Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Бухбиндер, Е. И. Бухбиндер, Б. Р. Мищук, В. Д. Першин, Структура аномалии при каноническом квантовании бозонной струны в фоновых полях, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 2, 294–305

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:22:16

И. Л. Бухбиндер, Е. И. Бухбиндер, Б. Р. Мишук, В. Д. Першин
**СТРУКТУРА АНОМАЛИИ ПРИ
КАНОНИЧЕСКОМ КВАНТОВАНИИ
БОЗОННОЙ СТРУНЫ В ФОНОВЫХ ПОЛЯХ**

Рассмотрена проблема аномалии при обобщенном каноническом квантовании бозонной струны, взаимодействующей с фоновыми полями гравитона и антисимметричного тензора. Получено уравнение для символа оператора аномалии. Найдено решение этого уравнения, и установлена общая форма оператора аномалии, допускаемая процедурой квантования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема квантовых аномалий занимает особое место в теории струн. Все известные струнные модели являются аномальными теориями, и только при определенных значениях параметров эти аномалии могут отсутствовать. В теории свободных струн таким параметром является размерность объемлющего пространства; в теории струн, взаимодействующих с фоновыми полями, роль соответствующих параметров играют фоновые поля, а условия отсутствия аномалии описываются в терминах модифицированных бета-функций и интерпретируются как эффективные уравнения движения фоновых полей [1–4]. Стандартный ковариантный метод получения этих уравнений основывается на принципе квантовой вейлевской инвариантности, согласно которому перенормированный оператор тензора энергии-импульса должен обращаться в ноль. Общая структура оператора следа в теории бозонных струн, взаимодействующих с безмассовыми фоновыми полями, детально изучена в работах [5, 6] (см. также обзоры [7, 8]).

Очевидно, что проблема аномалий проявляет себя и при каноническом квантовании струнных моделей. Естественнo ожидать, что каноническое и ковариантное рассмотрение одной и той же теории должны вести к согласованным результатам. Однако каноническая формулировка теории струн в фоновых полях содержит некоторое число слабо изученных вопросов – не решен вопрос об общем виде аномалий, не исследована их алгебраическая структура, не ясно, что в каноническом подходе является аналогом бета-функций. В этой работе мы и хотим обсудить отмеченные вопросы и тем самым установить связь между канонической и ковариантной формулировками теории струны в фоновых полях. Основой нашего рассмотрения будет служить процедура обобщенного канонического квантования, или процедура Баталина–Фраджина–Вилковыского (БФВ) [9–14] (см. также книгу [15]). Появление аномалии в рамках этой процедуры связано

с возможным нарушением условия нильпотентности фермионного оператора Ω , генерирующего квантовую калибровочную алгебру.

Обобщенное каноническое квантование моделей свободных струн хорошо изучено. Построены операторы Ω и Ω^2 , найдены критические значения параметров, при которых $\Omega^2 = 0$. Применение БФВ-подхода к моделям струн в фоновых полях представляет собой самостоятельную проблему. Эти модели описываются достаточно сложными неквадратичными лагранжианами, и их изучение требует развития подходящей теории возмущений. Пример такой теории возмущений приведен в работе [16], где рассмотрена бозонная струна в безмассовых фоновых полях и оператор Ω^2 построен в виде разложения по степеням $\hbar$ с использованием нормальных координат. При этом детально изучался низший порядок разложения и обсуждалось соответствие с ковариантным подходом.

Однако, как будет показано ниже, общая структура аномалии при каноническом квантовании может быть найдена с использованием только алгебраических свойств Ω без явного построения оператора Ω^2 и, следовательно, без явных расчетов по теории возмущений. В результате мы имеем возможность разделить проблему нахождения общего вида оператора аномалии с точностью до определенного произвола и проблему вычислений (по теории возмущений или непертурбативно), фиксирующих этот произвол.

Алгебраический анализ аномалии для моделей свободных струн в рамках БФВ-подхода был проведен в работах [17, 18]. Здесь мы рассмотрим теорию бозонной струны, взаимодействующей с фоновыми гравитационным полем и антисимметричным тензорным полем.

Предлагаемая статья организована следующим образом. В разделе 2 обсуждаются классические аспекты модели, использующиеся в последующих разделах. Раздел 3 посвящен выводу уравнения, которому удовлетворяет символ оператора аномалии. В разделе 4 находится решение этого уравнения и устанавливается общий вид аномалии. Раздел 5 посвящен обсуждению произвола в определении аномалии. В заключении рассматриваются основные результаты работы и проводится сравнение с ковариантным подходом.

2. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Замкнутая бозонная струна, взаимодействующая с фоновым гравитационным полем $G_{\mu\nu}(x)$ и антисимметричным тензорным полем $A_{\mu\nu}(x)$, описывается действием

$$S = -\frac{1}{2} \int d^2\sigma \left\{ \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu G_{\mu\nu}(x) + \varepsilon^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu A_{\mu\nu}(x) \right\}. \quad (1)$$

Здесь $G_{\mu\nu}(x)$ – метрика D -мерного пространства-времени с координатами x^μ ; $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$; g_{ab} – метрика двумерного мирового листа струны; $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$ – координаты на мировом листе; $a, b = 0, 1$; $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$, $\varepsilon^{01} = 1$.

