Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Я. Арифов, Е. Н. Зинченко, А. П. Леяков, С. Н. Рощупкин, Динамика протяженных объектов и стационарная аксиально-симметричная космологическая модель, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 2, 304–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:10:22

© 2004 г.

Л. Я. Арифов*, Е. Н. Зинченко*,
А. П. Леляков*, С. Н. Рошупкин*

ДИНАМИКА ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ И СТАЦИОНАРНАЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Найдено новое точное решение, описывающее однородную стационарную аксиально-симметричную модель, которая в отличие от модели Гёделя не содержит замкнутых времениподобных линий. Получены точные решения, соответствующие движению нуль-струны во вращающейся Вселенной, и показана сильная зависимость этих решений от начальных данных. Для получения более полной информации о динамике космических струн проведены численные эксперименты, указывающие на существенное различие в поведении струн и нуль-струн при наличии глобального вращения Вселенной. Из численных решений следует, что струна совершает сложные колебания, деформируется с образованием петель и каспиев и закручивается в спираль.

Ключевые слова: аксиально-симметричная модель, вращающаяся Вселенная, струны, нуль-струны, p -браны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Доступная нам метagalактика является самой большой гравитирующей системой, и поэтому космологические наблюдения представляют значительный интерес для проверки гравитационных теорий [1]. В рамках общей теории относительности (ОТО) так называемые стандартные модели Фридмана удовлетворительным образом описывают свойства Вселенной на поздних этапах ее эволюции, но сталкиваются с рядом трудностей при рассмотрении ранних этапов [2]. Построение же космологических сценариев эволюции Вселенной на ранних этапах серьезно затрудняется отсутствием достаточного количества точной информации о происходивших в то время физических процессах.

Исследования распределения позиционных углов и поляризаций целых групп двойных радиисточников, выполненные в работах [3], свидетельствуют о существовании крупномасштабной анизотропии метagalактики. Физически такая анизотропия может интерпретироваться как глобальное вращение Вселенной. В последние годы интерес к исследованию вращения в космологии заметно усилился. В ряде работ [4]–[8] были рас-

* Таврический национальный университет, Симферополь, Украина.
E-mail: arifov@tnu.crimea.ua; tlg-zen@sf.ukrtel.net; lelyakov@tnu.crimea.ua; rsn@tnu.crimea.ua

смотрены различные интерпретации вращения метagalактики, а в монографии [9] была впервые получена формула для момента импульса материи наблюдаемой Вселенной. Особый интерес представляет изучение роли вращения в космологии на основе современной теории гравитации. Укажем здесь на построение новых космологических моделей с вращением [10], исследование возможной скорости вращения Вселенной [4], [6], [7], поиск эффектов во Вселенной с вращением [11], изучение кручения в космологии с вращением [6], а также на струнные космологические модели [12].

Космические струны, являющиеся одномерными областями концентрации плотности энергии, могут естественно возникать [13] в результате спонтанного нарушения симметрии при фазовых переходах в процессе эволюции Вселенной. В рамках различных моделей Теории Великого Объединения они проявляются как топологические дефекты (наряду с доменными стенками и монополями) и поэтому представляют собой устойчивые образования. Среди этих структур именно космические струны вызывают повышенный интерес, поскольку обладают характеристиками, позволяющими рассматривать их в качестве зародышей для тех неоднородностей плотности вещества в ранней Вселенной, которые обуславливают последующее образование галактик и скоплений галактик.

На современном этапе развития теории космических струн на первый план выступают задачи, связанные с исследованием динамики струн в искривленных пространствах и поиском эффектов, которые могли бы служить надежной основой для обнаружения космических струн во Вселенной. Возможное существование космических струн не противоречит наблюдениям реликтового излучения. Более того, не исключено, что такие объекты существуют и в современную эпоху и могут быть наблюдаемы [14].

Настоящая работа посвящена двум задачам. Во-первых, находится точное решение, описывающее стационарную аксиально-симметричную космологическую модель. Во-вторых, изучается динамика струн и нуль-струн в этой модели.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 рассматривается постановка задачи и приводится решение уравнений Эйнштейна, описывающее стационарную однородную аксиально-симметричную модель. Показывается, что решение Гёделя соответствует специальному выбору констант интегрирования в этом решении. На основе данных о поведении искомых функций в малой окрестности оси вращения найдено новое точное решение, описывающее однородную стационарную аксиально-симметричную модель, не содержащую замкнутых времениподобных линий. В разделе 3 получены уравнения движения и связи, описывающие динамику нуль- p -бран в псевдоримановых пространствах. Эти уравнения использованы для нахождения точных решений, описывающих движение нуль-струн в космологической модели, приведенной в разделе 2. Раздел 4 посвящен численному моделированию движения струн и нуль-струн в аксиально-симметричной космологической модели. Показано, что наложение собственных колебаний струны на глобальное вращение приводит к сложному характеру движения струны, при котором на струне образуются петли и каспоиды. В приложении 1 исследуется поведение метрических функций в окрестности оси вращения. Приложение 2 посвящено нахождению точного решения уравнений Эйнштейна для стационарной аксиально-симметричной космологической модели.

2. СТАЦИОНАРНАЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Положим, что усредненное вещество является идеальной жидкостью и описывается распределением массы (энергии) μ и полем скоростей U^α , а давление P задается локальным уравнением состояния. Будем считать, что движение вещества является чисто вращательным, и аксиальная симметрия обусловлена только вращением вещества. Выберем в качестве координат время $t(=x^0)$, азимутальный угол $\varphi(=x^2)$ и обозначим остальные две координаты через $r(=x^1)$ и $z(=x^3)$. Линия $t = \text{const}$, $r = 0$ является осью вращения. Тогда поле скоростей может быть представлено в виде

$$U^\alpha = \{U^0, 0, U^2, 0\}. \quad (1)$$

Из стационарности и аксиальной симметрии следует, что

$$\partial_t g_{\alpha\beta} = \partial_\varphi g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t \mu = \partial_t U^\alpha = \partial_\varphi \mu = \partial_\varphi U^\alpha = 0, \quad (3)$$

а квадратичная форма пространства-времени инвариантна относительно одновременной инверсии [15] $t \rightarrow -t$, $\varphi \rightarrow -\varphi$. Поэтому

$$g_{01} = g_{03} = g_{12} = g_{23} = 0. \quad (4)$$

Положим, наконец, что дифференциальное вращение в направлении оси вращения отсутствует. Тогда

$$\partial_z g_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_z \mu = \partial_z U^\alpha = 0, \quad (5)$$

а квадратичная форма инвариантна относительно инверсии $z \rightarrow -z$. Поэтому

$$g_{13} = 0. \quad (6)$$

Квадратичную форму теперь можно без ограничения общности привести к виду

$$ds^2 = -b^2 dt^2 + 2\Phi dt d\varphi + dr^2 + b^{-2}(A^2 - \Phi^2) d\varphi^2 + h^2 dz^2, \quad (7)$$

где b , Φ , A , h — функции координаты r . Поле скоростей определяет поле ускорения w^α , угловой скорости Ω^α (или тензор вращения $\Omega_{\alpha\beta}$) и поле скоростей $\sigma_{\alpha\beta}$ деформации вещества [16]. Имея в виду соотношения (1)–(7), получаем для поля ускорения

$$w_0 = w_2 = w_3 = 0, \quad (8)$$

$$w_1 = -(1 + 2U_0 U^0) \frac{b'}{b} + \frac{U^2}{b^2} (U_0 \Phi' - U^2 A A'), \quad (9)$$

для модуля ω угловой скорости –

$$\omega^2 = \frac{1}{4A^2}(U'_0 U_2 - U'_2 U_0)^2. \quad (10)$$

Здесь штрихом обозначены производные по координате r . Из условий нормировки поля U^α и направления его в “конус будущего” находим

$$U^0 = \frac{1}{b^2}(\Phi U^2 + L), \quad U_0 = -L, \quad U_2 = \frac{1}{b^2}(A^2 U^2 + \Phi L), \quad (11)$$

где $L = \sqrt{b^2 + A^2(U^2)^2}$.

Таким образом, искомыми при заданном локальном уравнении состояния вещества являются четыре метрические функции $b(r)$, $\Phi(r)$, $A(r)$, $h(r)$ и две функции $\mu(r)$ и $U^2(r)$, характеризующие вещество.

Используя форму (7) и тензор энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + P)U_\alpha U_\beta + P g_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

уравнения Эйнштейна можно привести к следующему виду:

$$P' = (\mu + P) \left(a\beta^2 A^2 - 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 \frac{b'}{b} \right), \quad (13)$$

$$\frac{A''}{A} = \kappa P + a \frac{b'}{b} + \frac{\gamma^2}{A^2}, \quad (14)$$

$$\frac{b''}{b} = \frac{\kappa}{2}(\mu + 3P) + \kappa(\mu + P)\beta^2 A^2 - \frac{2\gamma^2}{A^2} - \frac{b'}{b} \left(a + B - \frac{b'}{b} \right), \quad (15)$$

$$\frac{h'}{h} = B - \frac{b'}{b}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' = & \kappa(\mu + 3P)\Phi + 2\kappa(\mu + P)\beta A^2(\beta\Phi - \alpha) + \\ & + \Phi' \left(\frac{A'}{A} + \frac{b'}{b} - B \right) - 4\Phi \left(a \frac{b'}{b} + \frac{\gamma^2}{A^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} B = & \frac{A}{A'} \left(\kappa P + \frac{(b')^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{A^2} \right), \quad a = \frac{A'}{A} - \frac{b'}{b}, \\ \gamma = & \frac{\Phi'}{2} - \frac{\Phi b'}{b}, \quad \alpha = \frac{U_0}{b}, \quad \beta = \frac{U^2}{b}; \end{aligned} \quad (18)$$

κ – постоянная Эйнштейна.

Уравнения (13)–(17) определяют пять искоемых функций μ , b , Φ , A и h при заданном локальном уравнении состояния вещества и заданном распределении скорости U^2 (или $\beta(r)$). Общее решение этих уравнений, удовлетворяющее заданным значениям функций и их производных первого порядка на оси вращения (см. приложение 1, формулы

(П1.1)–(П1.5)), содержит одну постоянную интегрирования $\mu(0)$ и заданную функцию $U^2(r)$ распределения скорости.

Можно показать (см. приложение 2), что при однородном распределении вещества уравнения Эйнштейна имеют следующее решение:

$$b = 1, \quad h = 1, \quad A = C_1 e^\lambda + C_2 e^{-\lambda}, \quad \Phi = C_0 + \sqrt{2} (C_1 e^\lambda - C_2 e^{-\lambda}), \quad (19)$$

где $\lambda = \sqrt{2} \omega r$, C_0, C_1, C_2 – постоянные. Используя значения (П1.2) и (П1.5) на оси вращения, получаем единственное решение

$$b = 1, \quad h = 1, \quad A = \frac{\text{sh } \lambda}{\sqrt{2} \omega}, \quad \Phi = \frac{\text{ch } \lambda - 1}{\omega}. \quad (20)$$

Если $\omega = 0$, то

$$\mu = P = 0, \quad \Phi = 0, \quad A = r, \quad (21)$$

и квадратичная форма совпадает с формой Минковского в цилиндрических координатах.

