Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Шокики, Каноническое квантование $SU(N)$ аномальных киральных моделей Янга–Миллса, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 2, 315–326

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:38:55

К. Шокики
**КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ
 $SU(N)$ АНОМАЛЬНЫХ КИРАЛЬНЫХ
МОДЕЛЕЙ ЯНГА–МИЛЛСА**

Рассмотрено каноническое квантование аномальных киральных $SU(N)$ -моделей Янга–Миллса. Показано, что калибровочная инвариантность сохраняется на квантовом уровне несмотря на вырожденность действия Весса–Зумино.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что киральные калибровочные модели подвержены аномалиям, которые приводят к несостоятельности квантовой теории [1–8]. Эта несостоятельность может быть обойдена путем модификации классического действия, состоящей в добавлении к нему действия Весса–Зумино (ВЗ), моделирующего аномалию [4–6, 9–11].

Если симплектическая форма, соответствующая модифицированному действию, невырождена, мы имеем хорошо определенную теорию, в которой аномалия компенсируется калибровочной неинвариантностью действия ВЗ. В результате имеем унитарную калибровочно-инвариантную теорию на (формальном) квантовом уровне. Во многих интересных случаях тем не менее симплектическая форма вырождена и возникает необходимость прибегать к дираковской процедуре квантования вырожденных систем, при этом важно знать, что эта процедура непротиворечива в данном случае, т. е. будет ли результат ее применения калибровочно-инвариантной теорией. Поскольку действие ВЗ является действием первого порядка, соответствующая ей симплектическая форма должна быть вырожденной, по крайней мере, для всех нечетномерных групп, таких как, например, $SU(2k)$, $\dim SU(2k) = 4k^2 - 1$.

Анализ двумерной $SU(2)$ - и четырехмерной $SU(3)/SO(3)$ -моделей [12, 13] показал, что дираковская процедура, примененная к этим моделям, оказалась непротиворечивой. В данной работе рассмотрим общий случай группы $SU(N)$ с вырожденной симплектической формой для стандартного (т. е. $SO(N)$ -неинвариантного, см. [14]) действия ВЗ в четырехмерном пространстве-времени.

Изложение построено следующим образом. В разделе 2 будет дан краткий обзор метода квантования аномальных теорий Янга–Миллса, предложенный Фаддеевым и Шаташвили. Третий раздел посвящен обобщению этого метода на случай вырожденного действия ВЗ. Мы покажем, что это обобщение ведет к калибровочно-инвариантной квантовой теории.

2. АНОМАЛЬНАЯ $SU(N)$ -МОДЕЛЬ ЯНГА–МИЛЛСА

Рассмотрим четырехмерную $SU(N)$ -модель Янга–Миллса, описываемую следующим классическим действием:

$$S_{\text{cl}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + i\bar{\psi} \widehat{\nabla}(A) \psi \right), \quad (1)$$

где $\widehat{\nabla}(A) = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$, $\psi \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ – киральные фермионы в фундаментальном представлении калибровочной группы с генераторами λ^a , удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{abc} \lambda^c \quad (2)$$

и условию нормировки

$$\frac{1}{2} \text{tr} \lambda^a \lambda^b = -\delta^{ab}, \quad (3)$$

где f^{abc} – структурные постоянные алгебры $su(N)$. Как следствие калибровочной инвариантности действие (1) обладает набором связей первого рода $G^a(\mathbf{x}) = 0$ с алгеброй, задаваемой скобками Пуассона

$$\{G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})\} = f^{abc} G^c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4)$$

$$\{H, G^a(\mathbf{x})\}|_{G=0} = 0. \quad (5)$$

Такая алгебра позволяет наложить дополнительное условие, фиксирующее калибровку. Мы выберем гамильтонову калибровку $A_0 = 0$. В этом случае связи G выпадают из классического действия, после чего действие становится невырожденным, а полученная система может быть проквантована стандартными методами. Лоренц-инвариантность, которая нарушилась при наложении явно неинвариантного калибровочного условия, должна восстановиться на физическом подпространстве гильбертова пространства, состоящем из состояний, удовлетворяющих следующему условию:

$$\widehat{G}|\text{ph}\rangle = 0. \quad (6)$$

Накладывая условие (6), предполагаем, что (квантовая) алгебра операторов G будет идентичной алгебре, задаваемой соотношениями (4) и (5) с заменой $\{, \} \rightarrow i[,]$. К сожалению, это не так в случае аномальных теорий. Квантовые поправки в таких теориях нарушают калибровочную инвариантность и как следствие разрушают алгебру (4), (5).