Теория обладает двумя связями первого рода [16]

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \frac{1}{4} G_{\mu\nu} \left[G^{\mu\alpha} (p_\alpha + A_{\alpha\lambda} x'^\lambda) - x'^\mu \right] \left[G^{\nu\beta} (p_\beta + A_{\beta\rho} x'^\rho) - x'^\nu \right], \\ \bar{L}(\sigma) &= \frac{1}{4} G_{\mu\nu} \left[G^{\mu\alpha} (p_\alpha + A_{\alpha\lambda} x'^\lambda) + x'^\mu \right] \left[G^{\nu\beta} (p_\beta + A_{\beta\rho} x'^\rho) + x'^\nu \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где p_μ – импульсы, канонически сопряженные струнным координатам x^μ и $x'^\mu \equiv \partial_\sigma x'^\mu$. Нетрудно показать, что связи (2) удовлетворяют алгебре Вирасоро (в терминах скобок Пуассона)

$$\begin{aligned}\{L(\sigma), L(\sigma')\} &= -(L(\sigma) + L(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{\bar{L}(\sigma), \bar{L}(\sigma')\} &= (\bar{L}(\sigma) + \bar{L}(\sigma')) \delta'(\sigma - \sigma'), \\ \{L(\sigma), \bar{L}(\sigma')\} &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Следуя БФВ-подходу, мы введем гостовские поля η , $\mathcal{P}$ и $\bar{\eta}$, $\bar{\mathcal{P}}$, отвечающие связям L и $\bar{L}$, соответственно, и построим заряд Ω

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(L(\sigma) \eta(\sigma) + \bar{L}(\sigma') \bar{\eta}(\sigma') - \mathcal{P}(\sigma) \eta(\sigma) \eta'(\sigma) + \bar{\mathcal{P}}(\sigma) \bar{\eta}(\sigma) \bar{\eta}'(\sigma) \right). \quad (4)$$

Заряд Ω (4) генерирует канонические БРСТ-преобразования

$$\delta B = \{B, \Omega\} \varepsilon, \quad (5)$$

где ε – постоянный фермионный параметр, а B – произвольный функционал на расширенном фазовом пространстве.

Соотношение (5) ведет к следующим равенствам, играющим важную роль в дальнейшем рассмотрении:

$$\begin{aligned}\delta \eta &= -\eta \eta' \varepsilon, \quad \delta \bar{\eta} = \bar{\eta} \bar{\eta}' \varepsilon, \quad \delta x^\mu = \frac{1}{2} (\eta V^\mu + \bar{\eta} \bar{V}^\mu) \varepsilon, \\ \delta p_\mu &= \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma (\bar{\eta} \bar{V}_\mu - \eta V_\mu) + \frac{1}{2} \partial_\mu G_{\alpha\beta} V^\alpha \bar{V}^\beta (\eta + \bar{\eta}) + \right. \\ &\quad \left. + (\eta V^\alpha + \bar{\eta} \bar{V}^\alpha) (\partial_\mu A_{\nu\alpha} + \partial_\nu A_{\alpha\mu}) x'^\nu + \partial_\sigma (\eta V^\nu + \bar{\eta} \bar{V}^\nu) A_{\nu\mu} \right) \varepsilon, \\ \delta V^\mu &= \left(-(\eta V^\mu)' - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta (\eta + \bar{\eta}) \right) \varepsilon, \\ \delta \bar{V}^\mu &= \left((\bar{\eta} \bar{V}^\mu)' - \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta (\eta + \bar{\eta}) \right) \varepsilon.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) &= \Gamma_{\alpha\beta}^{(0)\mu}(x) + T_{\alpha\beta}^\mu(x); \\ T_{\alpha\beta}^\mu(x) &= \frac{1}{2} G^{\mu\nu} (\partial_\alpha A_{\beta\nu} + \partial_\beta A_{\nu\alpha} + \partial_\nu A_{\alpha\beta}),\end{aligned}\quad (7)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^{(0)\mu}(x)$ – символы Кристоффеля, соответствующие фоновой метрике $G_{\mu\nu}$. Соотношения (7) показывают, что $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)$ представляет собой связность с кручением, причем в роли тензора кручения выступает $T_{\alpha\beta}^\mu$. Поля V^μ , $\bar{V}^\mu$, входящие в равенства (6), имеют следующий вид:

$$V^\mu = G^{\mu\alpha} \left[p_\alpha - (G_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) x'^\beta \right], \quad \bar{V}^\mu = G^{\mu\alpha} \left[p_\alpha + (G_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}) x'^\beta \right]. \quad (8)$$

В терминах полей (8) связи (2) записываются в простой форме

$$L(\sigma) = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}V^\mu V^\nu, \quad \bar{L}(\sigma) = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}\bar{V}^\mu \bar{V}^\nu.$$

Очевидно, что поля V^μ , $\bar{V}^\mu$ представляют собой обобщение полей Фубини, хорошо известных в теории струн. Как будет видно, обобщенные поля Фубини (8) исключительно полезны для дальнейшего анализа.

