Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Классификация интегрируемых егоровских гидродинамических цепочек, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 55–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 10:09:56

© 2004 г.

М. В. Павлов*

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЕГОРОВСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПОЧЕК

Вводится понятие егоровских гидродинамических цепочек. Показана их связь с интегрируемыми $(2 + 1)$ -мерными уравнениями гидродинамического типа. Проведена классификация таких уравнений в простейшем случае. Найдены $(2 + 1)$ -мерные уравнения, не только обобщающие уже известные уравнения Хохлова–Заболоцкой или Бойера–Финли, но и намного превосходящие их по сложности, – уравнения, параметризованные тета-функциями и решениями уравнения Шази. Получены аналоги бездисперсионных уравнений Хироты.

Ключевые слова: гидродинамические цепочки и решетки, егоровские интегрируемые системы, бездисперсионные уравнения Хироты, тау-функция, $(2 + 1)$ -мерные бездисперсионные уравнения, уравнение Шази, тета-функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное исследование систем гидродинамического типа, интегрируемых обобщенным методом годографа,

$$u_t^i = v_j^i(\mathbf{u})u_x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

началось после выхода работ [1], [2], хотя к этому времени примеры бесконечнокомпонентных аналогов таких систем были уже хорошо известны и многие их свойства, такие как законы сохранения или коммутирующие потоки, гамильтоновы структуры и представления типа Лакса, были изучены, а соответствующие им $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые системы гидродинамического типа и кинетические уравнения были найдены¹⁾ (см. [3]–[6]). Задача классификации интегрируемых систем гидродинамического типа эквивалентна решению задачи N волн в методе обратной задачи (см., например, [7]). Здесь предлагается альтернативный подход, основанный на классификации бесконечнокомпонентных аналогов (треугольного вида) таких систем

$$\partial_{t^n} H_k = \partial_x F_{k,n}(H_0, H_1, \dots, H_{k+n}), \quad k, n = 0, 1, \dots, \quad F_{k,0} \equiv H_k, \quad x \equiv t^0, \quad (2)$$

¹⁾Всюду в дальнейшем под интегрируемостью систем гидродинамического типа мы будем подразумевать интегрируемость в смысле обобщенного метода годографа (см. [2]).

*Loughborough University, Loughborough, UK. E-mail: maxim.pavlov@mtu-net.ru

которые всюду в дальнейшем будем называть *гидродинамическими цепочками*, а затем на последующем описании их N -компонентных гидродинамических редукций (1). Несмотря на то что многие такие редукции уже были ранее найдены из алгебро-геометрических соображений (см. [5], [8]), тем не менее только недавно было показано, что интегрируемые системы гидродинамического типа вложены в гидродинамические цепочки как N -компонентные гидродинамические редукции с произволом в N функций одной переменной (см. [9]).

Для простоты изложения ограничимся случаем *егоровских гидродинамических цепочек*. Определение егоровских систем гидродинамического типа было предложено в [10] (см. также [11] о потенциальных метриках и ортогональных криволинейных координатах). Рассмотрим произвольную систему гидродинамического типа (1), которая имеет пару законов сохранения вида

$$\partial_t a(\mathbf{u}) = \partial_x b(\mathbf{u}), \quad \partial_t b(\mathbf{u}) = \partial_x c(\mathbf{u}).$$

На данный момент известно много примеров систем гидродинамического типа, имеющих такую пару законов сохранения. Не все системы гидродинамического типа, имеющие такую пару законов сохранения, являются интегрируемыми обобщенным методом годографа, но интегрируемые системы гидродинамического типа, имеющие такую пару законов сохранения, обладают дополнительной симметрией, проявляющейся при одновременной записи этих систем вместе с их коммутирующими потоками в дивергентной форме. Их и будем в дальнейшем называть *егоровскими*. Если взять данную егоровскую систему гидродинамического типа (1) вместе с ее произвольными коммутирующими потоками (т.е. полевые переменные u^i зависят одновременно от многих независимых переменных t^k)

$$u_{t^k}^i = w_{(k)j}^i(\mathbf{u}) u_x^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