В самом деле, фермионный детерминант

$$\det \widehat{\nabla}(A) = \int e^{iS_{\text{cl}}(A, \bar{\psi}, \psi)} d\bar{\psi} d\psi \quad (7)$$

калибровочно-неинвариантен:

$$\frac{\det \widehat{\nabla}(A^g)}{\det \widehat{\nabla}(A)} = e^{i\alpha_1(A, g)}, \quad (8)$$

где $\alpha_1(A, g)$ – действие ВЗ. Явный вид этого действия зависит от используемой вычислительной схемы для нахождения фермионного детерминанта (7). Вычислительная схема, сохраняющая инвариантность относительно преобразований $SO(N)$ -подгруппы калибровочной группы, использовалась в [14]. В настоящей работе подразумевается схема, полностью нарушающая калибровочную инвариантность. В терминах работы [14] действие ВЗ, полученное в такой схеме, называется *стандартным* и имеет вид

$$\alpha_1(A, g) = \int d^4x \left(d^{-1}\kappa(g) - \frac{i}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \text{tr} \left[(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \partial_\mu A_\nu A_\lambda + A_\mu A_\nu A_\lambda) g_\sigma - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} A_\mu g_\nu A_\lambda g_\sigma - A_\mu g_\nu g_\lambda g_\sigma \right] \right), \quad (9)$$

где $d^{-1}\kappa(g)$ определено следующим образом:

$$\int d^4x d^{-1}\kappa(g) \equiv -\frac{i}{240\pi^2} \int_{M_5} d^5x \epsilon^{pqrst} \text{tr} (g_p g_q g_r g_s g_t), \quad (10)$$

$$g_\mu = \partial_\mu g g^{-1}. \quad (11)$$

Интегрирование в выражении (10) ведется по пятимерному многообразию с границей, совпадающей с нашим четырехмерным пространством-временем.

Как легко заметить из выражения (8), действие ВЗ $\alpha_1(A, g)$ является 1-коциклом, т. е. оно удовлетворяет соотношению (mod 2π)

$$\alpha_1(A^h, g) - \alpha_1(A, hg) + \alpha_1(A, h) = 0, \\ h, g \in SU(N), \quad (12)$$

при этом различие между двумя вычислительными схемами состоит в добавлении к α_1 калибровочной вариации (конечного) локального контрчлена или тривиального 1-коцикла:

$$\alpha_0(A^g) - \alpha_0(A). \quad (13)$$

Как следствие калибровочной неинвариантности детерминанта (7) происходит модификация алгебры связей (4), (5). В частности, коммутатор квантовых операторов G приобретет швингеровский член a^{ab} , который будет инфинитезимальным 2-коциклом:

$$[G^a(\mathbf{x}), G^b(\mathbf{y})] = if^{abc} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + a^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (14)$$

и, вообще говоря, не обратится в нуль на поверхности связей $G = 0$, вследствие чего условие (6) является переопределенным, что ведет к несовместимости калибровочной (и лоренцевой) инвариантности с унитарностью.

Обойти эту проблему и получить калибровочно-инвариантную теорию можно, как предложено Фаддеевым и Шаташвили, путем некоторой модификации процедуры квантования [10]. Согласно этому подходу вместо классического следует рассмотреть модифицированное действие:

$$S_{\text{mod}} = S_{\text{cl}} + \alpha_1(A, g), \quad (15)$$

и проквантовать его, предварительно наложив калибровочное условие. Если полученное таким образом действие (15) неособенное, т. е. соответствующая симплектическая форма невырождена, то калибровочная инвариантность в квантовой теории восстанавливается, связи G удовлетворяют старой алгебре (4), (5). При этом возникают новые степени свободы, которые соответствуют полям g , принимающим значения в калибровочной группе. Представление в виде функционального интеграла для производящего функционала в этом случае задается формулой

$$Z = \int dA d\phi \delta(A_0) [\det \omega(A^g)]^{1/2} e^{iS + \alpha_1(A, g)}, \quad (16)$$

где $\det \omega(A^g)$ – детерминант симплектической формы [10]

$$\begin{aligned} \omega(A^g) = & -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \{ \delta g g^{-1} \delta g g^{-1} (A_i^g \partial_j A_k^g + \partial_i A_j^g A_k^g + A_i^g A_j^g A_k^g) - \\ & - \delta g g^{-1} \partial_i A_j^g \delta g g^{-1} A_k^g \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Однако, как уже было сказано во введении, для некоторых групп $SU(N)$ детерминант этой формы обращается в нуль. Это означает, что формула (17) не имеет места, поскольку действие (15) содержит дополнительные первичные связи, которые могут породить вторичные, третичные и т. д. связи. В этом случае необходима модификация метода Фаддеева–Шаташвили для включения в него всей “башни” связей [14, 15]. Кроме того, следует проверить, что добавление связей не нарушает калибровочную инвариантность окончательной квантовой теории, это является предметом рассмотрения следующего раздела.

3. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Рассмотрим действие (15) с N , для которых симплектическая форма (17) обладает вырожденной матрицей (напомним, что это происходит для всех четных $N = 2k$, поскольку $\dim SU(2k) = 4k^2 - 1$, а любая антисимметричная матрица нечетной размерности вырождена). Наша цель – провести канонический анализ действия (15) и написать обобщение формулы (18) для случая, когда детерминант матрицы симплектической формы (17) обращается в нуль.

Решение этой задачи могут затруднить две проблемы. Первая состоит в том, что в методе Фаддеева–Шаташвили функционал (15) понимается только как показатель экспоненты в функциональном интеграле (16), а не как классическое действие. В самом деле, действие ВЗ пропорционально постоянной Планка $\hbar$ (равной 1 в используемых нами единицах) и, следовательно, обращается в нуль в классическом пределе. Эта проблема может быть обойдена, если заменить постоянную Планка в действии ВЗ некоторой затравочной константой, не фиксированной на классическом уровне. После проведения канонического квантования условие сокращения аномалии фиксирует значение константы, равной постоянной Планка.

Эта процедура оправдывает классический анализ нашей модели, хотя не имеет никаких последствий для окончательного результата, поэтому мы больше не будем к ней возвращаться.

Вторая проблема состоит в возможности появления калибровочно-неинвариантных вкладов в процессе канонического квантования, что может сделать квантовую теорию

несостоятельной. Поэтому наша стратегия будет состоять в построении дираковской процедуры квантования теории и в доказательстве того, что вторичные, третичные и т. д. связи, а также детерминант скобки Пуассона всех связей калибровочно-инвариантны (на поверхности связей).

Введем сначала параметризацию группового элемента $g \in G \equiv SU(N)$ полями ϕ^A , $A = 1, \dots, \dim G$,

$$g = g(\phi). \quad (18)$$

В терминах этих полей действие (15) выглядит следующим образом¹⁾:

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left(E_i^a \dot{A}_i^a - \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \dot{A}_i \{A_j, g_k\} + \Gamma_A \dot{\phi}^A + \right. \\ \left. + \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} (A_i \partial_j A_k + \partial_i A_j A_k + A_i A_j A_k + A_i g_j A_k - A_i g_j g_k) g_A \dot{\phi}^A + \right. \\ \left. + i\psi^+ \partial_0 \psi - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - i\bar{\psi} \gamma_i \nabla_i \psi + A_0^a G^a \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где E и B – “электрическая” и “магнитная” компоненты тензора напряженности калибровочного поля $F_{\mu\nu}$, $\Gamma_A \dot{\phi}^A$ – член $d^{-1}k$ в выбранной нами параметризации, $g_A \equiv \frac{\delta g(\phi)}{\delta \phi^A} g^{-1}$ и ϵ_{ijk} – трехмерный антисимметричный тензор ($i = 1, 2, 3$). Это действие является действием первого порядка, т. е. оно содержит производные по времени не выше первого порядка. Из формулы (19) видно, что имеется набор связей – закон Гаусса:

$$\begin{aligned} G^a = \nabla_i E_i + i\psi^+ \lambda^a \psi - \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \lambda^a (2\{\partial_i A_j, g_k\} - g_i g_j A_k - \\ - A_i g_j g_k + A_i A_j g_k - A_i g_j A_k - g_i A_j A_k - g_i A_j g_k - g_i g_j g_k). \end{aligned} \quad (20)$$

Как уже говорилось, мы накладываем калибровочное условие $A_0 = 0$, тем самым исключая связи G^a из классического действия. Поскольку, как мы надеемся, калибровочная инвариантность восстановится на квантовом уровне, мы можем наложить калибровочное условие “в долг”. Восстановление калибровочной инвариантности позволит сузить теорию на физическое подпространство, что исключит ее зависимость от наложенного калибровочного условия. Собственно говоря, возможность сужения квантовой теории на физическое подпространство мы и называем калибровочной инвариантностью квантовой теории.

