Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Билялов, Симметрический тензор энергии-импульса спинорных полей,
ТМФ, 1996, том 108, номер 2, 306–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:46:44

Р. Ф. Билялов

СИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Для спинорных полей на римановых пространственно-временных многообразиях с произвольной функцией Лагранжа построен симметрический тензор энергии-импульса. Показано, что его можно рассматривать как метрический тензор энергии-импульса.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были получены законы сохранения для спинорных полей в виде дифференциальных соотношений, обращающихся в тождество в силу уравнений поля. В данной работе эти дифференциальные соотношения записаны в виде равенства нулю дивергенции симметрического тензора, который можно принять за тензор энергии-импульса спинорных полей. Построение симметрического тензора энергии-импульса для произвольных полей (тензорных и спинорных) было осуществлено Розенфельдом [2], определившим производную Ли спинорных полей на основе представления о том, что спиноры при преобразованиях координат ведут себя как скаляры. При таком подходе производная Ли спинора получается равной производной по направлению и не является спинором. Поэтому получающиеся в результате применения теоремы Нётер законы сохранения нужно еще записывать в ковариантной форме. Метод симметризации тензора энергии-импульса спинорного поля в случае, если риманово пространство-время допускает вектор Киллинга движений, предложен в работе Левитского [3]. Ковариантное рассмотрение теоремы Нётер по отношению к спинорным полям проведено Левитским и Яппой [4], которым, по-видимому, работа Розенфельда не была известна. Они получили тот же сохраняющийся тензор 2-го ранга, но то, что этот тензор симметричен, в работе замечено не было, поскольку не были использованы все следствия теоремы Нётер.

2. ЗАПИСЬ ТЕОРЕМЫ НЁТЕР ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ В ВИДЕ РАВЕНСТВА НУЛЮ ДИВЕРГЕНЦИИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА [1]

Пусть на римановом пространственно-временном многообразии с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ задано поле ортрепера (e_a^α), $\alpha = 0, 1, 2, 3$ — координатные индексы, $a = 1, 2, 3, 4$ — реперные. Пусть ∇_a — символ ковариантного дифференцирования в ортрепере, ψ — спинорное поле, $\bar{\psi}$ — сопряженное спинорное поле, γ_a — матрицы Дирака, η_{ab} —

компоненты метрического тензора в ортрепере. Функцию Лагранжа возьмем в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \nabla_a \psi, \bar{\psi}, \nabla_a \bar{\psi}, \gamma_a, \eta_{ab})$, предполагая, что она является скаляром относительно координатных преобразований и инвариантом относительно произвольных линейных преобразований репера. Тогда действие $S = \int_{\Omega} \mathcal{L} \sqrt{-g} dx$ – инвариант относительно произвольных преобразований координат. Уравнения поля имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \nabla_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \nabla_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} = 0.$$

В работе [1] была показана возможность рассмотрения спиноров в произвольных (не обязательно ортогональных) реперах и дано теоретико-групповое обоснование для производной Ли спиноров, найденной Косманном [5, 6]. Имеем следующие выражения для производных Ли L_{ξ} вдоль векторного поля ξ^{α} :

$$\begin{aligned} L_{\xi} \psi &= \xi^c \nabla_c \psi + \frac{1}{8} \gamma^c \gamma^d (\nabla_c \xi_d - \nabla_d \xi_c) \psi, \\ L_{\xi} \bar{\psi} &= \xi^c \nabla_c \bar{\psi} - \frac{1}{8} \bar{\psi} \gamma^c \gamma^d (\nabla_c \xi_d - \nabla_d \xi_c), \\ L_{\xi} \nabla_a \psi &= \xi^c \nabla_c \nabla_a \psi + \nabla_a \xi^c \nabla_c \psi + \frac{1}{8} \gamma^c \gamma^d (\nabla_c \xi_d - \nabla_d \xi_c) \nabla_a \psi, \\ L_{\xi} \nabla_a \bar{\psi} &= \xi^c \nabla_c \nabla_a \bar{\psi} + \nabla_a \xi^c \nabla_c \bar{\psi} - \frac{1}{8} \nabla_a \bar{\psi} \gamma^c \gamma^d (\nabla_c \xi_d - \nabla_d \xi_c), \\ L_{\xi} \gamma_a &= \frac{1}{2} (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) \gamma^b, \quad L_{\xi} \eta_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a. \end{aligned}$$

