Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, Деформации йордановых тройных систем и интегрируемые уравнения, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 3, 388–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:26:22

С. И. Свинолулов, В. В. Соколов

ДЕФОРМАЦИИ ЙОРДАНОВЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

Найдены явные формулы для деформаций векторных и матричных тройных йордановых систем. С их использованием построены новые примеры интегрируемых многополевых систем.

Связь тройных йордановых систем с интегрируемыми многополевыми уравнениями была установлена в работах [1–3].

В настоящей статье с помощью простой конструкции, связанной с деформациями тройных йордановых систем, строятся многокомпонентные аналоги некоторых хорошо известных интегрируемых уравнений. Эти многокомпонентные системы обобщают векторные и матричные интегрируемые уравнения, содержащиеся в [4].

Напомним необходимые определения (см. [5–9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторное пространство T над $\mathbb{C}$, в котором определено тернарное умножение $\{\cdot, \cdot, \cdot\}: T \times T \times T \rightarrow T$, называется тройной йордановой системой, если для любых векторов из T выполнены тождества

$$\begin{aligned} \{X, Y, Z\} &= \{Z, Y, X\}, \\ \{X, Y, \{V, W, Z\}\} - \{V, W, \{X, Y, Z\}\} &= \{\{X, Y, V\}, W, Z\} - \{V, \{Y, X, W\}, Z\}. \end{aligned}$$

Пусть элемент ϕ тройной йордановой системы T с базисом $e_1, \dots, e_N$ зависит от векторного параметра $u = u^i e_i$, причем его эволюция по параметру задается следующей переопределенной совместной системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u^i} = -\{\phi, e_i, \phi\}, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$. Можно показать, что для любого начального вектора $\phi(0)$ существует (при достаточно малых u) единственное решение системы (1). При любом фиксированном i система (1) представляет собой правильно определенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которой приведено в [10].

Будем называть любое ненулевое решение $\phi(u)$ системы (1) деформационным вектором.

Для широкого класса тройных йордановых систем деформационный вектор задается формулой

$$\phi(u) = P_u^{-1}(u). \quad (2)$$

Здесь оператор $P_X: T \rightarrow T$ для любого X определяется следующим образом: $P_X(Y) = \{X, Y, X\}$. Формула (2) дает (с точностью до сдвига u на произвольный постоянный элемент) деформационный вектор общего положения, если в T существует хотя бы один элемент X , для которого оператор P_X обратим.

Приведем деформационные векторы для наиболее интересных тройных йордановых систем.

ПРИМЕР 1. Пусть T – векторное пространство матриц размера $n \times n$ с тернарным умножением

$$\{X, Y, Z\} = \frac{1}{2}(X * Y * Z + Z * Y * X). \quad (3)$$

Известно [6], что (3) – простая тройная йорданова система. Нетрудно проверить, что (2) дает

$$\phi = U^{-1}, \quad (4)$$

где U – матрица, элементами которой являются параметры деформации, U^{-1} – матрица, обратная к U .

Множества всех симметричных и кососимметричных матриц также образуют тройные йордановы системы относительно умножения (3). В симметрическом, а также в четномерном кососимметрическом случаях в качестве вектора деформации можно взять (4). В нечетномерном кососимметрическом случае для любого X оператор P_X вырожден и формула (2) не применима. В качестве деформационного вектора можно взять

$$\phi = \sum \frac{e_{ji} - e_{ij}}{u_{ij}}. \quad (5)$$

Здесь e_{km} обозначает матрицу с единицей на пересечении k -й строки и m -го столбца и нулями в остальных местах. Сумма берется по любому набору пар индексов (ij) , $i < j$, такому, что в различных парах не совпадают ни первые, ни вторые индексы.

ПРИМЕР 2. Пространство T матриц размера $m \times n$, $n \geq m$, образует простую тройную йорданову систему с умножением

$$\{X, Y, Z\} = \frac{1}{2}(X * Y^t * Z + Z * Y^t * X), \quad (6)$$

где t означает обычное транспонирование матриц. При $m = 1$ эта тройная система превращается в стандартное n -мерное векторное пространство V с тернарным умножением

$$\{X, Y, Z\} = \frac{1}{2}(\langle X, Y \rangle Z + \langle Z, Y \rangle X), \quad (7)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Формула (2) при $n \neq m$ не работает. Деформационный вектор определяется формулой

$$\phi = \alpha(U^t \alpha)^{-1}, \quad (8)$$

где α – произвольная постоянная матрица.

