(k_4)) \cdot (A_\nu(k_3) \times \mathbb{C}(p)) + \\ & + ((A_\mu(k_4) \times A_\nu(k_3)) \times A_\mu(k_2)) \cdot (A_\nu(k_1) \times \mathbb{C}(p)) + \\ & + ((A_\mu(k_3) \times A_\nu(k_4)) \times A_\mu(k_1)) \cdot (A_\nu(k_2) \times \mathbb{C}(p)), \end{aligned} \quad (38)$$

равное нулю в силу тождества Якоби. Это можно трактовать следующим очевидным образом: вариация четверной глюонной вершины, составленной из двух вершин s_σ , по всем четырем глюонным “хвостам” равна нулю. Тем самым осуществляется симметризация по глюонным “хвостам”, которая в нерегуляризованной теории осуществляется при помещении этой вариации под знак T -произведения.

Итак, мы рассмотрели все слагаемые, появляющиеся в левой части симметричного соотношения (9), и для каждого слагаемого нашли партнеров по сокращениям. Тем самым рассмотрены все механизмы компенсаций, как нелокальных, так и локальных. Рассмотрим теперь, как можно применять описанную технику.

4. РЕЦЕПТ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Перейдем теперь к формулировке рецепта регуляризации двухпетлевых диаграмм. Поскольку он во многом аналогичен рецепту из работы [1], то мы будем использовать терминологию и обозначения оттуда, не оговаривая этого особо. Далее φ_i обозначает любое из полей A_μ , c , $\bar{c}$, $\sigma_{\mu\nu}$, D_{ij} – любой из пропагаторов этих полей, а s_i – любую из вершин теории Янга–Миллса в “трилинейной” формулировке либо один из токов, фигурирующих в левой части симметричного соотношения (9) (данные токи также являются трилинейными вершинами). Отметим, что в однопетлевом приближении данный рецепт совпадает с рецептом из работы [5].

1. Оператор T_{reg} определен на всех произведениях вершин s_i типа φ^3 и по линейности на произвольных функционалах $\Phi(\varphi)$, которые зависят от полей лишь через такие вершины.

2. Оператор T_{reg} , действуя на произведение вершин $s_1 s_2 \dots s_n$ типа φ^3 , преобразует его в диаграммы Фейнмана (графически те же самые, что и в нерегуляризованной теории), в которых нетривиальной регуляризации подвергнуты только сильносвязные блоки этих диаграмм. Несвязные и слабосвязные диаграммы строятся из сильносвязных по обычным правилам (с помощью стандартных, неискаженных пропагаторов полей).

3. В однопетлевом приближении оператор T_{reg} совпадает с регуляризующим оператором, описанным в работе [1].

4. Все регуляризованные сильносвязные двухпетлевые диаграммы получаются в результате “раскраски” единственного скелета:

Перенумеруем линии этого скелета и по линиям с номерами 1, 2, 3 пустим импульсы q_1, q_2, q_3 , соответственно (понятно, что сумма этих трех импульсов равна нулю). Каждой линии сопоставим “мягкую массу” $\mu_i, i = 1, 2, 3$. Выберем весовую функцию $\rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, имеющую носитель в области $\mu_i > 0$, симметричную по своим аргументам и удовлетворяющую соотношениям

$$\int d\mu_1 \rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0, \quad \dots, \quad \int d\mu_1 (\mu_1^2)^N \rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = 0 \quad (39)$$

для некоторого $N > 2$.

Чтобы получить реальные диаграммы, скелет необходимо “раскрасить”. “Раскраска” скелета полностью аналогична соответствующей процедуре работы [1]. Напомним, что произведение $s_1 s_2 \dots s_n$ состоит лишь из трилинейных вершин.