где $t \equiv t^1$, то всегда найдутся плотности законов сохранения $a^k(\mathbf{u})$ такие, что соответствующие законы сохранения будут записаны в симметричной дивергентной форме

$$d\Omega_i = \Phi_{ik}(\mathbf{u}) dt^k, \quad \Phi_{ik}(\mathbf{u}) = \Phi_{ki}(\mathbf{u}), \quad \Phi_{0k}(\mathbf{u}) \equiv a^k(\mathbf{u}). \quad (4)$$

Верно и обратное: для данной егоровской системы гидродинамического типа (1) произвольные плотности законов сохранения $a^k(\mathbf{u})$ задают коммутирующие потоки (3) через симметричное дивергентное представление (4). Это означает, что в этом случае существует потенциальная функция $\Omega(t^0, t^1, \dots, t^N)$, вторые производные которой

$$\Omega_{ik} \equiv \Phi_{ik}(\mathbf{u}).$$

Теперь перейдем к обобщению этого свойства на гидродинамические цепочки (2). Потребуем, чтобы вторые производные от функции $\Omega(t^0, t^1, \dots)$, зависящей (*неявно*) теперь от *бесконечного* числа независимых переменных t^k , были (*явными*) функциями только от *конечного* числа полевых переменных (моментов) H_m , а именно

$$\Omega_{nk} = \Phi_{nk}(H_0, H_1, \dots, H_{n+k}),$$

где $H_i \equiv \Phi_{0i}$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда первые две гидродинамические цепочки из всей иерархии коммутирующих потоков имеют вид

$$\begin{aligned}\partial_t H_0 &= \partial_x H_1, \quad \partial_t H_1 = \partial_x \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2), \quad \partial_t H_2 = \partial_x \Phi_{12}(H_0, H_1, H_2, H_3), \dots, \\ \partial_y H_0 &= \partial_x H_2, \quad \partial_y H_1 = \partial_x \Phi_{12}(H_0, H_1, H_2, H_3), \\ \partial_y H_2 &= \partial_x \Phi_{22}(H_0, H_1, H_2, H_3, H_4), \dots,\end{aligned}$$

где $y \equiv t^2$. Оказывается, проверка равенства вторых смешанных производных $\partial_y \Phi_{11} = \partial_t \Phi_{12}$ приводит к неожиданному на первый взгляд результату. Решение Φ_{11} получающейся таким образом переопределенной системы уравнений перечисляет все егоровские гидродинамические цепочки $\partial_t H_n = \partial_x \Phi_{nk}(H_0, H_1, \dots, H_{n+k})$, где $H_i \equiv \Phi_{0i}$, $i = 1, 2, \dots$, и позволяет однозначно восстановить все остальные коэффициенты Φ_{nk} . При этом не только находятся все эти егоровские гидродинамические цепочки, но и их производящие функции законов сохранения и коммутирующих потоков. То есть всего лишь по первому коэффициенту Φ_{11} можно восстановить всю информацию о всей соответствующей гидродинамической цепочке.

Подставляя $H_i = \Omega_{0i}$ в найденные иерархии гидродинамических цепочек, получаем многомерные интегрируемые системы гидродинамического типа

$$\Omega_{nk} = \Phi_{nk}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \dots, \Omega_{0,n+k}),$$

где, например, их первый представитель $-(2+1)$ -мерная система гидродинамического типа – имеет вид

$$\partial_t H_0 = \partial_x H_1, \quad \partial_y H_0 = \partial_x H_2, \quad \partial_t H_1 = \partial_x \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2).$$

Под интегрируемостью многомерных систем гидродинамического типа следует понимать существование вложенных в них гидродинамических редукций – бесконечного набора $(1+1)$ -мерных интегрируемых систем гидродинамического типа, получаемых с произволом в N функций одной переменной (см. [12], [9]), что будет проиллюстрировано в отдельной работе. Кинетические уравнения типа бесстолкновительного уравнения Больцмана–Власова находятся из производящих функций законов сохранения и коммутирующих потоков, как это было сделано в работе [5]. Таким образом, существует интегрируемая триада: гидродинамические цепочки – многомерные системы гидродинамического типа – кинетические бесстолкновительные уравнения. Информация об одном объекте из этих трех позволяет восстановить два других.