Решение Гёделя [17] можно получить, если в решении (19) положить $C_0 = 0$ и $C_2 = 0$ (или $C_1 = 0$). Оно не удовлетворяет условиям (П1.2) и (П1.5). Можно показать, что решение (20) и решение Гёделя неприводимы.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ НУЛЬ-СТРУНЫ В ОДНОРОДНОЙ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Нуль-струны и нуль- p -браны впервые были рассмотрены в работах [18]. С физической точки зрения нуль- p -браны и нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для струн Намбу–Гото. В пределе нулевого натяжения можно с единых позиций рассмотреть динамику целого класса протяженных нуль-объектов – нуль- p -бран, мировые гиперлисты которых являются $(p + 1)$ -мерными изотропными геодезическими искривленного пространства-времени. Напомним, что случаю $p = 1$ отвечает нуль-струна, случаю $p = 2$ – нуль-мембрана и т.д.

Приступая к выводу уравнений движения нуль- p -бран в искривленном пространстве, заметим, что их действие может быть представлено в форме, естественным образом обобщающей представление Намбу–Гото [19]:

$$S = \int d^{p+1} \xi \frac{\det(\partial_\mu x^M G_{MN} \partial_\nu x^N)}{E(\tau, \sigma^n)}, \quad (22)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, \dots, p$ – индексы мировой гиперповерхности нуль- p -браны ($\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma^1$, $\xi^2 = \sigma^2$, ..., $\xi^p = \sigma^p$) и $E(\tau, \sigma^n)$ – $(p + 1)$ -мерная гиперлистовая плотность. ДETERМИНАНТ индуцированной метрики нуль- p -браны

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x^M G_{MN} \partial_\nu x^N = \begin{pmatrix} \dot{x}^A G_{AB}(x) \dot{x}^B & \dot{x}^A G_{AB}(x) \partial_n x^B \\ \partial_m x^A G_{AB}(x) \dot{x}^B & \hat{g}_{mn}(x) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где

$$\hat{g}_{mn}(x) = \partial_m x^A G_{AB}(x) \partial_n x^B, \quad (24)$$

можно представить в факторизованном виде [20]:

$$g = \dot{x}^M \tilde{\Pi}_{MN}(x) \dot{x}^N \hat{g}, \quad \hat{g} = \det \hat{g}_{mn}, \quad (25)$$

где точка обозначает дифференцирование по τ , а матрица

$$\tilde{\Pi}_{MN}(x) = G_{MN} - G_{MB} \partial_m x^B (\hat{g}^{-1})^{mn} \partial_n x^L G_{LN} \quad (26)$$

имеет свойства проекционного оператора: $\tilde{\Pi}_{ML}(x) \tilde{\Pi}^{LN}(x) = \tilde{\Pi}_M^N(x)$.

Поэтому действие (22) может быть записано следующим образом:

$$S = \int d^{p+1} \xi \frac{\det(\dot{x}^M \tilde{\Pi}_{MN}(x) \dot{x}^N \hat{g})}{E(\tau, \sigma^n)}. \quad (27)$$

Вариация действия S по гиперлистовой плотности E дает условие вырожденности индуцированной гиперлистовой метрики $g_{\mu\nu}$:

$$g = \det g_{\mu\nu} = 0, \quad (28)$$

выделяющее класс $(p+1)$ -мерных изотропных геодезических с нулевым гиперобъемом. Варьируя действие (27) по x^M и фиксируя калибровку условиями

$$\dot{x}^M G_{MN} \partial_m x^N = 0, \quad \left(\frac{\hat{g}}{E} \right) = 0, \quad (29)$$

получаем уравнения движения и связи в форме

$$\ddot{x}^M + \Gamma_{PQ}^M \dot{x}^P \dot{x}^Q = 0, \quad (30)$$

$$\dot{x}^M G_{MN} \dot{x}^N = 0, \quad \dot{x}^M G_{MN} \partial_m x^N = 0, \quad (31)$$

где Γ_{PQ}^M – символы Кристоффеля для фоновой метрики G_{MN} .

Рассмотрим решение уравнений движения нуль-струны (30), (31) ($p=1$) для случая аксиально-симметричной стационарной космологической модели, которая описывается метрикой

$$dS^2 = -dt^2 + 2\Phi dt d\varphi + dr^2 + dz^2 + \rho d\varphi^2, \quad (32)$$

где $\rho = A^2 - \Phi^2$, $A = \text{sh } \lambda / (\sqrt{2} \omega)$, $\Phi = (\text{ch } \lambda - 1) / \omega$, $\lambda = \sqrt{2} \omega r$. Подстановка метрики (32) в (30), (31) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\ddot{t} + \frac{1}{A^2} [\sqrt{2} \omega (2\Phi A A' - \Phi^2 \Phi' - A^2 \Phi') \dot{r} \dot{\varphi} + \sqrt{2} \omega \Phi' \Phi \dot{r} \dot{\varphi}] = 0, \quad \ddot{z} = 0, \quad (33)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{A^2} [\sqrt{2} \omega (2A A' - \Phi \Phi') \dot{r} \dot{\varphi} + \sqrt{2} \omega \Phi' \dot{\varphi} \dot{r}] = 0, \quad (34)$$

$$\ddot{r} - \sqrt{2} \omega (A A' - \Phi \Phi') \dot{\varphi}^2 - \sqrt{2} \omega \Phi' \dot{\varphi} \dot{t} = 0, \quad (35)$$

$$\dot{t}^2 - 2\Phi \dot{t} \dot{\varphi} - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 - \rho \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (36)$$

$$\dot{t} \dot{t}' - \Phi (\dot{t} \dot{\varphi}' + \dot{t}' \dot{\varphi}) - \dot{r} \dot{r}' - \dot{z} \dot{z}' - \rho \dot{\varphi} \dot{\varphi}' = 0, \quad (37)$$

где $\Phi' = d\Phi/dx$.

Для замкнутой нуль-струны, которую мы здесь рассматриваем, полученные уравнения движения следует дополнить условиями периодичности по пространственноподобному параметру σ .