5. Чтобы “раскрасить” данный скелет, имеющий две вершины, нужно:

а) на его внутренних линиях всеми возможными различными способами разместить $n - 2$ двойные вершины;

б) всеми возможными различными способами пририсовать к этим двойным вершинам внешние пунктирные “хвосты” (напомним, что скелеты также изображаются пунктиром). В результате получатся диаграммы теории φ^3 , имеющие $n - 2$ внешние линии;

в) пунктирные внутренние линии каждой полученной диаграммы всеми возможными различными способами преобразовать в линии, отвечающие пропагаторам D_{ij} , а внешние — в линии, отвечающие полям φ_i . Из полученной совокупности диаграмм нужно исключить все “абсурдные” диаграммы (т.е. диаграммы, не согласованные с правилами Фейнмана для произведения $s_1 s_2 \dots s_n$).

6. В полученных диаграммах выберем такую конфигурацию импульсов, чтобы по каждой линии диаграммы протекал тот же внутренний импульс q_l , что и по “породившей” ее линии скелета, плюс некоторая линейная комбинация внешних импульсов.

Напишем в импульсном представлении выражения, соответствующие всем возникшим так диаграммам. В силу скалярности функционала $T_{\text{reg}}(s_1 s_2 \dots s_n)$ внутренние импульсы q_l^ν свернуты по индексу ν с каким-либо вектором или тензором, т.е. входят лишь в комбинациях типа $q_n^2, (q_n \cdot q_j), (q_n \cdot p)$ (здесь p — внешний импульс), $(q_l \cdot A^a(p))$ (здесь $A(p)$ — фурье-образ внешнего глюонного поля) и т.п. В подынтегральном выражении произведем “удлинение” внутренних импульсов, которое включает в себя:

а) “удлинение” квадратов импульсов, т.е. замену

$$q_l^2 \rightarrow q_l^2 - \mu_l^2, \quad l = 1, 2, 3; \quad (40)$$

б) “удлинение” скалярных произведений внутренних импульсов:

$$\begin{aligned}(q_1 \cdot q_2) &\rightarrow (q_1 \cdot q_2) + \frac{1}{2} \{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2\}, \\(q_1 \cdot q_3) &\rightarrow (q_1 \cdot q_3) + \frac{1}{2} \{\mu_1^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2\}, \\(q_2 \cdot q_3) &\rightarrow (q_2 \cdot q_3) + \frac{1}{2} \{\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2\}.\end{aligned}\tag{41}$$

Тем самым в подынтегральное выражение вводятся “мягкие” массы μ_l^2 , $l = 1, 2, 3$. Регуляризация окончательно достигается посредством интегрирования (до интегрирования по внутренним импульсам) полученного выражения по “мягким массам” с весовой функцией $\rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$. Снятие регуляризации достигается переходом к пределу $\rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \rightarrow \delta(\mu_1)\delta(\mu_2)\delta(\mu_3)$ в смысле обобщенных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует подчеркнуть, что “удлинению” подлежат лишь внутренние импульсы q_1, q_2, q_3 . Внешние импульсы, соответствующие внешним “хвостам”, не “удлиняются”.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как и ранее, графически одинаковые диаграммы, полученные в результате различных вариантов “раскраски” скелета, но отличающиеся друг от друга различной конфигурацией внутренних импульсов, должны входить в ответ с одинаковыми коэффициентами, причем сумма этих коэффициентов должна быть равна стандартному комбинаторному коэффициенту обычной теории возмущений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. “Удлинение” скалярных произведений внутренних импульсов, описываемое формулами (41), требуется для того, чтобы обеспечить выполнение в каждой вершине закона сохранения импульса после “удлинения” квадратов импульсов. Если его не производить, то равенство $q_1 + q_2 + q_3 = 0$, выражающее закон сохранения импульса, после “удлинения” квадратов импульсов нарушится. В этом можно убедиться, просто возведя его в квадрат и произведя замену (40). Если же “удлинять” не только квадраты, но и скалярные произведения, то это равенство сохранится.