Канонический импульс для поля A_i^a дается сдвигом “электрического” поля E :

$$\Pi_i^a \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_i^a} = E_i^a - \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \lambda^a \{A_j, g_k\}. \quad (21)$$

Введем также канонические импульсы p_A для киральных полей ϕ^A , которые определяются коэффициентами при производных $\dot{\phi}^A$ по времени. Поскольку они зависят от киральных полей, выписывая их, получаем связи

$$\begin{aligned} \varphi_A = p_A - \Gamma_A + \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} (A_i \partial_j A_k + \partial_i A_j A_k + \\ + A_i A_j A_k + A_i g_j A_k - A_i g_j g_k) g_A. \end{aligned} \quad (22)$$

¹⁾ По повторяющимся пространственно-временным, изотопическим и групповым индексам подразумевается суммирование с соответствующей метрикой: $g_{\mu\nu}$, δ_{ab} и $g_{AB} = g_A^a g_B^a$, где g_A^a определено в комментарии к формуле (24).

Матрица скобок Пуассона связей (22) совпадает с симплектической формой для полей ϕ^A :

$$\omega_{AB} = \{\varphi_A(\mathbf{x}), \varphi_B(\mathbf{y})\} = \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} [g_A, g_B] (\tilde{A}_i \partial_j \tilde{A}_k + \partial_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k + \tilde{A}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (g_A \tilde{A}_i g_B \partial_j \tilde{A}_k - g_B \tilde{A}_i g_A \partial_j \tilde{A}_k) \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (23)$$

где $\tilde{A}_i \equiv (A_i + g_i)$.

Можно также рассмотреть эквивалентный набор связей φ_a , являющихся линейными комбинациями связей (22):

$$\varphi_a = g_a^A \varphi_A = 0, \quad (24)$$

поскольку матрица g_a^A , обратная матрице $g_A^a = \frac{1}{2} \operatorname{tr} g_A \lambda^a$, невырождена. Матрица скобок Пуассона в этой параметризации поверхности связей выглядит значительно проще:

$$\omega_{ab} = \{\varphi_a(\mathbf{x}), \varphi_b(\mathbf{y})\} = \frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2} [\lambda_a, \lambda_b] (\tilde{A}_i \partial_j \tilde{A}_k + \partial_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k + \tilde{A}_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\lambda_a \tilde{A}_i \lambda_b \partial_j \tilde{A}_k - \lambda_b \tilde{A}_i \lambda_a \partial_j \tilde{A}_k) \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (25)$$

так что мы будем отдавать предпочтение этим связям.

Закон преобразования матрицы (25) имеет простой вид. Чтобы его найти, заметим, что преобразованная матрица $g\lambda_a g^{-1}$ может быть разложена по матрицам λ_a :

$$\lambda_a \rightarrow g\lambda_a g^{-1} = \Lambda_a{}^b(g) \lambda_b, \quad \det \Lambda = 1. \quad (26)$$

Из вида этих преобразований, а также из явного вида матрицы ω (25) легко увидеть, что матрица скобок Пуассона (25) под действием калибровочной группы преобразуется следующим образом:

$$\omega_{ab}(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda_a{}^c(\mathbf{x}) \omega_{cd}(\mathbf{x}) \Lambda_b{}^d(\mathbf{x}), \quad (27)$$

где $\omega_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \omega_{ab}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Детерминант этой матрицы инвариантен относительно такого закона преобразования.

Если матрица ω_{ab} вырождена, то она обладает набором из линейно независимых нуль-векторов z_R^b , $R = 1, \dots, K < N \equiv \dim G$:

$$\omega_{ab} z_R^b(\tilde{A}) = 0, \quad (28)$$

где K – коранг матрицы ω_{ab} .

К сожалению, найти в явном виде полный набор нулевых векторов для произвольной группы $SU(N)$ весьма затруднительно, поскольку их количество и явный вид сильно зависят от структуры группы, т. е. от числа N , но можно предьявить алгоритм, с помощью которого находятся все нулевые векторы.

Эти векторы ищутся следующим образом. Рассмотрим антисимметричный по изотопическим координатам тензор

$$z^{a_1 \dots a_K}(\mathbf{x}) = \epsilon^{a_1 \dots a_K b_1 b_2 \dots b_{N-K-1} b_{N-K}} \omega_{b_1 b_2}(\mathbf{x}) \dots \omega_{b_{N-K-1} b_{N-K}}(\mathbf{x}), \quad (29)$$

удовлетворяющий условию

$$z^{a_1 \dots a_K}(\mathbf{x}) \omega_{a_1 b} = 0, \quad (30)$$

$$z^{a a_2 \dots a_K}(\mathbf{x}) z_{b a_2 \dots a_K}(\mathbf{x}) \sim P^a_b, \quad (31)$$