3. ОПЕРАТОР АНОМАЛИИ

Основные аспекты канонического квантования теории с действием (1) рассмотрены в работе [16]. Операторы связей L и $\bar{L}$ представляются как функции операторов рождения и уничтожения осциллирующих мод струны и операторов импульсов и координат нулевых мод. При этом предполагается, что операторы L и $\bar{L}$ записаны в некоторой нормальной форме (например, проведено виновское упорядочение для осциллирующих мод и вейлевское для нулевых [14, 16]). Оператор Ω определяется соотношением (4), где L и $\bar{L}$ – операторы связей, а η , $\mathcal{P}$ и $\bar{\eta}$, $\bar{\mathcal{P}}$ – гостовские операторы, удовлетворяющие известным коммутационным соотношениям [9–15].

В рамках БФВ-метода теория называется аномальной, если выполнено следующее соотношение:

$$[\Omega, \Omega] \equiv A \neq 0. \quad (9)$$

Скобки $[\ ,]$ обозначают суперкоммутатор. Если $A = 0$, теория называется безаномальной. Оператор A называется оператором аномалии.

Используя (супер)тождество Якоби¹⁾ для оператора Ω

$$[\Omega, [\Omega, \Omega]] = 0 \quad (10)$$

и определение оператора аномалии (9), можно записать

$$[\Omega, A] = 0. \quad (11)$$

Соотношение (11) можно рассматривать как уравнение для нахождения оператора A . По существу, цель данной работы состоит в описании общего решения этого уравнения.

С учетом явного вида оператора Ω и соотношения (9) оператор аномалии записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} A = \int d\sigma d\sigma' \Big\{ & \eta(\sigma)\eta(\sigma') \left([L(\sigma), L(\sigma')] + i\hbar(L(\sigma) + L(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') \right) + \\ & + \bar{\eta}(\sigma)\bar{\eta}(\sigma') \left([\bar{L}(\sigma), \bar{L}(\sigma')] - i\hbar(\bar{L}(\sigma) + \bar{L}(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') \right) + \\ & + i\hbar^2 \frac{13}{12\pi} \left(\eta(\sigma)\eta(\sigma') - \bar{\eta}(\sigma)\bar{\eta}(\sigma') \right) \delta'''(\sigma - \sigma') + \\ & + \left(\eta(\sigma)\bar{\eta}(\sigma') - \bar{\eta}(\sigma)\eta(\sigma') \right) [L(\sigma), \bar{L}(\sigma')] \Big\}. \end{aligned} \quad (12)$$

¹⁾ В полевых теориях выражения типа $[\Omega, \Omega]$ представляют собой составные операторы и могут расходиться. Поэтому они нуждаются в регуляризации и перенормировке. Мы предполагаем, что после перенормировки (супер)тождество Якоби сохраняется.

Для дальнейшего анализа мы будем использовать технику символов операторов (см., например, [19]). Пусть оператор A записан в нормальной форме, соответствующий символ обозначим $\mathcal{A}$. Определение подходящей нормальной формы и детали построения символов даны в работе [16]. Определим также размерности основных объектов теории²⁾

$$\begin{aligned} \dim x^\mu &= 0, & \dim p_\mu &= 1, & \dim \eta &= \dim \bar{\eta} = c, \\ \dim \mathcal{P} &= \dim \bar{\mathcal{P}} = 1 - c, & \dim L &= \dim \bar{L} = 2, \\ \dim \Omega &= 1 + c, & \dim A &= 2 + 2c. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь c – произвольный параметр, указывающий на наличие гостов. Символы операторов связей L и $\bar{L}$ обозначим теми же буквами. Примем во внимание, что коммутатору операторов отвечает *-коммутатор соответствующих символов [19]. Тогда для *-коммутатора символов L и $\bar{L}$ получим

$$\begin{aligned} L(\sigma) * L(\sigma') - L(\sigma') * L(\sigma) &= i\hbar \{L(\sigma), L(\sigma')\} + \mathcal{A}^{(1)}(\sigma, \sigma'), \\ \bar{L}(\sigma) * \bar{L}(\sigma') - \bar{L}(\sigma') * \bar{L}(\sigma) &= i\hbar \{\bar{L}(\sigma), \bar{L}(\sigma')\} + \mathcal{A}^{(2)}(\sigma, \sigma'), \\ L(\sigma) * \bar{L}(\sigma') - \bar{L}(\sigma') * L(\sigma) &= \mathcal{A}^{(3)}(\sigma, \sigma'), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathcal{A}^{(k)}(\sigma, \sigma')$ появляются в результате приведения операторов к нормальной форме и представляют собой ряды по степеням $\hbar$. В теории свободной струны связи являются квадратичными функциями канонических переменных и указанные ряды содержат не более чем второй порядок по $\hbar$. В теории струн, взаимодействующих с фоновыми полями, ряды для $\mathcal{A}$ содержат все порядки по $\hbar$ и их явное вычисление представляет собой сложную проблему.