Первые интегралы уравнений (33)–(37) легко находятся и имеют вид

$$\dot{t} = \frac{\Phi}{A^2}(P_\varphi - P_t \Phi) + P_t, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{A^2}(P_\varphi - P_t \Phi), \quad (38)$$

$$\dot{r}^2 = P_t^2 - P_z^2 - \frac{1}{A^2}(P_\varphi - P_t \Phi)^2, \quad \dot{z} = P_z, \quad (39)$$

где P_t, P_φ, P_z – “константы” интегрирования (функции пространственноподобного параметра σ). В общем случае решение уравнений (38), (39) имеет громоздкий вид, но оно существенно упрощается в случае, когда $P_\varphi = -2\sqrt{2} A_0 P_t$:

$$\begin{aligned} \text{ch } \lambda &= \frac{2P_t^2}{P_t^2 + P_z^2} + \frac{P_t^2 - P_z^2}{P_t^2 + P_z^2} \sin\left(\sqrt{2}\omega\sqrt{P_t^2 + P_z^2}\tau + r_0\right), \quad t = t_0 - P_t\tau, \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}\omega A_0} \text{arctg}\left(\frac{-\tilde{P} \text{tg}(\alpha/2) + L}{2\sqrt{2} A_0 P_t}\right), \quad z = z_0 + P_z\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

где введены обозначения

$$\alpha = \sqrt{2}\omega\sqrt{P_t^2 + P_z^2}\tau + r_0, \quad \tilde{P} = \frac{3P_t^2 + P_z^2}{\sqrt{P_t^2 + P_z^2}}, \quad L = \left[\left(\frac{A_0(P_t^2 - P_z^2)}{\sqrt{P_t^2 + P_z^2}}\right)^2\right]^{1/2}, \quad (41)$$

t_0, φ_0, r_0, z_0 – функции пространственноподобного параметра σ .

Подставляя решение (40) в уравнение (37), находим связь для начальных данных (уравнение (36) для (38), (39) выполняется тождественно):

$$-P_t t'_0 - 2\sqrt{2} A_0 P_t \varphi'_0 + P_z z'_0 + \frac{\sqrt{2} P_t P_z (P'_t P_z - P_t P'_z)}{\omega(3P_t^2 + P_z^2)\sqrt{P_t^2 + P_z^2}} - \frac{r'_0 \sqrt{(P_t^2 + P_z^2)}}{2\sqrt{2}\omega} = 0. \quad (42)$$

В качестве примера рассмотрим следующие начальные данные:

$$\begin{aligned} z_0 = t_0 = 0, \quad r_0 = 1 + \cos \frac{\sigma}{R}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad A_0 = \frac{5}{8R}, \\ P_t = -2P_z, \quad \varphi_0 = R \cos \frac{\sigma}{R}, \quad R = \text{const}. \end{aligned} \quad (43)$$

В этом случае решение (40) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(t, \sigma) &= R \cos \frac{\sigma}{R} - \frac{8R}{\sqrt{10}} \text{arctg}\left(\frac{13 \text{tg}(t/(2\sqrt{2})) + \cos^2(\sigma/(2R)) - 3}{4\sqrt{10}}\right), \\ r(t, \sigma) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \text{arcch}\left[\frac{1}{5}\left(8 + 3 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 2 \cos^2 \frac{\sigma}{2R}\right)\right)\right], \\ z(t, \sigma) &= \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Рис. 1. Мировая поверхность, заметаемая нуль-струной при движении в поле аксиально-симметричной стационарной космологической модели в случае (43).

Мировая поверхность нуль-струны, соответствующая решению (44), приведена на рис. 1.

Еще один пример точного решения, описывающего динамику нуль-струны, получаем, полагая

$$\begin{aligned} r_0 = t_0 = 0, \quad \varphi_0 = R \cos \frac{\sigma}{R}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ P_t = -2P_z, \quad z_0 = -\cos^2 \frac{\sigma}{2R}, \quad R = \text{const}. \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда из (40) находим

$$\begin{aligned} \varphi(t, \sigma) &= R \cos \frac{\sigma}{R} - 8\sqrt{5} R \operatorname{arctg} \left(\frac{13 \operatorname{tg}(t/(2\sqrt{2})) - 3}{4\sqrt{10}} \right), \\ r(t, \sigma) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{arcch} \left(8 + \frac{3}{5} \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right), \\ z(t, \sigma) &= -\cos^2 \frac{\sigma}{2R} + \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Мировая поверхность нуль-струны, отвечающая решению (46), приведена на рис. 2.

Полученные решения обнаруживают сильную зависимость от начальных данных, которая, возможно, указывает на возникновение в системе динамического хаоса.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СТРУНЫ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В последние годы появилось большое число публикаций, посвященных взаимодействию топологически нетривиальных объектов [20], [21], однако вопрос о влиянии гравитационных полей на движение космических струн еще далек от своего решения. Это связано с тем, что динамика космических струн в гравитационных полях описывается сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных,

Рис. 2. Мировая поверхность, заматаемая нуль-струной при движении в поле аксиально-симметричной стационарной космологической модели в случае (45).

точные решения которых найдены только для специального вида метрик [22]–[24]. Следует отметить, что в этих работах найдены лишь частные решения, которые не позволяют дать целостную картину движения космических струн. Более полная информация о динамике космических струн на сегодняшний день может быть получена лишь в численных экспериментах, которые на настоящий момент практически отсутствуют.

Уравнения движения струны в псевдоримановых пространствах хорошо известны и имеют вид [19]

$$\ddot{x}^M - \lambda^2 x''^M + \Gamma_{PQ}^M (\dot{x}^P \dot{x}^Q - \lambda^2 x'^P x'^Q) = 0, \quad (47)$$

$$G_{MN}(x)(\dot{x}^M \dot{x}^M + \lambda^2 x'^M x'^N) = 0, \quad \dot{x}^M G_{MN}(x) x'^N = 0, \quad (48)$$

где точка и штрих обозначают производные по τ и σ , соответственно. Параметр λ мы используем как дискретный параметр, причем для струн с натяжением $\lambda = 1$, а для нуль-струн $\lambda = 0$.