где P^a_b в последнем равенстве обозначает проектор на нулевое подпространство матрицы ω . Чтобы доказать (30), необходимо рассмотреть какой-нибудь максимальный минор $\omega_{\bar{a}\bar{b}}$, оставшиеся строки и столбцы матрицы ω_{ab} будут линейными комбинациями элементов $\omega_{\bar{a}\bar{b}}$. Поэтому заметим, что в правой части (29) участвуют только компоненты $\omega_{\bar{a}\bar{b}}$. Более того, каждой ненулевой компоненте $z^{a_1 \dots a_K}$ соответствует ненулевой минор максимального ранга, который равен квадрату $z^{a_1 \dots a_K}$. Этот минор получается вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих индексам $a_1 \dots a_K$. Сворачивая z с большим, чем в (29), числом ω , мы получаем минор больше максимального, который по условию обращается в нуль. Другой способ доказать свойство (30) – использование леммы Дарбу. Уравнение (31) может быть получено разложением произведения двух тензоров $\epsilon^{a_1 \dots a_K}$ на антисимметричные комбинации дельта-символов.

Очевидно, что для любого (полного) набора нулевых векторов $\{z_R\}$ их антисимметризованное произведение должно быть пропорционально тензору (29):

$$\epsilon^{P \dots R} z_P^{a_1} \dots z_R^{a_K} \sim z^{a_1 \dots a_K}, \quad (32)$$

где $\epsilon^{P \dots R}$ – это K -мерный полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{12 \dots K} = 1$, и, наоборот, любой набор линейно независимых векторов, удовлетворяющих (32), есть набор нулевых векторов нашей матрицы ω .

В частности, если матрица ω обладает единственным нулевым вектором, то он задается следующим выражением:

$$z^a(\mathbf{x}) = \epsilon^{a b_1 b_2 \dots b_{N-2} b_{N-1}} \omega_{b_1 b_2}(\mathbf{x}) \dots \omega_{b_{N-2} b_{N-1}}(\mathbf{x}). \quad (33)$$

Калибровочная группа в этом случае нечетномерна.

Используя тензор z , можно построить связи, являющиеся линейными комбинациями связей φ_a ,

$$\psi^{a_2 \dots a_K}(\mathbf{x}) = z^{a_1 a_2 \dots a_K}(\mathbf{x}) \varphi_{a_1}(\mathbf{x}), \quad (34)$$

которые коммутирует со всеми связями φ_a , но при этом не все они будут независимыми.

Таким образом, следует либо ввести линейно независимый набор векторов, удовлетворяющих (32), либо выбрать линейно независимые связи из (34) (второе, как правило, проще, поскольку в большинстве случаев достаточно взять любые K связей – они автоматически оказываются независимыми в точке общего положения).

Предположим теперь, что выбран набор нулевых векторов z_R^a , например, как решение уравнения

$$\epsilon^{P \dots R} z_P^{a_1} \dots z_R^{a_K} = z^{a_1 \dots a_K}, \quad (35)$$

и предположим, хотя это и не обязательно, но приводит к некоторым упрощениям в выкладках, что эти векторы инвариантны относительно действия калибровочной группы:

$$z_R^a \rightarrow (\Lambda^{-1})^a_b z_R^b. \quad (36)$$

Сворачивая все нулевые векторы со связями (24), получаем центр алгебры связей, т. е. связи

$$\varphi_Q = z_Q^a \varphi_a, \quad (37)$$

которые коммутируют со всеми связями (на поверхности связей):

$$\{\varphi_Q, \varphi_a\} = z_Q^b \omega_{ba} + \varphi_b \{z_Q^b, \varphi_a\} = \varphi_b \{z_Q^b, \varphi_a\}. \quad (38)$$

Следуя дираковской процедуре, теперь наложим условия сохранения во времени полученных связей, что даст дополнительные – вторичные связи

$$\dot{\varphi}_Q(\mathbf{x}) = \tilde{\varphi}_Q(\mathbf{x}) = 0, \quad (39)$$

где

$$\tilde{\varphi}_Q(\mathbf{x}) \equiv \{H, \varphi_Q(\mathbf{x})\} = z_Q^a(\mathbf{x}) \{H, \varphi_a(\mathbf{x})\} \quad (40)$$

и равенства подразумеваются по модулю первичных связей. Вычисления дают

$$\{H, \varphi_a\} = -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \lambda^a (\{E_i, F_{jk}\} - E_i \tilde{A}_j \tilde{A}_k + \tilde{A}_i E_j \tilde{A}_k - \tilde{A}_i \tilde{A}_j E_k). \quad (41)$$

Нетрудно видеть, что скобка Пуассона (41) преобразуется ковариантно под действием калибровочной группы:

$$\{H, \varphi_a\} \rightarrow \Lambda_a^b \{H, \varphi_b\}. \quad (42)$$

Благодаря этому вторичные связи будут инвариантными относительно калибровочных преобразований. Это означает, что наложение вторичных связей не нарушит калибровочной инвариантности, если детерминант матрицы скобок Пуассона всех связей будет по-прежнему калибровочно-инвариантен.