Из условия инвариантности S относительно бесконечно малых преобразований $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + t \xi^{\alpha}$ следует, что

$$\int_{\Omega} (L_{\xi} \mathcal{L} + \mathcal{L} \xi^{\alpha}_{;\alpha}) \sqrt{-g} dx = 0 \quad (1)$$

для любой четырехмерной области Ω , на границе которой ξ^{α} и их первые производные $\partial_{\beta} \xi^{\gamma}$ обращаются в нуль, точка с запятой означает ковариантную производную.

Рассмотрим $L_{\xi} \nabla_a \psi - \nabla_a L_{\xi} \psi$. Имеем

$$L_{\xi} \nabla_a \psi - \nabla_a L_{\xi} \psi = \xi^c (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) \psi + \frac{1}{8} (\nabla_a \nabla_d \xi_c - \nabla_a \nabla_c \xi_d) \gamma^c \gamma^d \psi.$$

Пользуясь тождествами Риччи для перестановки индексов при ковариантном дифференцировании

$$\begin{aligned} (\nabla_b \nabla_a - \nabla_a \nabla_b) \psi &= \frac{1}{4} R_{cdba} \gamma^c \gamma^d \psi, & (\nabla_b \nabla_a - \nabla_a \nabla_b) \bar{\psi} &= -\frac{1}{4} R_{cdba} \bar{\psi} \gamma^c \gamma^d, \\ (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \xi_c &= \xi^d R_{dcba}, & (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \xi^c &= \xi^d R_d{}^c{}_{ba}, \end{aligned}$$

первое слагаемое правой части можно записать последовательно в виде

$$\frac{1}{4} R_{cdba} \xi^b \gamma^c \gamma^d \psi = \frac{1}{4} (\nabla_d \nabla_c - \nabla_c \nabla_d) \xi_a \gamma^c \gamma^d \psi,$$

а второе слагаемое, пользуясь коммутационными свойствами матриц Дирака, — в виде

$$-\frac{1}{4}\eta^{cd}\nabla_a\nabla_d\xi_c\psi + \frac{1}{4}\nabla_a\nabla_d\xi_c\gamma^c\gamma^d\psi.$$

В итоге получаем

$$L_\xi\nabla_a\psi - \nabla_a L_\xi\psi = -\frac{1}{4}\eta^{cd}\nabla_a\nabla_d\xi_c\psi + \frac{1}{8}(2\nabla_d\nabla_c\xi_a - 2\nabla_c\nabla_d\xi_a + 2\nabla_a\nabla_d\xi_c)\gamma^c\gamma^d\psi.$$

Во втором слагаемом (в каждом слагаемом внутри скобок) производим симметризацию по последним двум индексам. В силу тождеств Риччи при альтернации каждого слагаемого по последним двум индексам вся сумма оказывается равной нулю. Поэтому окончательно имеем

$$L_\xi\nabla_a\psi - \nabla_a L_\xi\psi = \frac{1}{8}\{\nabla_d(\nabla_c\xi_a + \nabla_a\xi_c) - \nabla_c(\nabla_d\xi_a + \nabla_a\xi_d)\}\gamma^c\gamma^d\psi.$$

Введем обозначения

$$S^{abc} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\psi}\gamma^b\gamma^c\psi,$$

тогда

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\psi}(L_\xi\nabla_a\psi - \nabla_a L_\xi\psi) = \frac{1}{8}(S^{abc} - S^{acb} + S^{bac} - S^{bca})\nabla_c\nabla_b\xi_a.$$

С точностью до дивергентного слагаемого можно записать

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\psi}(L_\xi\nabla_a\psi - \nabla_a L_\xi\psi) = Q^{ab}\nabla_b\xi_a,$$