2. ОПИСАНИЕ ЕГОРОВСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПОЧЕК

Как было уже отмечено ранее, первое условие совместности

$$\partial_y \Phi_{11}(H_0, H_1, H_2) = \partial_t \Phi_{12}(H_0, H_1, H_2, H_3) \quad (5)$$

первых двух коммутирующих потоков егоровских гидродинамических цепочек

$$\partial_{t^k} H_n = \partial_x \Phi_{nk}(H_0, H_1, \dots, H_{n+k}), \quad \Phi_{nk} = \Phi_{kn}, \quad H_i \equiv \Phi_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

оказывается необходимым и достаточным для нахождения и всех остальных коэффициентов Φ_{nk} . Из условия (5) следует система уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_{11,1}\Phi_{12,0} + \Phi_{11,2}\Phi_{22,0} &= \Phi_{12,1}\Phi_{11,0} + \Phi_{12,2}\Phi_{12,0} + \Phi_{12,3}\Phi_{13,0}, \\ \Phi_{11,2}\Phi_{22,1} &= \Phi_{12,0} + \Phi_{12,2}\Phi_{12,1} + \Phi_{12,3}\Phi_{13,1}, \\ \Phi_{11,0} + \Phi_{11,1}\Phi_{12,2} + \Phi_{11,2}\Phi_{22,2} &= \Phi_{12,1}\Phi_{11,2} + \Phi_{12,2}^2 + \Phi_{12,3}\Phi_{13,2}, \\ \Phi_{11,1}\Phi_{12,3} + \Phi_{11,2}\Phi_{22,3} &= \Phi_{12,2}\Phi_{12,3} + \Phi_{12,3}\Phi_{13,3}, \\ \Phi_{11,2}\Phi_{22,4} &= \Phi_{12,3}\Phi_{13,4}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi_{nk,m} \equiv \partial \Phi_{nk} / \partial H_m$. Система уравнений (6) является сильно переопределенной системой уравнений в частных производных. Поскольку все функции, входящие в эту систему уравнений, зависят от различного числа полевых переменных, то шаг за шагом, исключая эти функции одну за другой, получаем систему из десяти уравнений, первые шесть из которых имеют вид

$$\begin{aligned} u_{222} &= 2 \frac{u_{22}^2}{u_2}, & u_{122} &= 2 \frac{u_{22}u_{12}}{u_2}, & u_{022} &= 2 \frac{u_{22}u_{02}}{u_2}, \\ u_{112} &= 2 \frac{u_{12}^2}{u_2}, & u_{012} &= 2 \frac{u_{02}u_{12}}{u_2}, & u_{002} &= 2 \frac{u_{02}^2}{u_2}, \end{aligned}$$

где для краткости было использовано обозначение $u \equiv \Phi_{11}$, нижние индексы означают соответствующие производные. На этом этапе интегрирования возникает условие

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial H_2} = \frac{1}{\alpha H_0 + \beta H_1 + \gamma + \varepsilon H_2}, \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – произвольные константы. Учитывая (7), оставшиеся четыре уравнения

$$\begin{aligned} u_{111} &= (2\varepsilon u_1 - 2\beta u_2)u_{11} + 4\varepsilon u_{01} + 4\alpha\beta u_2^2 + 2\beta^2 u_2^2 u_1, \\ u_{011} &= (2\varepsilon u_0 - 2\alpha u_2)u_{11} + 2\varepsilon u_{00} + 2\alpha^2 u_2^2 + 2\beta^2 u_0 u_2^2, \\ u_{001} &= (4\varepsilon u_0 - 4\alpha u_2)u_{01} + (2\beta u_2 - 2\varepsilon u_1)u_{00} + 4\alpha\beta u_2^2 u_0 - 2\alpha^2 u_2^2 u_1, \\ u_{000} &= 2(u_{01}^2 - u_{00}u_{11}) + (2\varepsilon u_0 - 2\alpha u_2 - 4\beta u_2 u_1 + 2\varepsilon u_1^2)u_{00} + \\ &\quad + (4\alpha u_2 u_1 + 4\beta u_0 u_2 - 4\varepsilon u_0 u_1)u_{01} + (2\varepsilon u_0^2 - 4\alpha u_0 u_2)u_{11} + \\ &\quad + 2\alpha^2 u_2^2 u_0 + 2\beta^2 u_0^2 u_2^2 - 4\alpha\beta u_0 u_1 u_2^2 + 2\alpha^2 u_1^2 u_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

могут быть проинтегрированы. Однако достаточно будет ограничиться только “однородными” случаями, поскольку, как будет показано ниже, все “смешанные” случаи различными элементарными преобразованиями сводятся к “однородным”. Их всего четыре (они вложены друг в друга по принципу “матрешки”), и они будут представлены по возрастающей сложности.