Начально-краевая задача для релятивистской струны ставится следующим образом. Надо найти решение уравнения (47) $x^M(\tau, \sigma)$, дважды непрерывно дифференцируемое в области

$$\Omega = \{(\tau, \sigma): 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}, 0 \leq \sigma < 2\pi\}, \quad (49)$$

непрерывно дифференцируемое на границе Ω , удовлетворяющее связям (48), условиям периодичности $x^M(\tau, \sigma) = x^M(\tau, \sigma + 2\pi)$ и двум заданным начальным условиям – начальному положению струны

$$x^M(0, \sigma) = \rho^M(\sigma) \quad (50)$$

и начальной скорости точек струны

$$\dot{x}^M(0, \sigma) = \nu^M(\sigma). \quad (51)$$

Следует отметить, что результатов о глобальном решении задачи Коши для нелинейных гиперболических систем известно сравнительно мало. Что касается уравнений (47), (48), описывающих динамику струн, то они относятся к таким математическим моделям физики, разработка теории которых находится на начальной стадии.

В теории численных методов есть два главных вопроса. Во-первых, построение дискретных (разностных) аппроксимаций для уравнений и исследование априорных характеристик качества этих аппроксимаций, что сводится прежде всего к изучению погрешности аппроксимации, устойчивости и связанной с ними точности полученной разностной схемы. Во-вторых, решение разностных уравнений прямыми или итерационными методами, выбираемыми из соображений экономичности вычислительного алгоритма.

Перейдем к построению разностной схемы. С этой целью введем в области изменения листовых переменных τ и σ прямоугольную сетку

$$\tau_l = l\Delta\tau, \quad l = 0, \dots, L, \quad \sigma_m = m\Delta\sigma, \quad m = 0, \dots, M, \quad (52)$$

где $\Delta\tau = \tau_{\max}/L$, $\Delta\sigma = 2\pi/(M+1)$, а L и M — число узлов по переменным τ и σ , соответственно. При составлении разностной схемы будем использовать метод разностной аппроксимации, с помощью которого легко составить схему первого и второго порядка аппроксимации на прямоугольной сетке для уравнений с непрерывными и достаточно гладкими коэффициентами. Предпочтение будем отдавать неявным схемам в силу того, что последние обладают лучшей сходимостью, чем явные. Возьмем шаблон, изображенный на рис. 3, и составим схему со следующими весами при пространственных производных на разных слоях:

$$\hat{x} - 2x + \check{x} - \Lambda(\gamma\hat{x} + (1 - 2\gamma)x + \gamma\check{x}) + f = 0, \quad (53)$$

$$x_m = x^M(\tau_l, \sigma_m), \quad \hat{x}_m = x^M(\tau_{l+1}, \sigma_m), \quad \check{x}_m = x^M(\tau_{l-1}, \sigma_m), \quad (54)$$

$$\Lambda x_m = h^2(x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}), \quad (55)$$

$$f = \frac{1}{4}(\Gamma_{PQ}^M)_{l,m} [(x_{l+1,m}^P - x_{l-1,m}^P)(x_{l+1,m}^Q - x_{l-1,m}^Q) - \\ - h^2(x_{l,m+1}^P - x_{l,m-1}^P)(x_{l,m+1}^Q - x_{l,m-1}^Q)], \quad (56)$$

$$h^2 = \frac{\lambda^2(\Delta\tau)^2}{(\Delta\sigma)^2}. \quad (57)$$

Рис. 3. Шаблон

Чтобы все веса были неотрицательными, следует брать $0 \leq \gamma \leq 1/2$. Для связей (48) и условий (49)–(51) также составим разностные уравнения:

$$(G_{PQ})_{l,m} [(x_{l+1,m}^P - x_{l-1,m}^P)(x_{l+1,m}^Q - x_{l-1,m}^Q) - h^2(x_{l,m+1}^P - x_{l,m-1}^P)(x_{l,m+1}^Q - x_{l,m-1}^Q)] = 0, \quad (58)$$

$$(G_{PQ})_{l,m} (x_{l+1,m}^P - x_{l-1,m}^P)(x_{l+1,m}^Q - x_{l-1,m}^Q) = 0, \quad (59)$$

$$x_{0,m}^N = \rho^N(\sigma), \quad x_{1,m}^N - x_{-1,m}^N = 2\nu^N(\sigma_m)\Delta\tau, \quad (60)$$

$$x_{l,-1}^N = x_{l,M}^N, \quad x_{l,M+1}^N = x_{l,0}^N.$$

Уравнение (53) представляет собой неявное трехслойное разностное уравнение, которое аппроксимирует дифференциальное уравнение в частных производных с точностью $O((\Delta\tau)^2 + (\Delta\sigma)^2)$. Решение уравнений (53)–(59) находится методом итераций. В качестве тестов для уравнений (53)–(59) служили хорошо известные решения для струн и нуль-струн в пространстве-времени кротовой норы [23], пространстве-времени Переса [24], а также изученные выше решения для нуль-струны в стационарной аксиально-симметричной космологической модели. Тестовые задачи показывают, что предложенный метод является устойчивым, а абсолютная ошибка на сетке $L \times M = 1000 \times 100$ не превышает 10^{-3} . Было проведено численное моделирование нуль-струны и струны. В начальный момент времени нуль-струна расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и имеет скорость, направленную к оси вращения (рис. 4). В процессе движения нуль-струна увлекается глобальным вращением, которое деформирует ее и закручивает в спираль. При этом длина нуль-струны растет, а внутренний конец приближается к оси вращения. Если же начальная скорость направлена в противоположную сторону, то нуль-струна, закручиваясь в спираль, удаляется от оси вращения.