где

$$Q^{ab} = \frac{1}{8}\nabla_c(S^{acb} + S^{bca} - S^{abc} - S^{bac}).$$

Аналогично при обозначениях

$$\begin{aligned}\bar{S}^{abc} &= \bar{\psi}\gamma^c\gamma^b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\bar{\psi}}, \\ \bar{Q}^{ab} &= \frac{1}{8}\nabla_c(\bar{S}^{acb} + \bar{S}^{bca} - \bar{S}^{abc} - \bar{S}^{bac})\end{aligned}$$

имеем

$$(L_\xi\nabla_a\bar{\psi} - \nabla_a L_\xi\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\bar{\psi}} = \bar{Q}^{ab}\nabla_b\xi_a.$$

Для $L_\xi \mathcal{L} + \mathcal{L} \xi^\alpha{}_{;\alpha}$ находим

$$\begin{aligned}
 L_\xi \mathcal{L} + \mathcal{L} \xi^\alpha{}_{;\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} L_\xi \psi + L_\xi \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} L_\xi \nabla_a \psi + L_\xi \nabla_a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} + \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_a} L_\xi \gamma_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab}} L_\xi \eta_{ab} + \mathcal{L} \nabla_a \xi^a = \\
 &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} L_\xi \psi + L_\xi \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} (L_\xi \nabla_a \psi - \nabla_a L_\xi \psi) + \\
 &\quad + (L_\xi \nabla_a \bar{\psi} - \nabla_a L_\xi \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_a} L_\xi \gamma_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab}} L_\xi \eta_{ab} + \mathcal{L} \nabla_a \xi^a + \\
 &\quad + \nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} L_\xi \psi + L_\xi \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} \right) \stackrel{\circ}{=} \\
 &\stackrel{\circ}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} (L_\xi \nabla_a \psi - \nabla_a L_\xi \psi) + (L_\xi \nabla_a \bar{\psi} - \nabla_a L_\xi \bar{\psi}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} + \\
 &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_a} L_\xi \gamma_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab}} L_\xi \eta_{ab} + \mathcal{L} \nabla_a \xi^a \stackrel{\circ}{=} \\
 &\stackrel{\circ}{=} T_{\text{сим}}^{ab} \nabla_b \xi_a \stackrel{\circ}{=} \nabla_b T_{\text{сим}}^{ab} \xi_a,
 \end{aligned}$$

откуда и из соотношения (1) следует, что $\nabla_b T_{\text{сим}}^{ab} = 0$. Символ $\stackrel{\circ}{=}$ означает равенство с точностью до дивергентных слагаемых, а симметрический тензор $T_{\text{сим}}^{ab}$ имеет вид

$$T_{\text{сим}}^{ab} = Q^{ab} + \bar{Q}^{ab} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_a} \gamma^b + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_b} \gamma^a \right) + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{ab}} + \mathcal{L} \eta^{ab}.$$

3. ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ТОЖДЕСТВА $\nabla_b T_{\text{сим}}^{ab} = 0$

Если линейное преобразование с матрицей A переводит репер e' в репер e : $e = e' A$, то преобразование Лоренца $L_g^{g'}$, соответствующее переходу от e к e' , определяется как $L_g^{g'} = S_{g'}^{-1} A S_g$, где $S_g, S_{g'}$ — η -симметрические преобразования, удовлетворяющие условию

$$S_g^T g S_g = S_{g'}^T g' S_{g'} = \eta, \quad g = A^T g' A.$$

При этом $\psi' = T(L_g^{g'}) \psi$, где $T(L_g^{g'})$ — спинорное преобразование, соответствующее преобразованию Лоренца $L_g^{g'}$.