Из соотношений (14) следует, что $\dim \mathcal{A}^{(k)} = 4$, $\mathcal{A}^{(1)}(\sigma, \sigma') = -\mathcal{A}^{(1)}(\sigma', \sigma)$, $\mathcal{A}^{(2)}(\sigma, \sigma') = -\mathcal{A}^{(2)}(\sigma', \sigma)$. Используя соображения локальности, запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{2}(f_1(\sigma) + f_1(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}(f_3(\sigma) + f_3(\sigma'))\delta'''(\sigma - \sigma'), \\ \mathcal{A}^{(2)}(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{2}(g_1(\sigma) + g_1(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}(g_3(\sigma) + g_3(\sigma'))\delta'''(\sigma - \sigma'), \\ \mathcal{A}^{(3)}(\sigma, \sigma') &= \frac{1}{2}(h_0(\sigma) + h_0(\sigma'))\delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}(h_1(\sigma) + h_1(\sigma'))\delta'(\sigma - \sigma') + \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_2(\sigma) + h_2(\sigma'))\delta''(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}(h_3(\sigma) + h_3(\sigma'))\delta'''(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (15)$$

где f_1, g_1, f_3, g_3, h_i ($i = 0, \dots, 3$) – произвольные функции от x, p , причем $\dim f_1 = \dim g_1 = 2$, $\dim f_3 = \dim g_3 = 0$, $\dim h_i = 3 - i$.

²⁾ Действие (1) записано в терминах безразмерных координат x^μ , связанных с размерными струнными координатами X^μ как $x^\mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha'}} X^\mu$.

Пусть $\mathcal{A}$ – символ оператора аномалии. Используя уравнения (14), (15), мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int d\sigma d\sigma' \left\{ i\hbar^2 \frac{13}{12\pi} (\eta\eta''' + \bar{\eta}\bar{\eta}''') + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \right\}, \\ a_0 &= 2\eta\bar{\eta}h_0, \\ a_1 &= \eta\eta'f_1 + \bar{\eta}\bar{\eta}'g_1 + 2(\eta\bar{\eta}' - \bar{\eta}\eta')h_1, \\ a_2 &= 2(\eta\bar{\eta}'' - \bar{\eta}\eta'')h_2, \\ a_3 &= \eta\eta'''f_3 + \bar{\eta}\bar{\eta}'''g_3 + 2(\eta\bar{\eta}''' - \bar{\eta}\eta''')h_3.\end{aligned}\tag{16}$$

Таким образом, структура аномалии определяется произвольными функциями f_1, g_1, f_3, g_3, h_i .

Уравнение для символа оператора аномалии, соответствующее операторному уравнению (11), должно иметь вид

$$\hat{\delta}\mathcal{A} = 0,\tag{17}$$

где оператор $\hat{\delta}$ имеет структуру

$$\hat{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \delta_n,\tag{18}$$

причем $\delta_0 \equiv \delta$ есть оператор классического канонического БРСТ-преобразования (5).

Будем искать функционал $\mathcal{A}$ в виде разложения по степеням $\hbar$:

$$\mathcal{A} = i \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n+1} \mathcal{A}_n,\tag{19}$$

где функционалы $\mathcal{A}_n$ можно рассматривать как квантовые петлевые поправки. Нетрудно показать, что уравнения (17)–(19) ведут к соотношениям

$$\delta\mathcal{A}_1 = 0,\tag{20}$$

$$\delta\mathcal{A}_n = G_n, \quad n \geq 2,\tag{21}$$

$$G_n = \sum_{m=1}^n \delta_m \mathcal{A}_{n-m}.$$

Уравнение (20) определяет однопетлевой вклад, уравнения (21) позволяют найти высшие квантовые поправки.

4. ОБЩИЙ ВИД АНОМАЛИИ

Мы начнем с уравнения (20) для однопетлевого вклада. С учетом соотношений (16) перепишем уравнение (20) в виде

$$\sum_{i=0}^3 \delta a_i = \partial_\sigma \chi,\tag{22}$$

где χ – некоторая функция, $\dim \chi = \dim a - 1$. Наличие уравнения (22) означает, что функции f_1, g_1, f_3, g_3, h_i в соотношениях (16) не могут быть произвольными.

Пусть $\Psi(x, p)$ — одна из этих функций с размерностью $\dim \Psi$. Так как единственными объектами, несущими размерность, являются $x'^\mu, p_\mu, x''^\mu, p'_\mu, \dots$, то функции Ψ могут быть записаны в виде полиномов по размерным объектам с коэффициентами, зависящими от x^μ . Вместо объектов $x'^\mu, p_\mu, x''^\mu, p'_\mu, \dots$ удобно рассматривать базис $V_\mu, \bar{V}_\mu, V'_\mu, \bar{V}'_\mu, \dots$. Например, для функции f_1 ($\dim f_1 = 2$) имеем

$$f_1 = \beta_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + \alpha_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \bar{\alpha}_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu + \gamma_\mu V'^\mu + \bar{\gamma}_\mu \bar{V}'^\mu, \quad (23)$$

где $\beta_{\mu\nu}, \alpha_{\mu\nu}, \bar{\alpha}_{\mu\nu}, \gamma_\mu, \bar{\gamma}_\mu$ — произвольные функции только от x^μ . Аналогичные соотношения можно записать и для h_i, g_1, f_2, g_2 . В частности, функции f_3, g_3, h_3 безразмерны и, значит, не зависят от $V_\mu, \bar{V}_\mu$ и их производных. Принимая во внимание соотношения (6), получим

$$\delta \Psi = \sum_{n=0}^{\dim \Psi} \left(\Psi^{(n)} \partial_\sigma^n \eta + \bar{\Psi}^{(n)} \partial_\sigma^n \bar{\eta} \right) \varepsilon, \quad (24)$$

где $\Psi^{(n)}, \bar{\Psi}^{(n)}$ — функции от x^μ, p_μ , явный вид которых приведен в приложении.