Объединив первичные и вторичные связи в единый набор, припишем связям индекс I , который будет перечислять все связи: φ_I , $(I) = (a, Q)$, и рассмотрим матрицу скобок Пуассона этого набора связей. Она обладает следующей блочной структурой:

$$\|\omega_{IJ}\| = \begin{pmatrix} \{\varphi_a, \varphi_b\} & \{\varphi_a, \tilde{\varphi}_Q\} \\ -\{\varphi_a, \tilde{\varphi}_P\} & \{\tilde{\varphi}_Q, \tilde{\varphi}_P\} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Докажем калибровочную инвариантность ее детерминанта. Чтобы это сделать, рассмотрим закон ее калибровочного преобразования.

Закон преобразования блока $\{\varphi_a, \varphi_b\}$ дается выражением (27). Для того чтобы найти закон преобразования блока $\{\varphi_a, \tilde{\varphi}_Q\}$, заметим, что вторичные связи имеют следующую структуру:

$$\tilde{\varphi}_Q = \operatorname{tr} E_i \Phi_{iQ} = \operatorname{tr} E_i \Phi_{ib} z_Q^b, \quad (44)$$

где

$$\Phi_{ia}^b(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \{E_i^b(\mathbf{x}), \varphi_a(\mathbf{y})\} \quad (45)$$

калибровочно-ковариантно.

В итоге скобки Пуассона первичных связей со вторичными имеют следующий вид:

$$\{\varphi_a, \tilde{\varphi}_Q\} = \{\phi_a, E_i^a\} \Phi_{iQ}^a + E_i^a g_a^A \{p_A, \Phi_{iQ}^a\}. \quad (46)$$

Первый член в (46) равен $\Phi_{iQ}^a \Phi_{ib}^a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ и является калибровочно-ковариантным. Оставшийся член может быть переписан в следующем виде:

$$E_i^a g_a^A \{p_A, \Phi_{iQ}^b(\tilde{A})\} = E_k^a g_a^A \frac{\delta \Phi_{kQ}^b(\tilde{A})}{\delta \tilde{A}_i} \frac{\delta g_i}{\delta \phi^A}, \quad (47)$$

где

$$g_a^A \frac{\delta g_i}{\delta \phi^A} = \lambda_a \delta_j'(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + g_a^B \nabla_i^g g_B \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (48)$$

$$\nabla_i^g g_B \equiv \partial_i g_B - [g_i, g_B]. \quad (49)$$

Поскольку выражение (48) преобразуется ковариантно, то последнее слагаемое в выражении (46) так же ковариантно. Следовательно, скобка Пуассона (46) преобразуется следующим образом:

$$\{\varphi_a, \tilde{\varphi}_Q\} \rightarrow \Lambda_a^b \{\varphi_b, \tilde{\varphi}_Q\}. \quad (50)$$

К сожалению, доказательство калибровочной инвариантности оставшегося блока $\{\tilde{\varphi}_P, \tilde{\varphi}_Q\}$ является не очень простым. Возможно, этот блок инвариантен только на поверхности всех связей, но, к счастью, детерминант матрицы ω не зависит от этого блока.

В самом деле, рассмотрим антисимметричную блочную матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_{\bar{a}}, \varphi_{\bar{b}}\} & \{\varphi_{\bar{a}}, \varphi_S\} & \{\varphi_{\bar{a}}, \tilde{\varphi}_Q\} \\ \{\varphi_R, \varphi_{\bar{b}}\} & \{\varphi_R, \varphi_S\} & \{\varphi_R, \tilde{\varphi}_Q\} \\ \{\tilde{\varphi}_P, \varphi_{\bar{b}}\} & \{\tilde{\varphi}_P, \varphi_S\} & \{\tilde{\varphi}_P, \tilde{\varphi}_Q\} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ -a^T & -b^T & c \end{pmatrix}, \quad (51)$$

которая получается разделением первичных связей φ_a на коммутирующие φ_Q и связи второго рода $\varphi_{\bar{a}}$. При этом блок $\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}^T$ является невырожденной матрицей, а блоки $c = -c^T$ и b – квадратными матрицами. Можно показать, что блочная матрица такого вида вырождена тогда и только тогда, когда вырожден блок b . Поэтому, используя свойства детерминанта, имеем

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ -a^T & -b^T & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \tilde{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b^T & 0 \end{pmatrix} = \det \tilde{\omega} (\det b)^2, \quad (52)$$

что доказывает независимость детерминанта от блока c .

Поскольку значащая (для детерминанта) часть матрицы ω преобразуется умножением на ортогональную матрицу, то калибровочную инвариантность на этом этапе можно считать доказанной.