При бесконечно малом преобразовании репера, описываемом матрицей с элементами $A_b^a = \delta_b^a + t \delta_m^a \delta_b^n + \dots$, аргументы функции Лагранжа $\mathcal{L}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \psi' &= \psi + \frac{t}{8} \sigma_m{}^n \psi + \dots, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \frac{t}{8} \bar{\psi} \sigma_m{}^n + \dots, \\
 \nabla_a \psi' &= \nabla_a \psi - t \nabla_m \psi \delta_a^n + \frac{t}{8} \sigma_m{}^n \nabla_a \psi + \dots, \\
 \nabla_a \bar{\psi}' &= \nabla_a \bar{\psi} - t \nabla_m \bar{\psi} \delta_a^n - \frac{t}{8} \nabla_a \bar{\psi} \sigma_m{}^n + \dots, \\
 \gamma'_a &= \gamma_a - \frac{t}{2} (\gamma_m \delta_a^n + \eta_{ma} \gamma^n) + \dots, \\
 \eta'_{ab} &= \eta_{ab} - t (\eta_{mb} \delta_a^n + \eta_{am} \delta_b^n) + \dots,
 \end{aligned}$$

где $\sigma^{mn} = \gamma^m \gamma^n - \gamma^n \gamma^m$. Из условия инвариантности функции Лагранжа относительно произвольных линейных преобразований репера следует, что функция Лагранжа $\mathcal{L}$ должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \sigma^{mn} \psi - \bar{\psi} \sigma^{mn} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} \sigma^{mn} \nabla_a \psi - \nabla_a \bar{\psi} \sigma^{mn} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} = \\ & = 4 \left(\nabla^m \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_n \bar{\psi}} - \nabla^n \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_m \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_n \psi} \nabla^m \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_m \psi} \nabla^n \psi \right), \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} & \nabla^m \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_n \bar{\psi}} + \nabla^n \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_m \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_n \psi} \nabla^m \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_m \psi} \nabla^n \psi + \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_n} \gamma^m + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_m} \gamma^n + 4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{mn}} = 0. \end{aligned} \quad (2б)$$

При вычислении $\nabla_b Q^{ab}$ пользуемся тождествами Риччи и уравнениями поля:

$$\begin{aligned} \nabla_b \nabla_c (S^{acb} - S^{abc}) &= (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) S^{acb} = S^{ecb} R_e^a{}_{cb}, \\ \nabla_b \nabla_c S^{bac} &= \nabla_c \nabla_b S^{bac} + S^{bec} R_e^a{}_{cb} = \\ &= \nabla_c \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \gamma^a \gamma^c \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \gamma^a \gamma^c \nabla_b \psi \right) + S^{bec} R_e^a{}_{cb}, \\ \nabla_b \nabla_c S^{bca} &= \nabla_c \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \gamma^c \gamma^a \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \gamma^c \gamma^a \nabla_b \psi \right) + S^{bce} R_e^a{}_{cb}. \end{aligned}$$

В итоге $\nabla_b Q^{ab}$ приобретает вид

$$\nabla_b Q^{ab} = \frac{1}{8} \nabla_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \sigma^{ba} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \psi} \sigma^{ba} \nabla_c \psi \right) + \frac{1}{4} S^{ecb} R_e^a{}_{cb}.$$

Аналогичным образом подсчитывается $\nabla_b \bar{Q}^{ab}$. В итоге для $\nabla_b Q^{ab} + \nabla_b \bar{Q}^{ab}$ получаем

$$\begin{aligned} \nabla_b Q^{ab} + \nabla_b \bar{Q}^{ab} &= \frac{1}{8} \nabla_c \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \sigma^{ca} \psi - \bar{\psi} \sigma^{ca} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \sigma^{ca} \nabla_b \psi - \nabla_b \bar{\psi} \sigma^{ca} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \bar{\psi}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} (S^{bce} R_b^a{}_{ce} + \bar{S}^{ecb} R_e^a{}_{cb}). \end{aligned}$$

К первому слагаемому правой части применяем тождества (2а), тогда имеем

$$\begin{aligned} \nabla_b Q^{ab} + \nabla_b \bar{Q}^{ab} &= \frac{1}{4} (S^{bce} R_b^a{}_{ce} + \bar{S}^{ecb} R_e^a{}_{cb}) + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla_c \left(\nabla^c \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \bar{\psi}} - \nabla^a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_a \psi} \nabla^c \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \psi} \nabla^a \psi \right). \end{aligned}$$