Заметим, что описанное “удлинение” импульсов по формулам (40) и (41) можно реализовать, заменяя 4-мерные внутренние импульсы q_l на d -мерные импульсы $\tilde{q}_l$ достаточно высокой размерности, первые четыре компоненты которых совпадают с компонентами q_l , а старшие компоненты $q_l^\perp$ составлены из масс μ_l так, чтобы квадраты и скалярные произведения импульсов $\tilde{q}_l$ воспроизводили правые части формул (40) и (41). В двухпетлевом скелете всего три внутренних импульса, q_1, q_2, q_3 , и старшие компоненты $q^\perp$ могут быть устроены, например, следующим образом:

$$\begin{aligned}q_1^\perp &= \left(\sqrt{\frac{1}{2} [\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2]}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2} [\mu_1^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2]} \right), \\q_2^\perp &= \left(-\sqrt{\frac{1}{2} [\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2]}, -\sqrt{\frac{1}{2} [\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2]}, 0 \right), \\q_3^\perp &= \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2} [\mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2]}, \sqrt{\frac{1}{2} [\mu_1^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2]} \right).\end{aligned}$$

Несложно проверить, что формулы (40) и (41) воспроизводятся и, кроме того, сумма “длинных” импульсов равна нулю: $\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 = 0$. Поскольку всегда можно считать, что “удлинение” импульсов происходит именно таким способом, то тем самым доказано, что после “удлинения” сумма импульсов, входящих в вершину, по-прежнему равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как уже говорилось, в работе [2] было доказано, что любой оператор T_{reg} из класса операторов, построенных в [1], сохраняет калибровочную инвариантность в абелевых теориях. При доказательстве существенно использовались три базовых свойства этого оператора, а именно: коммутативность оператора T_{reg} и вариационного дифференцирования по полям, свойство “редукции пропагатора” и возможность дифференцирования по частям под знаком T_{reg} (они были доказаны в [1] путем несложных рассуждений). Аналогичные рассуждения показывают, что только что построенный оператор T_{reg} обладает всеми этими базовыми свойствами (выполнимость последнего свойства связана как раз с законом сохранения импульса, о котором шла речь в предыдущем замечании).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В результате “раскраски” скелета может получиться, что чисто внутренней линии, не инцидентной внешней вершине, соответствует δ -образный пропагатор. В этом случае после “удлинения” импульсов соответствующая масса не входит в знаменатель подынтегрального выражения, отвечающего данной диаграмме. Вследствие этого после интегрирования с весовой функцией $\rho(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ все выражение обращается в ноль в силу условий (39). Это обстоятельство будет в дальнейшем очень интенсивно использоваться.

5. ИНВАРИАНТНОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ТЕОРИИ

В настоящем пункте мы покажем, что оператор T_{reg} обеспечивает поперечность поляризационного оператора в двухпетлевом приближении. Для этого мы установим, что регуляризация не нарушает (с некоторыми оговорками) действие механизмов компенсаций.

Как уже говорилось выше, оператор T_{reg} допускает возможность интегрирования по частям. Поскольку для нелокальных компенсаций ничего другого не требуется, то все нелокальные компенсации имеют место и в регуляризованной теории.