Заметим, что скобки Пуассона первичных связей обладают свойством ультралокальности, т. е. они содержат только дельта-функции, но не их производные. С другой стороны, скобки Пуассона, содержащие вторичные связи, уже содержат производные дельта-функций – они не ультралокальны. Отсутствие ультралокальности может усложнить дальнейший анализ в случае, если матрица $\|\omega_{IJ}\|$ окажется также вырожденной,

поскольку теперь для нахождения ее нулевых векторов потребуется решение системы дифференциальных уравнений и, кроме того, отсутствие явной калибровочной ковариантности самой матрицы ω усложнит еще более доказательство калибровочной инвариантности окончательной теории (в случае ее наличия).

К счастью, существуют указания на то, что в точке общего положения не требуется дальнейшего размножения связей, т. к. полученная система связей является полной.

Поскольку матрица ω вырождена только тогда, когда блок $b_{PQ} = \{\varphi_P, \tilde{\varphi}_Q\}$ вырожден, рассмотрим подпространство фазового пространства с $E = 0$. Заметим, что это подпространство содержится в поверхности вторичных связей, и рассмотрим матрицу b в этом подпространстве. Здесь она принимает следующий вид:

$$b_{PQ} = \text{tr } \Phi_{iP} \Phi_{iQ}. \quad (53)$$

Поскольку связи $\tilde{\varphi}_Q = \text{tr } E_i \Phi_{iQ}$ независимы в окрестности этого подпространства, то можно надеяться, что матрица (53) невырождена на нем. Далее, в силу того что детерминант невырожден в точке, он будет невырожденным почти всюду, т. е. в точке общего положения, т. к. детерминант является полиномом по полям.

Считая теперь матрицу ω невырожденной, можно записать представление в виде функционального интеграла для производящего функционала:

$$Z = \int \exp i \left(\Pi_i \dot{A}_i + p_A \dot{\phi}^A - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + S_f(\bar{\psi}, \psi, A) \right) \times \\ \times \delta(\varphi_I) \det \|\omega_{IJ}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| d\Pi dA dp d\phi d\bar{\psi} d\psi, \quad (54)$$

где S_f – фермионная часть действия и член с источниками явно не выписан. Интегрируя по p и делая обратную замену переменных интегрирования: $\Pi \rightarrow E$, получаем

$$Z = \int \exp i (S(\bar{\psi}, \psi, A) + \alpha_1(A, g)) \delta(\varphi_Q) \det \|\omega_{IJ}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| dE dA d\phi d\bar{\psi} d\psi. \quad (55)$$

Поскольку калибровочная инвариантность восстановлена, можно показать, что генераторы G удовлетворяют алгебре (4), (5), это позволяет выделить физическое подпространство наложением условий (7):

$$\hat{G}^a |ph\rangle = 0, \quad (56)$$

с физическими наблюдаемыми теории, имеющими вид

$$F(\Phi, g) = F(\Phi^h, h^{-1}g) = F(\Phi^g), \quad (57)$$

где $\Phi = (A, E, \bar{\psi}, \psi)$.

Число (лагранжевых) степеней свободы может быть установлено следующим образом. Оно равно числу лагранжевых полей минус половина числа связей второго рода. Если в теории имеются связи не старшие вторичных, то мы имеем

$$N_{df} = N_A + (N_p + N_\phi) - \frac{1}{2} N_\varphi + N_f = 2N + \frac{1}{2} (N - K) + N_f, \quad (58)$$

где $N = \dim G$ и число фермионных степеней свободы обозначено через N_f .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что калибровочная инвариантность аномальной калибровочной теории на квантовом уровне может быть восстановлена несмотря на вырожденность соответствующего действия ВЗ. Результатом канонического квантования является калибровочно-инвариантная теория, обладающая новыми степенями свободы, а также дополнительными связями, как следствие вырожденности действия.

Альтернативный подход мог бы состоять в рассмотрении связей G_a с алгеброй (14) и в каноническом квантовании теории с такими связями. В нашем подходе это соответствует квантованию в калибровке $g = 1$. Вследствие совпадения

$$\omega_{ab}|_{g=1} = a_{ab} \quad (59)$$

матрица a обладает таким же набором нулевых векторов $z_Q(A)$, как и ω . Коммутатор $\{H, G^a\}$ можно вычислить по формуле Бьеркена–Джонсона–Лоу аналогично вычислению коммутатора $\{G, G\}$ в работе [15]. Прделав это, получим

$$\begin{aligned} \{H, G_a\} = & -\frac{i}{48\pi^2} \epsilon_{ijk} \operatorname{tr} \lambda^a (\{E_i, F_{jk}\} - E_i A_j A_k + \\ & + A_i E_j A_k - A_i A_j E_k) = \{H, \varphi_a\}|_{g=1}, \end{aligned} \quad (60)$$