Пользуясь тождествами (2б) для дивергенции первых четырех слагаемых тензора энергии-импульса, получаем

$$\nabla_b (T_{\text{сим}}^{ab} - \mathcal{L} \eta^{ab}) = -\nabla_b \left(\nabla^a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \nabla^a \psi \right) + \frac{1}{4} (S^{bce} R_b^a{}_{ce} + \bar{S}^{ecb} R_e^a{}_{cb}).$$

Имеем

$$\nabla_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \nabla^a \psi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla^a \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \left(\nabla^a \nabla_b \psi + \frac{1}{4} R_{cdb}{}^a \gamma^c \gamma^d \psi \right).$$

Аналогичным образом преобразовываем

$$\nabla_b \left(\nabla^a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \bar{\psi}} \right).$$

Окончательно получаем

$$\nabla_b (T_{\text{сим}}^{ab} - \mathcal{L} \eta^{ab}) = -\nabla^a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \nabla^a \nabla_b \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \bar{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \nabla^a \psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \nabla^a \nabla_b \psi = -\nabla^a \mathcal{L},$$

что эквивалентно $\nabla_b T_{\text{сим}}^{ab} = 0$.

4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СПИНОРНОГО ПОЛЯ ПО РОЗЕНФЕЛЬДУ

В работе [7] результат Розенфельда [2] о тензоре энергии-импульса произвольных полей сформулирован следующим образом. Тензор

$$\sigma^{ab} = \Sigma^{ab} - \nabla_c (\tau^{abc} - \tau^{bca} + \tau^{cab}) \quad (3)$$

есть метрический тензор энергии-импульса по Гильберту

$$\sqrt{-g} \sigma^{ab} = 2 \frac{\delta(\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\delta g_{ab}}.$$

Канонический тензор энергии-импульса Σ^{ab} и тензор канонического углового момента τ^{abc} определяются как

$$\Sigma^{ab} = \mathcal{L} \eta^{ab} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \nabla^a \psi, \quad \tau^{abc} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \psi} f^{[ab]} \psi,$$

а $f^{[ab]}$ являются инфинитезимальными матрицами представления алгебры Ли группы Лоренца.

В силу уравнений поля имеет место

$$\nabla_c \tau^{abc} - \Sigma^{[ab]} = 0. \quad (4)$$

Для спинорных полей $f^{[ab]} = -\sigma^{ab}/8$, поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma^{ab} &= \mathcal{L} \eta^{ab} - \nabla^a \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \bar{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_b \psi} \nabla^a \psi, \\ \tau^{abc} &= \left(\bar{\psi} \sigma^{ab} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \bar{\psi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_c \psi} \sigma^{ab} \psi \right) / 8. \end{aligned}$$

Оказывается, что вследствие уравнений поля и уравнений (2) $\sigma^{ab} = T_{\text{сим}}^{ab}$.

В работе [4] утверждается (формулы (4.5), (4.6)), что в силу уравнений поля должны иметь место тождества (в обозначениях данного раздела)

$$\nabla_b(\Sigma^{ab} - \nabla_c(\tau^{abc} - \tau^{bca} + \tau^{cab})) = 0, \quad \nabla_c \tau^{abc} - \Sigma^{[ab]} = 0.$$

Полные ковариантные вариации $\delta\psi, \delta\bar{\psi}$, соответствующие координатным преобразованиям и являющиеся ковариантным обобщением производных Ли, когда спиноры рассматриваются в качестве скаляров, определены как $\delta\psi = -\xi^a \nabla_a \psi$, $\delta\bar{\psi} = -\xi^a \nabla_a \bar{\psi}$.

В работе [3] симметрический тензор энергии-импульса тоже имеет вид (3).

5. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Метрический тензор энергии-импульса $T_{\text{мет}}^{\alpha\beta}$ для тензорных полей определяется следующим образом:

$$\sqrt{-g} T_{\text{мет}}^{\alpha\beta} = 2 \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}},$$

где $\delta/\delta g_{\alpha\beta}$ – символ вариационной производной. Так как спинорные поля рассматриваются только в ортогональном репере, то вариационную производную в ортогональном репере, по-видимому, нужно определять в виде

$$\delta A / \delta g_{ab} = A^{ab} - \nabla_c A^{abc},$$

где A^{ab} и A^{abc} определяются как коэффициенты разложения вариации δA при вариации $\delta g_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta \delta g_{\alpha\beta}$:

$$\delta A = A^{ab} \delta g_{ab} + A^{abc} \nabla_c \delta g_{ab}.$$

В пользу такого определения говорит тот факт, что применение этого определения к векторным полям приводит к метрическому тензору энергии-импульса, определенному с помощью $\delta/\delta g_{\alpha\beta}$. При вариации метрики $\delta g_{\alpha\beta}$ по ортогональному реперу ($e_a^\alpha(x)$) можно найти совокупность ортогональных реперов ($e_a^\alpha(x) + \delta e_a^\alpha(x)$), среди которых выберем тот, для которого $\delta e_a^\alpha = -\frac{1}{2} \delta g_{ab} \eta^{bc} e_c^\alpha$, т.е. δe_a^α в базисе ($e_a^\alpha(x)$) задается с помощью η -симметрической матрицы. В общем случае к ней следует прибавлять произвольную η -кососимметрическую матрицу. Вследствие инвариантности функции Лагранжа $\mathcal{L}$ относительно преобразований Лоренца репера этот произвол в выборе δe_a^α не дает вклада в вариацию $\delta \mathcal{L}$. При нашем выборе δe_a^α полярное разложение преобразования ($\delta_b^a - \frac{1}{2} \delta g_{bc} \eta^{ac}$) содержит только тождественное преобразование Лоренца, поэтому нужно считать, что $\delta\psi = 0$. Так как $\delta\eta_{ab} = 0$, то следует принять, что и $\delta\gamma_a = 0$. Тогда

имеем

$$\begin{aligned}
 \delta\gamma_{abc} &= \frac{1}{2}(\nabla_a\delta g_{bc} - \nabla_b\delta g_{ac} - \gamma_{ab}{}^e\delta g_{ae}), \\
 \delta\nabla_a\psi &= -\frac{1}{2}\delta g_{ab}\nabla^b\psi - \frac{1}{8}\gamma^c\gamma^d\psi(\nabla_c\delta g_{da} - \nabla_d\delta g_{ca}), \\
 \delta\nabla_a\bar{\psi} &= -\frac{1}{2}\delta g_{ab}\nabla^b\bar{\psi} + \frac{1}{8}\bar{\psi}\gamma^c\gamma^d(\nabla_c\delta g_{da} - \nabla_d\delta g_{ca}), \\
 \delta(\mathcal{L}\sqrt{-g}) &= \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}\left(-\nabla^b\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\bar{\psi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\psi}\nabla^b\psi + \mathcal{L}\eta^{ab}\right)\delta g_{ab} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{8}(-S^{acd} + S^{adc} + \bar{S}^{adc} - \bar{S}^{acd})\nabla_c\delta g_{da}\right\}, \\
 T_{\text{мет}}^{ab} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\psi}\nabla^b\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_b\psi}\nabla^a\psi + \nabla^b\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_a\bar{\psi}} + \nabla^a\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla_b\bar{\psi}}\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{8}\nabla_c(S^{acb} - S^{abc} + S^{bca} - S^{bac} + \bar{S}^{acb} - \bar{S}^{abc} + \bar{S}^{bca} - \bar{S}^{bac}) + \mathcal{L}\eta^{ab}.
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что в силу (2.6) $T_{\text{мет}}^{ab} = T_{\text{сим}}^{ab}$.