Рассмотрим уравнение (22). В соответствии с гостовской структурой левой части функция χ должна иметь вид

$$\chi = \sum (\text{ghost}) \lambda(x, p), \quad (25)$$

т.е. должна представляться суммой членов, каждый из которых есть произведение гостовских вкладов (ghost) и функций λ , являющихся полиномами по $V, \bar{V}, V', \bar{V}'$ с коэффициентами, зависящими только от x^μ . Используя соотношения (22), (25), получим

$$\sum_{i=0}^3 \delta a_i = \sum [(\text{ghost})' \lambda + (\text{ghost}) \lambda'], \quad (26)$$

где δa_i можно найти на основе соотношений (6), (16), (24).

Очевидно, что только при специальных ограничениях на функции Ψ выражение $\sum_{i=0}^3 \delta a_i$ будет иметь вид, определяемый уравнением (26). Непосредственное вычисление δa_i с использованием соотношений (16), (6), (25), (26) и приложения приводит к следующему результату:

$$\sum_{i=0}^3 a_i = (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + (\eta \eta''' \Lambda + \bar{\eta} \bar{\eta}''' \bar{\Lambda}). \quad (27)$$

Здесь $\beta_{\mu\nu}(x)$ — произвольная функция от x^μ , а Λ и $\bar{\Lambda}$ — произвольные постоянные. Соответствующая функция χ (22) имеет вид

$$\chi = \left(\bar{\eta} \eta (\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu - \bar{\eta} \bar{\eta}' \eta'' \bar{\Lambda} - \eta \eta' \eta'' \Lambda \right) \varepsilon. \quad (28)$$

В результате однопетлевой вклад в аномалию записывается следующим образом:

$$\mathcal{A}_1 = i \int d\sigma \left\{ (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu}^{(1)}(x) V^\mu \bar{V}^\nu + \eta \eta''' \beta^{(1)} + \bar{\eta} \bar{\eta}''' \bar{\beta}^{(1)} \right\}. \quad (29)$$

Здесь $\beta^{(1)} = \frac{13}{12\pi} + \Lambda^{(1)}$, $\bar{\beta}^{(1)} = \frac{13}{12\pi} + \bar{\Lambda}^{(1)}$ и индекс (1) указывает на однопетлевое приближение.

Перейдем к рассмотрению уравнений (21). Представим

$$\mathcal{A}_n = \int d\sigma a^{(n)}, \quad G_n = \int d\sigma g^{(n)}. \quad (30)$$

Тогда из уравнений (21) имеем

$$\delta a^{(n)} = g^{(n)} + \partial_\sigma \chi^{(n)}, \quad (31)$$

где $\chi^{(n)}$ — некоторая функция. Так как $\delta^2 a^{(n)} \equiv 0$, то из соотношения (31) находим

$$\delta g^{(n)} = -\partial_\sigma \delta \chi^{(n)}. \quad (32)$$

Решение этого уравнения может быть записано так:

$$g^{(n)} = g_0^{(n)} + \partial_\sigma \kappa^{(n)}, \quad (33)$$

где $\kappa^{(n)}$ — некоторая функция и

$$\delta g_0^{(n)} = 0. \quad (34)$$

Для нахождения решения уравнения (34) примем во внимание, что гостовская структура $g_0^{(n)}$ определяется гостовской структурой $\delta a^{(n)}$ и $\dim g_0^{(n)} = 4 + 3c$. Согласно соотношениям (30), (16) $a^{(n)} \sim \sum_{i=0}^3 a_i^{(n)}$. Вычисляя $\delta a^{(n)}$ с использованием (6), можем найти общее выражение для $g_0^{(n)}$. Подставляя его в уравнение (34), получим окончательно $g_0^{(n)} = 0$ и, следовательно, $G_n = 0$. В результате уравнения (21), определяющие высшие квантовые вклады в аномалию, сводятся к уравнению

$$\delta \mathcal{A}_n = 0. \quad (35)$$

Но это уравнение уже было изучено при рассмотрении однопетлевого вклада. Таким образом, мы можем сразу выписать общее выражение для аномалии:

$$\mathcal{A} = i\hbar^2 \int d\sigma \left\{ (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu}(x) V^\mu \bar{V}^\nu + \eta \eta''' \beta + \bar{\eta} \bar{\eta}''' \bar{\beta} \right\}. \quad (36)$$

Здесь $\beta_{\mu\nu}(x)$ — произвольная функция от x^μ , а β и $\bar{\beta}$ — произвольные константы.