Рис. 4. Эволюция нуль-струны ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$).

Более сложным образом происходит эволюция струны (рис. 5). В качестве иллюстрации рассмотрим струну, которая в начальный момент времени лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и движется в направлении оси вращения. Численные решения показывают, что струна, совершая сложные колебания, приближается к оси

вращения и, увлекаясь вращением, закручивается в спираль. При этом пульсирующий характер движения струны приводит к тому, что струна то скручивается в спираль, то раскручивается. С течением времени длина спирали растёт, а ее внутренний конец приближается к оси вращения. Следует также отметить, что в процессе эволюции на струне образуются каспоиды, которые могут служить источниками сильного электромагнитного излучения [13].

Рис. 5. Эволюция струны ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдено новое точное решение уравнений Эйнштейна, описывающее стационарную однородную аксиально-симметричную модель. Показано, что полученное решение не содержит замкнутых времениподобных линий и тем самым не страдает “пороком”, присущим решению Гёделя. Само же решение Гёделя может быть получено специальным выбором констант интегрирования.

Изучена динамика струн и нуль-струн в однородной стационарной аксиально-симметричной космологической модели. Получены точные решения, описывающие движения нуль-струны во вращающейся Вселенной, и показана сильная зависимость этих решений от начальных данных. Возможно, это указывает на существование в системе динамического хаоса, однако этот вопрос остается открытым.

С целью получения более полной информации о динамике космических струн были проведены численные эксперименты, которые показали существенное различие в поведении струн и нуль-струн. В процессе своего движения нуль-струна увлекается глобальным вращением, которое деформирует ее и закручивает в спираль. Более сложным образом происходит эволюция струны. Численные решения показывают, что струна, совершая сложные колебания, закручивается в спираль. Пульсирующий характер движения струны приводит к тому, что струна то скручивается в спираль, то раскручивается. В процессе эволюции на струне образуются петли и каспоиды. Образование петель на струне может привести к ее дроблению на более мелкие струны, в то время как каспоиды могут служить источниками сильного электромагнитного излучения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Получим поведение искомых функций в малой окрестности оси вращения. Допустимыми преобразованиями $t \rightarrow \text{const} \cdot t$, $z \rightarrow \text{const} \cdot z$ (соответствующими изменениям масштабов на координатных линиях t и z) можно добиться, чтобы выполнялись равенства

$$b(0) = h(0) = 1. \quad (\text{П1.1})$$

Согласно принципу соответствия форма (7) должна сходиться на оси вращения к форме Минковского в цилиндрических координатах, поэтому

$$\Phi(0) = A(0) = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Из требования ограниченности значения U^2 на оси вращения и равенств (П1.1), (П1.2) следует, что

$$U^0(0) = -U_0(0) = 1, \quad U_2(0) = 0. \quad (\text{П1.3})$$

Заметим, наконец, что форма (7) инвариантна относительно преобразования инверсии $r \rightarrow -r$, которое эквивалентно замене интервалов изменения координат r и φ :

$$r \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \rightarrow r \in (-\infty, \infty), \quad \varphi \in [0, \pi).$$

Поэтому функции $b^2(r)$, $\Phi(r)$, $A^2(r)$, $h^2(r)$, $U^0(r)$ и $U^2(r)$ являются четными. Следовательно,

$$\Phi'(0) = b'(0) = h'(0) = 0, \quad U_0'(0) = U_2'(0) = (U^0)'|_0 = (U^2)'|_0 = 0. \quad (\text{П1.4})$$

Форма (7) должна сходиться к форме Минковского в цилиндрических координатах не только на оси вращения, но и в малой ее окрестности. Поэтому, согласно (П1.1)–(П1.3), функция $A(r)$ является нечетной, а $A'(0) \neq 0$. Таким образом, без ограничения общности можно добиться выполнения равенства

$$A'(0) = 1. \quad (\text{П1.5})$$

Для этого достаточно воспользоваться допустимым преобразованием угловой координаты $\varphi \rightarrow \text{const} \cdot \varphi$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Получим точное решение уравнений Эйнштейна для однородной стационарной аксиально-симметричной космологической модели. Положим, что распределение массы вещества на пространственноподобной гиперповерхности $t = \text{const}$ является однородным, т. е.

$$\mu' = P' = 0, \quad \mu = \text{const}, \quad P = \text{const}. \quad (\text{П2.1})$$

Тогда уравнение (13) сводится к равенству нулю ускорения w_1 вещества:

$$a\beta^2 A^2 - 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 \frac{b'}{b} = 0. \quad (\text{П2.2})$$

Переписав второе из равенств (11) в виде

$$\alpha = -\sqrt{1 + \beta^2 A^2} \quad (\text{П2.3})$$

и присоединив его к (П2.2), получаем алгебраические уравнения, выражающие распределение скорости $U^2(r)$ через метрические функции b , A , Φ и их производные первого порядка. Разрешив их, находим

$$\beta^2 = \left[\left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right)^2 - 4\gamma^2 \right]^{-1} \left[2 \frac{\gamma^2}{A^2} + \left(a - \frac{b'}{b} \right) \frac{b'}{b} + 2e \frac{\gamma}{A} \sqrt{\frac{\gamma^2}{A^2} + a \frac{b'}{b}} \right], \quad (\text{П2.4})$$

$$\alpha\beta = \left[\left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right)^2 - 4\gamma^2 \right]^{-1} \left[\gamma \frac{A'}{A} + e \left(a - \frac{b'}{b} \right) \sqrt{\gamma^2 + aA^2 \frac{b'}{b}} \right], \quad (\text{П2.5})$$

$$\beta = - \left[\left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right)^2 - 4\gamma^2 \right]^{-1/2} \left[\gamma \frac{A'}{A} + e \left(a - \frac{b'}{b} \right) \sqrt{\gamma^2 + aA^2 \frac{b'}{b}} \right] \times \\ \times \left[a^2 A^2 - \left(\gamma - e \sqrt{\gamma^2 + aA^2 \frac{b'}{b}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (\text{П2.6})$$