Что же касается механизма локальных компенсаций, то он работает, если регуляризующий оператор обладает дополнительным важным свойством – если он обеспечивает перекладывание всех внутренних линий диаграмм. Вообще говоря, оператор T_{reg} этим свойством не обладает. Именно, чисто внутренние линии, не инцидентные вершинам с внешним “хвостом”, не перекладываются. Однако при нашем способе регуляризации все диаграммы, содержащие чисто внутреннюю “схлопнутую” линию, равны нулю. Поскольку мы ограничиваемся лишь поляризационным оператором, т.е. лишь сильносвязными диаграммами, то получаем, что ненулевые диаграммы могут содержать стянутую линию лишь тогда, когда эта линия инцидентна вершине, из которой выходит внешний “хвост”. Но все такие линии автоматически перекладываются в процессе “раскраски” скелета. В самом деле, рассмотрим фрагмент скелета, содержащий одну чисто внутреннюю вершину и один внешний “хвост”, который в процессе “раскраски” помещается на все три линии, входящие в эту вершину. Будем считать, что чисто внутренняя вершина – чисто глюонная, а внешний “хвост” – это гостовое поле $\tilde{c}(p)$. “Раскраска” дает три диаграммы:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \overleftarrow{q_1} \\ \overleftarrow{q_2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{q_3} \\ \overrightarrow{p} \end{array} + \begin{array}{c} \overleftarrow{q_1} \\ \overleftarrow{q_2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{q_3} \\ \overrightarrow{p} \end{array} + \begin{array}{c} \overleftarrow{q_1} \\ \overleftarrow{q_2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overrightarrow{q_3} \\ \overrightarrow{p} \end{array} . \quad (42)
 \end{array}$$

Но это и есть три варианта “перекладывания”, и им соответствует аналитическое выражение из 18 слагаемых, совпадающее с (30) и обращающееся в ноль. Отметим, что “удлинение” импульсов не влияет на это зануление. Действительно, в любом случае вся сумма разбивается на тройки, каждая из которых имеет один и тот же состав полей, но разные комбинации структурных констант, образующие якобиеву структуру. Поскольку эта якобиева структура (которая, естественно, равна нулю) входит общим множителем в выражение, в котором “удлиняются” импульсы, то это “удлинение” не влияет на зануление всей тройки. Тем самым установлено, что этот механизм зануления диаграмм будет работать и в регуляризованной теории.

Если считать, что внешним “хвостом” является не гостовая, а глюонная линия, то результат не изменится: все варианты “раскраски” скелета реализуют все варианты перекладывания линий, инцидентных внешним вершинам. А раз так, то вставка блока (26) под знак T -произведения в нашем случае дает ноль.

То же самое относится и к равенствам (31) и (37): в обоих случаях каждой из диаграмм в левой части соответствует одинаковая аналитическая структура, которую можно вынести за скобки, а в скобках останется билинейная комбинация структурных констант, равная нулю в силу тождества Якоби (как и ранее, стянутая линия не может быть чисто внутренней, иначе вся диаграмма обращается в ноль в силу свойств регуляризации).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку в однопетлевых диаграммах все внутренние линии инцидентны вершине, из которой выходит внешний “хвост”, то все они автоматически перекладываются при “раскраске” скелета. Поэтому все механизмы компенсаций работают и в этом случае, что обеспечивает сохранение калибровочной инвариантности регуляризованной теории в однопетлевом приближении.

Используя описанные выше механизмы компенсаций, можно показать, что регуляризованные двухпетлевые диаграммы с двумя внешними линиями, порожденные левой частью симметричного соотношения (9), действительно в сумме дают ноль. Это и означает поперечность регуляризованного поляризационного оператора. Мы не будем проводить здесь этого явного рассмотрения ввиду его громоздкости, а ограничимся лишь некоторыми комментариями.

Отметим, что для некоторых диаграмм “партнеры по перекладыванию” совпадают с самими этими диаграммами. Например, для диаграммы (вернее, для суммы диаграмм)

$$(43)$$

одним из партнеров является диаграмма

$$, (44)$$

а вторым — сама эта диаграмма (точнее, графически такая же диаграмма, в которой внутренние импульсы переставлены). Существенным является то, что диаграмм типа (43), полученных в результате раскраски, вдвое больше, чем диаграмм типа (44), так что каждая диаграмма типа (44) находит среди диаграмм типа (43) сразу двух партнеров по переключиванию, и в сумме они дают ноль.