Для нахождения функций и констант, входящих в соотношение (36), необходимо провести дополнительные вычисления, основанные на конкретной пертурбативной схеме. Пример таких вычислений приведен в работе [16]. Соотношение (36) представляет собой результат общего вида, не зависящий от конкретной схемы вычислений и основанный только на алгебраических свойствах оператора Ω . Очевидно, что полученный результат может служить критерием для построения адекватной теории возмущений и упростить непосредственный процесс вычислений.

5. ПРОИЗВОЛ В НАХОЖДЕНИИ АНОМАЛИИ

Соотношение (36) было получено как решение уравнения

$$\delta\mathcal{A} = 0. \quad (37)$$

Исследуем произвол в решении этого уравнения. Очевидно, что если функционал $\mathcal{A}$ – решение уравнения (37), то $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \delta\Theta$, где Θ – произвольный функционал, тоже есть решение уравнения (37). Записывая

$$\tilde{\mathcal{A}} = i\hbar^2 \int d\sigma \tilde{a}, \quad \Theta = i\hbar^2 \int d\sigma \theta, \quad (38)$$

получим

$$\tilde{a} = a + \delta\theta + \partial_\sigma\omega, \quad (39)$$

где ω – некоторая функция. Здесь $\dim \theta = 2 + c$, $\dim \omega = 2 + 2c$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \tilde{\beta}_{\mu\nu}(x) Y^\mu \bar{Y}^\nu + \eta\eta''' \tilde{\beta} + \bar{\eta}\bar{\eta}''' \tilde{\bar{\beta}} = \\ = (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu}(x) Y^\mu \bar{Y}^\nu + \eta\eta''' \beta + \bar{\eta}\bar{\eta}''' \bar{\beta} + \delta\theta + \partial_\sigma\omega. \end{aligned} \quad (40)$$

Так как θ линейно по гостовским полям, а ω квадратично, мы можем записать

$$\begin{aligned} \theta &= \eta M + \bar{\eta} \bar{M} + \eta' N + \bar{\eta}' \bar{N} + \eta'' P + \bar{\eta}'' \bar{P}, \\ \omega &= \eta\eta' K + \bar{\eta}\bar{\eta}' \bar{K} + \eta\bar{\eta} L + \eta' \bar{\eta} Q + \eta' \eta' \bar{Q} + \\ &\quad + \eta\eta'' U + \bar{\eta}\bar{\eta}'' \bar{U} + \eta'' \bar{\eta} W + \bar{\eta}'' \eta \bar{W}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $\varphi \equiv (M, \bar{M}, N, \bar{N}, P, \bar{P})$ и $\rho \equiv (K, \bar{K}, L, Q, \bar{Q}, U, \bar{U}, W, \bar{W})$ – некоторые функции, размерность которых находится из соотношений (41).

Рассмотрим член $\partial_\sigma\omega$ в правой части (40). Вычисляя $\partial_\sigma\omega$, где ω дается соотношением (41), и сравнивая гостовскую структуру $\partial_\sigma\omega$ с гостовской структурой левой части (40), получим $\omega = 0$.

Рассмотрим член $\delta\theta$ в правой части (40). Из соотношений (40), (41) следует, что $\dim M = \dim \bar{M} = 2$, $\dim N = \dim \bar{N} = 1$, $\dim P = \dim \bar{P} = 0$. Функции φ могут быть разложены по базису $V_\mu, \bar{V}_\mu, V'_\mu, \bar{V}'_\mu$ с учетом соответствующей размерности. Вычисляя $\delta\theta$ и требуя, чтобы гостовская структура $\delta\theta$ совпадала с гостовской структурой левой части (40), найдем $\Theta = 0$.

Таким образом, соотношение (36) для аномалии $\mathcal{A}$ определено однозначно. Единственный произвол связан с функциями $\beta_{\mu\nu}$ и константами $\beta, \bar{\beta}$, которые не могут быть найдены в рамках чисто алгебраического анализа.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели проблему аномалии в теории струн, взаимодействующих с фоновыми полями, в рамках обобщенного канонического квантования. Эта проблема сформулирована в терминах символов операторов как проблема решения уравнения

$\delta\mathcal{A}(\eta, \bar{\eta}, x, p) = 0$, где δ – каноническое БРСТ-преобразование (5), и $\mathcal{A}$ – символ оператора аномалии. Найдено общее решение указанного уравнения, и исследован произвол в решении. Мы видим, что проблема аномалии сводится к проблеме когомологии для оператора δ (5), действующего в пространстве c -числовых функций, зависящих от координат расширенного фазового пространства.

Интересно сравнить аномалию (36), полученную в канонической формулировке, с вейлевской аномалией в ковариантном подходе. Общая форма вейлевской аномалии имеет вид [5, 6]

$$\left[\sqrt{-g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \bar{\beta}_{(\mu\nu)}^G(x) \right] + \left[\varepsilon^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \bar{\beta}_{[\mu\nu]}^A(x) \right] + \left[\sqrt{-g} R^{(2)} \bar{\beta}^\Phi(x) \right], \quad (42)$$

где $R^{(2)}$ – скалярная кривизна мирового листа струны, квадратные скобки обозначают перенормированные составные операторы и $\bar{\beta}_{(\mu\nu)}^G$, $\bar{\beta}_{[\mu\nu]}^A$, $\bar{\beta}^\Phi$ – так называемые модифицированные бета-функции [5, 6]. Эти бета-функции удовлетворяют соотношениям Курки–Паффутти [20], согласно которым $\bar{\beta}^\Phi = \text{const}$ при $\bar{\beta}_{(\mu\nu)}^G = 0$, $\bar{\beta}_{[\mu\nu]}^A = 0$. Выражение (42) решает проблему нахождения общей формы вейлевской аномалии и разделяет эту проблему и проблему явного вычисления бета-функции.