после чего можно написать представление в виде функционального интеграла для производящего функционала

$$Z = \int d\Phi e^{iS} \delta(G_a) \det a. \quad (61)$$

Используя “трюк” Фаддеева–Попова для (формального) перехода к калибровке $A_0 = 0$, мы получаем результат, идентичный (55). При этом последний подход будет всегда давать калибровочно-инвариантные модели, поскольку калибровочный сдвиг производится после квантования. Для скобок Пуассона в таком подходе используется выражение, вычисленное как квантовый коммутатор, что делает процедуру квантования достаточно формальной. Тем не менее, когда при использовании первой схемы получается калибровочно-инвариантная теория, оба подхода должны быть согласованы.

На протяжении данной работы мы не касались проблемы вычислений производящего функционала (55) и средних от физических наблюдаемых (57). К сожалению, это пока не решенная проблема. Подынтегральное выражение в (55) не содержит подходящего квадратичного члена по полям ϕ^A , и, следовательно, использование обычной теории возмущений затруднительно. Можно надеяться на решеточную или другую непертурбативную схему, хотя до сих пор не известно подходящей формулировки такой схемы. Что касается действия ВЗ в размерности два, то, как показано в работе [13], для группы $SU(2)$ можно развивать теорию возмущений по степеням полей. Другой важной проблемой, решение которой не известно, является доказательство ненарушения калибровочной инвариантности процедурой Дирака в общем случае. С другой стороны, как показано Славновым и Энно [16], старшими связями “башни” можно пренебречь за счет модификации локальной меры в функциональном интеграле.

Автор искренне признателен А.А. Славнову и С.А. Фролову за ценные обсуждения. Эта работа поддерживалась грантами РФФИ и МНФ.

Список литературы

- [1] *L. S. Adler* // Phys. Rev. 1969. V. 177. №5(11). P. 2426–2438.
- [2] *W. A. Bardeen* // Phys. Rev. 1969. V. 184. №5. P. 1848–1859.
- [3] *D. J. Gross, R. Jackiw* // Phys. Rev. 1972. V. D6. №2. P. 477–493.
- [4] *R. Stora*. Algebraic structure and topological origin of anomalies // Progress in gauge field theory / Ed. H. Lehman. New York: Plenum Press, 1984. P. 87–102.
- [5] *B. Zumino*. Algebraic origin of anomalies // Relativity groups and topology II / Ed. B. S. de Witt and R. Stora. Amsterdam: North Holland, 1984. P. 1293.
- [6] *L. D. Faddeev* // Phys. Lett. 1984. V. 145B. №1, 2. P. 81–86.
- [7] *J. Mickelsson* // Commun. Math. Phys. 1985. V. 97. P. 361.
- [8] *Л. Д. Фаддеев, С. Л. Шаташвили* // ТМФ. 1984. Т. 60. №2. С. 206–217.
- [9] *J. Wess, B. Zumino* // Phys. Lett. 1971. V. 37B. №1. P. 95–97.
- [10] *L. D. Faddeev, S. L. Shatashvili* // Phys. Lett. 1986. V. 167B. №2. P. 225–228.
- [11] *С. Л. Шаташвили* // ТМФ. 1987. Т. 71. №1. С. 40–45.
- [12] *S. A. Frolov, A. A. Slavnov, C. Sochichiu* // Int. J. Mod. Phys. 1996. V. A11. P. 745–758.
- [13] *А. А. Славнов, С. А. Фролов, К. Шокикиу* // ТМФ. 1995. Т. 105. №2. С. 270–291.
- [14] *S. A. Frolov, A. A. Slavnov, C. Sochichiu* // Phys. Lett. 1993. V. 301B. P. 59–66.
- [15] *А. Ю. Алексеев, Я. Мадайчик, Л. Д. Фаддеев, С. Л. Шаташвили* // ТМФ. 1987. Т. 73. №2. С. 187–190.
- [16] *M. Henneaux, A. Slavnov* // Phys. Lett. 1994. V. 338B. P. 47–50.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
Московский государственный университет

Поступила в редакцию
13.IV.1995 г.

C. Sochichiu

ON THE CANONICAL QUANTIZATION OF ANOMALOUS $SU(N)$ CHIRAL YANG–MILLS MODELS

Canonical quantization of anomalous $SU(N)$ Yang–Mills models is considered. It is shown that the gauge invariance of the quantum theory can be saved in spite of degeneracy of the Wess–Zumino action.