Наконец, следует иметь в виду, что одним из партнеров по переключиванию может быть слабосвязная диаграмма-“головастик”, которая сама по себе равна нулю вследствие антисимметрии структурных констант. Например, для диаграмм

таким партнером-“головастиком” является диаграмма

Поэтому диаграммы (45) сами по себе в сумме дают ноль.

Таким образом, поляризационный оператор в регуляризованной теории действительно поперечен.

Итак, проведенная выше работа дает эффективный инструмент для анализа неагрегированных регуляризаций в теории Янга–Миллса, таких, например, как рассмотренная недавно дифференциальная регуляризация [6]. С очевидными изменениями этот метод переносится и на другие, например суперсимметричные, теории.

Что же касается “универсальных регуляризаций” в целом, то они хорошо приспособлены для моделей, в которых тождества Уорда связывают между собой диаграммы одинаковой топологии, например абелевы теории. В неабелевых же теориях, в которых тождества Уорда связывают диаграммы разной топологии, эти регуляризации могут использоваться лишь при дополнительных, часто трудно выявляемых, ограничениях на “мягкие массы”.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-147.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы получить условие (7) из тождества (4), внесем вариационные производные в левой части равенства (4) под знак оператора T_{reg} , проварируем величину e^s и с учетом явного вида s получим

$$\begin{aligned} \partial_\mu c \frac{\delta S}{\delta A_\mu} + (\square_\perp^{\mu\nu} A_\nu) \frac{\delta S}{\delta (\partial_\mu \bar{c})} = T_{\text{reg}} \left\{ -ig(\square_\perp^{\mu\nu} \hat{A}_\nu) \cdot (A_\mu \times \bar{c}) + \right. \\ \left. + (\square_\perp^{\mu\nu} \check{A}_\nu) \cdot (A_\mu \times \hat{c}) - ig\partial_\mu \hat{c} \cdot (c \times \partial_\mu \bar{c}) + ig\partial_\mu \bar{c} \cdot (c \times \partial_\mu \hat{c}) - \right. \\ \left. - 2ig\hat{\sigma}_{\mu\nu} \cdot (A_\nu \times \partial_\mu \bar{c}) - ig\partial_\mu \bar{c} \cdot (c \times \partial_\mu c) \right\} e^s = T_{\text{reg}} \left(\frac{ig}{2} \square \bar{c} \cdot (c \times c) e^s \right). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Здесь, как и ранее, “крышка” $\hat{}$ над полем обозначает, что оно непременно спаривается с величиной e^s , а “перевернутая крышка” $\check{}$ — что данное поле не участвует в хронологических спариваниях и всегда выступает в диаграммах в качестве внешнего “хвоста”; здесь и ниже интегрирование подразумевается, а знак интеграла опускается; кроме того, положено $\check{\sigma}_{\mu\nu} = 0$ (это тоже будет подразумеваться, если не оговорено противное).

Последнее слагаемое в равенстве (П.1) совпадает с функционалом в правой части, поэтому его можно перенести направо и получить там ноль. Остальные же члены запишем в виде токов:

$$\begin{aligned} -ig(\square_\perp^{\mu\nu} A_\nu) \cdot (A_\mu \times c) &\equiv \Delta_1(\square_\perp A, A, c) \equiv \text{diag}(\square_\perp \check{A}, A, c), \\ -ig\partial_\mu \bar{c} \cdot (c \times \partial_\mu c) &\equiv \Delta_c(\partial \bar{c}, c, \partial c) \equiv \text{diag}(\partial \bar{c}, c, \partial \hat{c}), \\ -ig\sigma_{\mu\nu} \cdot (A_\nu \times \partial_\mu c) &\equiv \Delta_\sigma(\sigma, A, \partial c) \equiv \text{diag}(\hat{\sigma}, A, \partial \bar{c}). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