Общая форма аномалии в каноническом подходе дается соотношением (36). Соотношение (36) решает проблему нахождения общей формы аномалии и разделяет эту проблему и проблему явного вычисления функции $\beta_{\mu\nu}$ и констант β , $\bar{\beta}$. Мы видим, что выражения $\sqrt{-g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \bar{\beta}_{(\mu\nu)}^G(x) + \varepsilon^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \bar{\beta}_{[\mu\nu]}^A(x)$ и $\sqrt{-g} R^{(2)} \bar{\beta}^\Phi(x)$ аналогичны в нашем подходе выражениям $i\hbar^2 (\eta + \bar{\eta})(\eta - \bar{\eta})' \beta_{\mu\nu}(x) V^\mu \bar{V}^\nu$ и $i\hbar^2 (\eta\eta''' \beta + \bar{\eta}\bar{\eta}''' \bar{\beta})$, соответственно. Поэтому $\beta_{(\mu\nu)}$, $\beta_{[\mu\nu]}$, β , $\bar{\beta}$ представляют собой канонический аналог бета-функций.

Явные вычисления функций $\beta_{\mu\nu}$ и констант β , $\bar{\beta}$ в однопетлевом приближении уже проводились в [16] для $A_{\mu\nu} = 0$, и было показано, что в этом приближении $\beta_{(\mu\nu)} = \bar{\beta}_{\mu\nu}^G$, $\beta^\Phi = \beta = \bar{\beta}$. Вычисления в высших петлях также могут быть проведены с использованием техники, развитой в работе [16].

Заметим, наконец, что известная аномалия свободной струны получается из соотношения (36) при $\beta_{\mu\nu} = 0$, $\beta = \bar{\beta} \sim D - 26$.

Авторы признательны И.В.Тютину за обсуждение некоторых аспектов работы. Данная работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (грант RI1300) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-02-03234).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем приложении приведем явный вид функций $\Psi^{(n)}$ и $\bar{\Psi}^{(n)}$ из соотношения (24) при значениях $\dim \Psi = 2$, $\dim \Psi = 1$ и $\dim \Psi = 0$. Эти функции используются при получении общего вида аномалии и при изучении произвола в нахождении аномалии. Значения функций $\Psi^{(n)}$ и $\bar{\Psi}^{(n)}$ находятся согласно выражению (5) с использованием БРСТ-преобразований (6).

А. $\dim \Psi = 2$ (т.е. Ψ – функция типа f_1, h_1 и т.д.),
 $\Psi = F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + F_2(x)_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu + F_4(x)_\mu V'^\mu + F_5(x)_\mu \bar{V}'^\mu$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)} = & \frac{1}{2} (\partial_\lambda F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + \partial_\lambda F_2(x)_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \partial_\lambda F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu + \\ & + \partial_\lambda F_4(x)_\mu V'^\mu + \partial_\lambda F_5(x)_\mu \bar{V}'^\mu) V^\lambda - F_1(x)_{\mu\nu} V'^\mu \bar{V}^\nu - \\ & - \frac{1}{2} F_1(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \frac{1}{2} F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta - 2F_2(x)_{\mu\nu} V'^\mu V^\nu - \\ & - F_2(x)_{\mu\nu} V^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta - F_4(x)_\mu V''^\mu - \\ & - \frac{1}{2} F_4(x)_\mu \partial_\sigma \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta \right] - \frac{1}{2} F_5(x)_\mu \partial_\sigma \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} = & -F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu - 2F_2(x)_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - 2F_4(x)_\mu V'^\mu - \\ & - \frac{1}{2} F_4(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \frac{1}{2} F_5(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta, \end{aligned}$$

$$\Psi^{(2)} = -F_4(x)_\mu V^\mu,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(0)} = & \frac{1}{2} (\partial_\lambda F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + \partial_\lambda F_2(x)_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \partial_\lambda F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu + \\ & + \partial_\lambda F_4(x)_\mu V'^\mu + \partial_\lambda F_5(x)_\mu \bar{V}'^\mu) \bar{V}^\lambda - \frac{1}{2} F_1(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \\ & - F_2(x)_{\mu\nu} V^\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta + F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}'^\nu - \frac{1}{2} F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta + \\ & + 2F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}'^\nu - F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta + F_5(x)_\mu \bar{V}''^\mu - \\ & - \frac{1}{2} F_5(x)_\mu \partial_\sigma \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta \right] - \frac{1}{2} F_4(x)_\mu \partial_\sigma \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(1)} = & F_1(x)_{\mu\nu} V^\mu \bar{V}^\nu + 2F_3(x)_{\mu\nu} \bar{V}^\mu \bar{V}^\nu - 2F_5(x)_\mu \bar{V}'^\mu - \\ & - \frac{1}{2} F_4(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \frac{1}{2} F_5(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta, \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}^{(2)} = F_5(x)_\mu \bar{V}^\mu.$$