В случае $m = 1$, $\alpha = e_1$ формула (8) дает

$$\phi = \frac{e_1}{u_1}. \quad (9)$$

ПРИМЕР 3. Кроме (7), существует еще одна тернарная операция, превращающая произвольное векторное пространство V в простую тройную йорданову систему. Она, как и (7), определяется в терминах скалярного произведения и имеет вид

$$\{X, Y, Z\} = \langle X, Y \rangle Z + \langle Z, Y \rangle X - \langle X, Z \rangle Y. \quad (10)$$

Соответствующий вектор деформации определяется формулой (2):

$$\phi = \frac{u}{\|u\|^2}. \quad (11)$$

Ниже для каждой тройной йордановой системы T мы приводим несколько многокомпонентных интегрируемых уравнений, в записи которых фигурирует деформационный вектор. С помощью формул (4), (5), (8), (9), (11) нетрудно явно выписать все наиболее интересные векторные и матричные примеры таких уравнений.

Класс 1 (см.[11]). Уравнение

$$u_{xy} = \{u_x, \phi(u), u_y\} \quad (12)$$

допускает представление нулевой кривизны

$$\Psi_x = \frac{2}{(1-\lambda)} L_{u_x} \Psi, \quad \Psi_y = \frac{2}{(1+\lambda)} L_{u_y} \Psi. \quad (13)$$

Здесь и далее мы обозначаем через L_X оператор, действующий из T в T по формуле $L_X(Y) = \{X, \phi(u), Y\}$.

В матричном случае (см. пример 1) (12) совпадает с уравнением главного кирального поля

$$u_{xy} = \frac{1}{2}(u_x u^{-1} u_y + u_y u^{-1} u_x).$$

Заметим, что (13) дает для него представление нулевой кривизны, отличное от стандартного.

Все уравнения из классов, рассмотренных ниже, обладают высшими симметриями и представлением нулевой кривизны в суперструктурной алгебре Ли (см.[9]) системы T .

Класс 2. Рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{xxx} - 3\{u_x, \phi(u), u_{xx}\} + \frac{3}{2}\sigma_u(u_x, u_x, u_x), \quad (14)$$

где

$$\sigma_u(X, Y, Z) = \{X, \{\phi, Y, \phi\}, Z\}. \quad (15)$$

Матричное уравнение (14) имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}u_x u^{-1} u_{xx} - \frac{3}{2}u_{xx} u^{-1} u_x + \frac{3}{2}u_x u^{-1} u_x u^{-1} u_x.$$

Следующая пара векторных уравнений (14) соответствует операциям (10) и (7):

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} - 3 \frac{\langle u, u_x \rangle}{\|u\|^2} u_{xx} - 3 \frac{\langle u, u_{xx} \rangle}{\|u\|^2} u_x + 3 \frac{\langle u_x, u_{xx} \rangle}{\|u\|^2} u - \\ &\quad - \frac{3}{2} \frac{\|u_x\|^2}{\|u\|^2} u_x + 6 \frac{\langle u, u_x \rangle^2}{\|u\|^4} u_x - 3 \frac{\langle u, u_x \rangle \|u_x\|^2}{\|u\|^4} u, \\ u_t &= u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{\langle \alpha, u_x \rangle}{\langle \alpha, u \rangle} u_{xx} - \frac{3}{2} \frac{\langle \alpha, u_{xx} \rangle}{\langle \alpha, u \rangle} u_x + \frac{3}{2} \frac{\langle \alpha, u_x \rangle^2}{\langle \alpha, u \rangle^2} u. \end{aligned}$$

Отметим, что последнее уравнение не меняет своего вида при произвольной замене $u \rightarrow S(u)$, где S – ортогональное преобразование. В случае $\langle \alpha, \alpha \rangle \neq 0$ такой заменой и растяжением можно превратить α в e_1 , т.е. свести деформационный вектор общего положения к (9). Аналогично для уравнения, соответствующего случаю кососимметрических матриц, сопряжение подходящей ортогональной матрицей сводит деформационный вектор общего положения к (5).