6. ПРИМЕР ЛИНЕЙНОГО СВОБОДНОГО И ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Для свободного спинорного поля с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}_{\text{св}} = i(\bar{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi - \nabla_a\bar{\psi}\gamma^a\psi)/2 - m\bar{\psi}\psi$$

на римановом пространственно-временном многообразии уравнения поля имеют вид

$$\nabla_a\bar{\psi}\gamma^a - im\bar{\psi} = 0, \quad \gamma^a\nabla_a\psi + im\psi = 0, \quad (5)$$

а для симметрического тензора энергии-импульса получаем известное выражение [8], выведенное путем симметризации канонического тензора энергии-импульса,

$$T_{\text{св}}{}^{ab} = \frac{i}{4}(\nabla^a\bar{\psi}\gamma^b\psi + \nabla^b\bar{\psi}\gamma^a\psi - \bar{\psi}\gamma^a\nabla^b\psi - \bar{\psi}\gamma^b\nabla^a\psi).$$

Переставляя операторы ∇_b и ∇^a в $\nabla_b\nabla^a\bar{\psi}$ и $\nabla_b\nabla^a\psi$, пользуясь тождествами для решений уравнений (5)

$$\begin{aligned}
 \square\psi &\equiv g^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi = -m^2\psi - \frac{1}{8}R_{cdab}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d\psi, \\
 \square\bar{\psi} &= -m^2\bar{\psi} - \frac{1}{8}R_{cdab}\bar{\psi}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d,
 \end{aligned}$$

находим

$$\nabla_b T_{\text{св}}{}^{ab} = \frac{i}{32}\left[-2R_{cdb}{}^a\bar{\psi}(\gamma^c\gamma^d\gamma^b + \gamma^b\gamma^c\gamma^d)\psi + R_{cdbe}\bar{\psi}(-\gamma^c\gamma^d\gamma^b\gamma^e\gamma^a + \gamma^a\gamma^b\gamma^e\gamma^c\gamma^d)\psi\right].$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль в силу тождеств [8]

$$R_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c = 2R_{ad}\gamma^a, \quad R_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d = 2R, \quad R_{ab} = R^c{}_{abc}.$$

Симметрический тензор энергии-импульса T^{ab} для нелинейного спинорного поля с функцией Лагранжа [9]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{св}} + \mathcal{L}_{\text{нелин}}(\bar{\psi}\psi),$$

где $\mathcal{L}_{\text{нелин}}$ — произвольная функция своего аргумента, имеет вид

$$T^{ab} = T_{\text{св}}{}^{ab} + \eta^{ab}(\mathcal{L}_{\text{нелин}} - \mathcal{L}'_{\text{нелин}}\bar{\psi}\psi).$$

Список литературы

- [1] Р. Ф. Билялов // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 369–379.
- [2] L. Rosenfeld // Sur le tenseur d'impulsion-energie. Mem. Acad. Roy. Belgique, cl. sc. Т. 18. Fasc. 6. 1940.
- [3] Б. А. Левитский // Изв. вузов. Физика. 1977. № 7. С. 152–153.
- [4] Б. А. Левитский, Ю. А. Янна // ТМФ. 1982. Т. 53. С. 250–259.
- [5] Y. Kosmann // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1966. V. 262A. P. 289.
- [6] Y. Kosmann // Ann. Math. Pure Appl. 1972. V. 91. Ser. 4. P. 317–395.
- [7] Ф. Хель // В сб.: Актуальные проблемы теоретической физики. М.: МГУ, 1976. С. 142.
- [8] A. Lichnerowicz // Ann. Inst. Henri Poincare. 1964. V. 1. № 3. P. 233–290.
- [9] Ю. П. Рыбаков, Б. Саха, Г. И. Шикин // В сб.: Неевклидовы пространства и новые проблемы физики (к 200-летию Н. И. Лобачевского). М.: Изд. “Белка”, 1992. С. 30–34.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
30.I.1996 г.

R. F. Bilyalov

THE SYMMETRIC ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF THE SPINOR FIELDS

The symmetric energy-momentum tensor of spinor fields with arbitrary function of Lagrange on the Riemannian space-time manifold is constructed. It is the metric energy-momentum tensor.