Б. $\dim \Psi = 1$ (т.е. Ψ – функция типа h_2 и т.д.), $\Psi = P_1(x)_\mu V^\mu + P_2(x)_\mu \bar{V}^\mu$:

$$\begin{aligned} \Psi^{(0)} = & \frac{1}{2} \partial_\lambda P_1(x)_\mu V^\mu V^\lambda + \frac{1}{2} \partial_\lambda P_2(x)_\mu \bar{V}^\mu V^\lambda - P_1(x)_\mu V'^\mu - \\ & - \frac{1}{2} P_1(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \frac{1}{2} P_2(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta, \end{aligned}$$

$$\Psi^{(1)} = -P_1(x)_\mu V^\mu,$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^{(0)} = & \frac{1}{2} \partial_\lambda P_1(x)_\mu V^\mu \bar{V}^\lambda + \frac{1}{2} \partial_\lambda P_2(x)_\mu \bar{V}^\mu \bar{V}^\lambda - P_2(x)_\mu \bar{V}'^\mu - \\ & - \frac{1}{2} P_1(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \bar{V}^\beta - \frac{1}{2} P_2(x)_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^\alpha \bar{V}^\beta, \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}^{(1)} = P_2(x)_\mu \bar{V}^\mu.$$

Напомним, что $F_{n\mu\nu}$ ($n = 1, 2, 3$), $F_{m\mu}$ ($m = 4, 5$), $P_{k\mu}$ ($k = 1, 2$) суть функции только x^μ .

В. $\dim \Psi = 0$ (т.е. Ψ — функция типа f_3 и т.д.), $\Psi = Z(x)$:

$$\Psi^{(0)} = \frac{1}{2} \partial_\lambda Z_1(x)_\mu V^\lambda, \quad \overline{\Psi}^{(0)} = \frac{1}{2} \partial_\lambda Z_1(x)_\mu V^\lambda.$$

Выражения для $\Psi^{(n)}$, $\overline{\Psi}^{(n)}$ при $\dim = 3$ являются достаточно громоздкими и здесь не приводятся.

Список литературы

- [1] *C.Lovelace* // Phys. Lett. B. 1984. V. 135. P. 75.
- [2] *E.S.Fradkin, A.A.Tseytlin* // Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316; // Nucl. Phys. B. 1985. V. 261. P. 1.
- [3] *C.Callan, E.Martinec, M.Perry, D.Friedan* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 593.
- [4] *A.Sen* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1846; // Phys. Rev. 1985. V. D32. P. 210.
- [5] *A.A.Tseytlin* // Nucl. Phys. B. 1987. V. 294. P. 383.
- [6] *H.Osborn* // Nucl. Phys. B. 1987. V. 294. P. 595.
- [7] *A.A.Tseytlin* // Int. J. Mod. Phys. 1989. V. A4. P. 4249.
- [8] *H.Osborn* // Ann. Phys. 1990. V. 200. P. 1.
- [9] *E.S.Fradkin, G.A.Vilkovisky* // Phys. Lett. B. 1975. V. 55. P. 224.
- [10] *I.A.Batalin, G.A.Vilkovisky* // Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 409.
- [11] *E.S.Fradkin, T.E.Fradkina* // Phys. Lett. B. 1978. V. 72. P. 343.
- [12] *I.A.Batalin, E.S.Fradkin* // Phys. Lett. B. 1983. V. 128. P. 303; // J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 2426; // Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 157; // Nucl. Phys. B. 1987. V. 279. P. 514.
- [13] *I.A.Batalin, E.S.Fradkin* // Riv. Nuovo Cim. 1986. V. 9. P. 1.
- [14] *I.A.Batalin, E.S.Fradkin* // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1988. V. 49. P. 145.
- [15] *M.Henneaux, C.Teitelboim*. Quantization of Gauge System. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1992.
- [16] *I.L.Buchbinder, E.S.Fradkin, S.L.Lyakhovich, V.D.Pershin* // Int. J. Mod. Phys. 1991. V. A6. P. 1211.
- [17] *T.Fujiwara, Y.Igarashi, J.Kubo, K.Maeda* // Nucl. Phys. B. 1993. V. 391. P. 211.
- [18] *T.Fujiwara, Y.Igarashi, M.Koseki, R.Kuriki, T.Tabei* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 425. P. 289.
- [19] *Ф.А.Березин, М.А.Шубин*. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [20] *C.Curci, G.Paffutti* // Nucl. Phys. B. 1987. V. 286. P. 344.

Томский государственный
педагогический университет

Поступила в редакцию
30.X.1995 г.

I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, B. R. Mistchuk, V. D. Pershin **ANOMALY STRUCTURE AT CANONICAL QUANTIZATION** **OF THE BOSONIC STRING IN BACKGROUND FIELDS**

A problem of anomaly at generalized canonical quantization of the bosonic string interacting with background fields of graviton and antisymmetric tensor is considered. Equation for anomaly operator symbol is obtained. A solution of this equation is found and the general form of anomaly operator admissible by quantization procedure is established.