где $e = \pm 1$. Подставив (П2.3), (П2.5) в уравнения (14)–(17), получаем

$$\frac{h'}{h} = B - \frac{b'}{b}, \quad \frac{A''}{A} = \kappa P + a \frac{b'}{b} + \frac{\gamma^2}{A^2}, \quad (\text{П2.7})$$

$$\frac{b''}{b} = a \left(B - \frac{b'}{b} \right) - \frac{\gamma^2}{A^2} + \frac{\kappa}{2} (\mu + P) \left[\left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right)^2 - 4\gamma^2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[A' \left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right) + 4e\gamma \sqrt{\gamma^2 + aA^2 \frac{b'}{b}} \right], \quad (\text{П2.8})$$

$$\Phi'' = -\kappa(\mu + 3P)\Phi + 4\Phi \frac{A'}{A} \left(B - \frac{b'}{b} \right) + \Phi' \left(\frac{A'}{A} + \frac{b'}{b} - B \right) + \\ + 2\kappa(\mu + P) \left[\left(A' - 2A \frac{b'}{b} \right)^2 - 4\gamma^2 \right]^{-1} \left\{ a\Phi A^2 \left(a - \frac{b'}{b} \right) - \right. \\ \left. - \gamma \left(AA' + \Phi\Phi' - 2\Phi^2 \frac{b'}{b} \right) + e \sqrt{\gamma^2 + aA^2 \frac{b'}{b}} \times \right. \\ \left. \times \left[\Phi\Phi' - AA' + 2(A^2 - \Phi^2) \frac{b'}{b} \right] \right\}. \quad (\text{П2.9})$$

Уравнения (П2.7)–(П2.9) регулируют метрические функции b , A , Φ , h при заданном локальном уравнении состояния вещества, а равенство (П2.6) после подстановки в него

решения уравнений (П2.7)–(П2.9) определяет распределение скорости $U^2(r)$ вещества в однородной модели. Характер общего решения уравнений (П2.7)–(П2.9) следует из анализа их в малой окрестности оси вращения. Действительно, метрические функции согласно (П1.1)–(П1.5) имеют в малой окрестности оси вращения следующий вид:

$$\begin{aligned} b &= 1 + \frac{b_0 r^2}{2} + O(r^4), & \Phi &= \frac{\Phi_0 r^2}{2} + O(r^4), \\ A &= r \left(1 + \frac{A_0 r^2}{6} \right) + O(r^5), & h &= 1 + \frac{h_0 r^2}{2} + O(r^4). \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Здесь b_0, A_0, Φ_0, h_0 – постоянные. Из (П2.6) тогда следует, что

$$\beta = \beta_0 + o(r^2), \quad (\text{П2.11})$$

где $\beta_0 = -(\Phi_0/2 + e\sqrt{b_0 + \Phi_0^2/4})$.

Уравнение (П2.9) в этом приближении удовлетворяется тождественно, а из уравнений (П2.7), (П2.8) и (П2.11) получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4}\kappa(\mu + 7P), & \Phi_0 &= -2\beta_0 - e\sqrt{\kappa(\mu + 3P)}, \\ h_0 &= -\frac{1}{4}\kappa(\mu - P), & b_0 &= -\beta_0[\beta_0 + e\sqrt{\kappa(\mu + 3P)}]. \end{aligned} \quad (\text{П2.12})$$

В этом же приближении квадрат модуля угловой скорости вещества определяется формулой

$$\omega^2(r) = \frac{1}{4}\kappa(\mu + 3P) + O(r^2). \quad (\text{П2.13})$$

Таким образом, общее решение уравнений Эйнштейна в однородной стационарной модели, удовлетворяющее значениям (П1.1)–(П1.3) искомым функциям на оси вращения и их производных первого порядка (П1.4), (П1.5), содержит две постоянные интегрирования – плотность массы и значение скорости $U^2(0) (= \beta_0)$.

Положим $b = 1$, $e = -1$. Из формул (10), (11), (18), (П2.3) и (П2.6) следуют равенства

$$\beta = U^2 = 0, \quad \alpha = -1, \quad U^0 = -U_0 = 1, \quad U_2 = \Phi, \quad (\text{П2.14})$$

$$(\Phi')^2 = 4A^2\omega^2. \quad (\text{П2.15})$$

Второе из равенств (П2.14) означает, что в этом случае система координат является “сопутствующей” [25]. Уравнения Эйнштейна (П2.7)–(П2.9) приводятся к виду

$$\frac{A''}{A} = \kappa P + \omega^2, \quad \kappa(\mu + 3P) = 4\omega^2, \quad \Phi'' = \Phi' \frac{A'}{A} - B\Phi'. \quad (\text{П2.16})$$

Продифференцировав (П2.15) и подставив результат в последнее из равенств (П2.16), находим $B = 0$. Тогда из первого из равенств (18) с учетом (П2.15) и второго из равенств (П2.16) получаем

$$\mu = P = \frac{\omega^2}{\kappa}. \quad (\text{П2.17})$$

Из (П1.1) и первого из равенств (П2.7) находим единственное решение

$$h = 1, \quad (\text{П2.18})$$

а оставшиеся уравнения Эйнштейна сводятся к следующим двум:

$$A'' - 2\omega^2 A^2 = 0, \quad \Phi' = 2\omega A. \quad (\text{П2.19})$$

Общее решение уравнений (П2.19) имеет вид

$$A = C_1 e^\lambda + C_2 e^{-\lambda}, \quad \Phi = C_0 + \sqrt{2} (C_1 e^\lambda - C_2 e^{-\lambda}), \quad (\text{П2.20})$$

где $\lambda = \sqrt{2}\omega r$, C_0, C_1, C_2 — постоянные.