В новых обозначениях равенство (П.1) можно переписать:

$$\begin{aligned} T_{\text{reg}} \left\{ \Delta_1(\square_\perp \hat{A}, A, \bar{c}) - \Delta_1(\square_\perp \check{A}, A, \hat{c}) + 2\Delta_\sigma(\hat{\sigma}, A, \partial \bar{c}) + \right. \\ \left. + \Delta_c(\partial \hat{c}, c, \partial \bar{c}) - \Delta_c(\partial \bar{c}, c, \partial \hat{c}) \right\} e^s = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Первое слагаемое содержит два члена. Один из них, имеющий фактор $\square_\perp \hat{A}$, порождает стянутую линию, а другой — нет. Поэтому выделим оба эти члена явно:

$$\Delta_1(\square_\perp \hat{A}, A, \bar{c}) = \Delta'_1(\square \hat{A}, A, \bar{c}) + \Delta''_1(-\partial(\partial \hat{A}), A, \bar{c}),$$

где

$$\Delta'_1(\square \hat{A}, A, \bar{c}) = -ig(\square \hat{A}_\mu) \cdot (A_\mu \times \bar{c}) \equiv \text{diag}(\square \hat{A}, A, \bar{c}),$$

$$\Delta_1''(-\partial(\partial\hat{A}), A, \check{c}) = ig\partial_\mu(\partial_\nu\hat{A}_\nu) \cdot (A_\mu \times \check{c}) \equiv \underbrace{-\partial(\partial\hat{A})}_{\text{diagram}} \quad (П.4)$$

Разобьем аналогичным образом слагаемое $\Delta_c(\partial\hat{c}, c, \check{c})$, проинтегрировав в нем по частям:

$$\Delta_c(\partial\hat{c}, c, \check{c}) = \Delta_c'(-\square\hat{c}, c, \check{c}) + \Delta_c''(-\partial\hat{c}, \partial c, \check{c}), \quad (П.5)$$

где

$$\Delta_c'(-\square\hat{c}, c, \check{c}) = ig\square\hat{c} \cdot (c \times \check{c}) \equiv \underbrace{-\square\hat{c}}_{\text{diagram}} \quad (П.6)$$

$$\Delta_c''(-\partial\hat{c}, \partial c, \check{c}) = ig\partial_\mu\hat{c} \cdot (\partial_\mu c \times \check{c}) \equiv \underbrace{-\partial\hat{c}}_{\text{diagram}} \quad (П.6)$$

Подставив все эти выражения в соотношение (П.3), получим условие симметрии (7).

Список литературы

- [1] О.И. Завьялов, А.М. Малокоостов // ТМФ. 1990. Т. 84. №1. С. 46–63.
- [2] О.И. Завьялов, А.М. Малокоостов // ТМФ. 1990. Т. 84. №2. С. 195–204.
- [3] O.I. Zavialov. Renormalized Quantum Field Theory. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [4] О.И. Завьялов, А.М. Малокоостов // ТМФ. 1990. Т. 84. №3. С. 398–410.
- [5] G. 't Hooft // Nucl.Phys. 1971. V. B33. P. 173.
- [6] О.И. Завьялов, В.А. Смирнов // ТМФ. 1993. Т. 96. №2. С. 288–301; О.И. Завьялов // ТМФ. 1994. Т. 98. №3. С. 536–543; О.И. Завьялов, Г.А. Кравцова, А.М. Малокоостов // ТМФ. 1996. Т. 107. №1. С. 64–74.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Поступила в редакцию
14.XI.1995 г.

O. I. Zavialov, A. M. Malokostov

UNIVERSAL REGULARIZATIONS. IV. COMPENSATIONS OF DIAGRAMS IN WARD IDENTITIES

On the diagram level we describe the mechanism of compensations in Ward identities for non-Abelian gauge theories. The description of this mechanism allows one to analyze the non-Lagrangian regularizations. We propose the version of regularization from the class of “universal” regularizations which keeps the gauge invariance in one-loop approximation and in two-loop approximation, at least for polarization operator.