Класс 3. Следующее интегрируемое уравнение:

$$v_t = v_{xxx} - \frac{3}{2} \{v_{xx}, \phi(v_x), v_{xx}\}, \quad (16)$$

связано с уравнением (14) введением потенциала $u = v_x$. Матричное уравнение (16) имеет вид

$$v_t = v_{xxx} - \frac{3}{2} v_{xx} v_x^{-1} v_{xx}.$$

Векторные уравнения (16) содержатся в [4].

Класс 4. Уравнения из этого класса обобщают систему

$$u_t = u_{xx} - \frac{2}{u+v} u_x^2, \quad v_t = -v_{xx} + \frac{2}{u+v} v_x^2,$$

связанную с известной моделью Гейзенберга $S_t = [S, S_{xx}]$ стереографической проекцией. Уравнение, соответствующее произвольной тройной йордановой системе T , имеет вид

$$u_t = u_{xx} - 2\{u_x, \phi(u+v), u_x\}, \quad v_t = -v_{xx} + 2\{v_x, \phi(u+v), v_x\}. \quad (17)$$

Можно проверить, что уравнение (17) обладает высшей симметрией вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} - 6\{u_x, \phi(u+v), u_{xx}\} + 6\sigma_{u+v}(u_x, u_x, u_x), \\ v_t &= v_{xxx} - 6\{v_x, \phi(u+v), v_{xx}\} + 6\sigma_{u+v}(v_x, v_x, v_x), \end{aligned}$$

принадлежащей к классу 2.

Матричное уравнение (17) имеет вид

$$u_t = u_{xx} - 2u_x(u+v)^{-1}u_x, \quad v_t = -v_{xx} + 2v_x(u+v)^{-1}v_x,$$

векторные уравнения можно найти в [4].

Как уже отмечалось выше (см. пример 1), все матричные уравнения из классов 1–4 допускают симметрическую и (в случае четного размера матриц) кососимметрическую редукции. Нетривиальная кососимметрическая редукция в нечетном случае требует замены в матричных уравнениях обратных матриц на матрицу (5). Обнаружение этой редукции – один из основных результатов настоящей работы.

Исследования были выполнены при частичной поддержке РФФИ (грант 96-01-00382) и INTAS.

Список литературы

- [1] *S.I. Svinolupov* // Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 559–575.
- [2] *S.I. Svinolupov, R.I. Yamilov* // Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 548–552.
- [3] *С.И. Свинолунов* // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. №4. С. 40–53.
- [4] *С.И. Свинолунов, В.В. Соколов* // ТМФ. 1994. Т. 100. №2. С. 214–218.
- [5] *K. Meyberg* // Math. Zeitschrift. 1970. Bd. 115. №1. S. 58–78.
- [6] *E. Neher* // Lect. Notes Math. 1986. V. 1280.
- [7] *O. Loos* // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. №1. P. 67–71.
- [8] *О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, Л.А. Скорняков, И.П. Шестаков*. Общая алгебра. Т. 1. М.: Наука, 1990.
- [9] *M. Koecher*. Jordan algebras and their applications. Minneapolis: Univ. Minnesota, 1962.
- [10] *С.И. Свинолунов, В.В. Соколов* // Мат. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 115–121.
- [11] *V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov* // Acta Appl. Math. 1995. V. 41.

Математический институт
Уфимского научного центра РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450000, Уфа, Россия;
e-mail: sokolov@nkc.bashkiria.su

Поступила в редакцию
8.II.1996 г.

S. I. Svinolupov, V. V. Sokolov

**DEFORMATIONS OF TRIPLE JORDAN
SYSTEMS AND INTEGRABLE EQUATIONS**

Deformations of arbitrary triple Jordan systems are considered. They are defined in terms of the deformation vector satisfying a compatible overdetermined system of differential equations. For the simple triple Jordan systems the deformation vector is explicitly found. It gives rise to new classes of integrable partial differential equations with arbitrary number of unknown functions.