Благодарность. Авторы признательны А. А. Желтухину за полезные обсуждения и интерес к работе.

Список литературы

- [1] *С. Вейнберг.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975; *G. F. R. Ellis.* Relativistic cosmology. In: General Relativity and Cosmology. Proc. of the XLVII Enrico Fermi Summer School. Ed. R.K. Sachs. New York: Academic Press, 1971. P. 104; Наблюдательные основы космологии. Сб. статей. М.: Мир, 1965; *Observational Cosmology.* Eds. A. Mewitt, G.R. Burbidge, L.Z. Fang. Dordrecht: Reidel, 1987; *Космология. Теория и наблюдения.* Сб. статей под ред. Я.Б. Зельдовича. М.: Мир, 1978.
- [2] *А. Д. Линде.* Физика элементарных частиц и космология. М.: Наука, 1990.
- [3] *P. Birch.* Nature. 1982. V. 298. P. 451; 1983. V. 301. P. 736; *D. Kendall, G. A. Young.* Mon. Not. R. Astron. Soc. 1984. V. 207. P. 637; *R. G. Conway, P. Birch, R. I. Davis, L. R. Jones, A. J. Kerr.* D. Standard Mon. Not. R. Astron. Soc. 1983. V. 202. P. 813; *B. A. Короткий, Ю. Н. Обухов.* ЖЭТФ. 1991. Т. 99. № 1. С. 22; *J. Ellis, K. A. Olive.* Nature. 1983. V. 303. P. 679; *В. Н. Павелкин, В. Ф. Панов.* Изв. вузов. Физика. 1988. № 7. С. 29.
- [4] *Д. Д. Иваненко.* Астрон. циркуляр. 1983. № 1254. С. 1.
- [5] *Р. М. Мурадян.* Исследование вращения в космологии. Препринт № 636/26. Ереван: Ереванский физический институт, 1983.
- [6] *Д. Д. Иваненко, В. Г. Кречет, В. Ф. Панов.* О вращении Вселенной. В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Сб. научн. статей. Ред. В.Н. Мельников. М.: Энергоатомиздат, 1986. С. 8.
- [7] *В. Ф. Панов.* Изв. вузов. Физика. 1985. № 1. С. 22.
- [8] *R. F. Sistero.* Astrophys. Lett. 1983. V. 23. P. 235; *A. Raychaudhuri, S. Thakurta.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 802.
- [9] *К. П. Станюкович.* Гравитационное поле и элементарные частицы. М.: Наука, 1965.
- [10] *K. Rosquist.* Phys. Lett. A. 1983. V. 97. P. 145; *V. G. Agakov.* Gen. Relat. Gravit. 1984. V. 16. P. 317.
- [11] *E. Sviestins.* Gen. Relat. Gravit. 1984. V. 16. P. 161; *В. Д. Ляховец.* О возможных эффектах во Вселенной с вращением. Деп. в ВИНТИ 14.11.84. № 7311.
- [12] *J. E. Lidsey, D. W. Wands, E. J. Copeland.* Phys. Rep. 2000. V. 337. P. 343; hep-th/9909061.
- [13] *A. Vilenkin, E. P. S. Shellard.* Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1994.
- [14] *P. J. E. Peebles.* Principles of Physical Cosmology. Princeton: Princ. Univ. Press, 1993; *T. Abel, A. Stebbins, P. Anninos, M. L. Norman.* Appl. J. 1998. V. 508. P. 530; *Ф. Дж. Э. Пиблс.*

- Структура вселенной в больших масштабах. М.: Мир, 1983; *M. Sazhin, G. Longo, M. Carraccioli et al.* Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2003. V. 343. P. 353; astro-ph/0302547.
- [15] *С. Чандрасекар*. Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986.
 - [16] *Дж. Синг*. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963.
 - [17] *K. Gödel*. Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 447.
 - [18] *A. Schild*. Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 1722; *А. А. Желтухин*. Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 46. С. 208; *I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin*. Fortschr. Phys. 1993. V. 41. P. 619.
 - [19] *S. Roshchupkin, A. Zheltukhin*. On a possibility of membrane cosmology. hep-th/9607119.
 - [20] *S. Roshchupkin, A. Zheltukhin*. Class. Q. Grav. 1995. V. 12. P. 2519.
 - [21] *G. Veneziano*. Status of string cosmology: basic conceptions and main consequences. In: Proc. of the Erice Course. String Gravity and Physics at the Planck Scale. Eds. N. Sanchez, A. Zichichi. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 285.
 - [22] *M. Gasperini*. Status of string cosmology: phenomenological aspects. In: Proc. of the Erice Course. String Gravity and Physics at the Planck Scale. Eds. N. Sanchez, A. Zichichi. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 305; *H. J. De Vega, N. Sanchez*. Phys. Lett. B. 1987. V. 197. P. 320; *G. T. Horowitz, A. R. Steif*. Strings in strong gravitational fields. Preprint UCSB-TH-90-8. Department of Physics in Center for Relativity. The University of Texas at Austin, 1989; *V. Frolov, V. Skarzhinski, A. Zelnikov, O. Henri*. Phys. Lett. B. 1989. V. 224. P. 255; *S. Kar*. Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 6842; *M. P. Dobrowski, A. L. Larsen*. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 6409; hep-th/9610243; *Ж. Лере*. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
 - [23] *Е. Н. Зинченко, С. Н. Рошупкин*. Укр. Фіз. Ж. 2002. Т. 47. С. 113.
 - [24] *А. П. Леляков, С. Н. Рошчупкин*. Acta Phys. Polon. 2002. V. 33. P. 593.
 - [25] *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 4.VIII.2003 г.,
после доработки 12.III.2004 г.