ТЕОРЕМА 1. Если в условии (7) положить $\alpha = \beta = \varepsilon = 0$ (всегда можно взять $\gamma = 1$), то функция Φ_{11} равна

$$\Phi_{11} = H_2 + \frac{A}{4}H_1^2 + BH_0H_1 + \frac{B^2}{A}H_0^2 + CH_1 + EH_0 + Ge^{-AH_0}, \quad (9)$$

где A, B, C, E, G — произвольные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (7), находим

$$\Phi_{11} = H_2 + F(H_0, H_1), \quad (10)$$

где (см. (8))

$$F_{000} = 2(F_{01}^2 - F_{00}F_{11}), \quad F_{001} = F_{011} = F_{111} = 0.$$

Последняя система уравнений последовательно и элементарно интегрируется.

СЛЕДСТВИЕ 1. С учетом того что $H_0 \equiv \Omega_{xx}$, $H_1 \equiv \Omega_{xt}$, $H_2 \equiv \Omega_{xy}$, $\Phi_{11} \equiv \Omega_{tt}$, из (9) получаем новое интегрируемое $(2+1)$ -мерное бездисперсионное уравнение

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \frac{A}{4}\Omega_{xt}^2 + B\Omega_{xx}\Omega_{xt} + \frac{B^2}{A}\Omega_{xx}^2 + C\Omega_{xt} + E\Omega_{xx} + Ge^{-A\Omega_{xx}}. \quad (11)$$

Если $C = E = G = 0$, $A = -2B^2$ и $B \rightarrow 0$, то получаем хорошо известное уравнение Хохлова–Заболоцкой (бездисперсионный предел уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП)); если положить $C = E = 0$, $G = -2B^2A^{-3} + 2G_0A^{-2}$ и $A \rightarrow 0$, то получаем модифицированное уравнение Хохлова–Заболоцкой

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + B\Omega_{xx}\Omega_{xt} + G_0\Omega_{xx}^2 + \frac{B^2}{3}\Omega_{xx}^3; \quad (12)$$

в общем же случае с помощью преобразования Галилея ($H_1 + 2BH_0/A \rightarrow H_1$, $H_2 + (C + 4B/A)H_1 + (E + 12B^2/A^2)H_0 \rightarrow H_2$, $x - 2Bt/A \rightarrow x$) выражение (9) принимает более компактный вид:

$$\Phi_{11} = H_2 + \frac{A}{4}H_1^2 + Ge^{-AH_0}, \quad (13)$$

что определяет нетривиальное обобщение (т.е. когда $G \neq 0$) иерархии бездисперсионного предела дискретного аналога уравнения КП (см. [13]), известной также под названием континуальный предел двумеризованной цепочки Тоды или цепочка Дарбу–Лапласа (одно из $(2+1)$ -мерных уравнений этой иерархии есть уравнение Бойера–Финли $\Omega_{tt-1} = e^{\Omega_{xx}}$). Если теперь положить $G = -A^{-2}$, сделать сдвиг $H_2 + H_0/A - A^{-2} \rightarrow H_2$ и $A \rightarrow 0$, то получим снова уравнение Хохлова–Заболоцкой. То есть бездисперсионное уравнение

$$\Omega_{tt} = \Omega_{xy} + \frac{A}{4}\Omega_{xt}^2 + Ge^{-A\Omega_{xx}}$$

(см. (9)) задает простейшую нетривиальную “комбинацию” двух известных гидродинамических цепочек (мы не обсуждаем здесь известную тривиальную связь между этими

цепочками (см., например, [13]), поскольку найденная комбинация “перемешивает” их (см. ниже)).

Таким образом, даже в простейшем случае ($\alpha = \beta = \varepsilon = 0$, $\gamma \neq 0$) с помощью предложенного подхода найдены новые $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые бездисперсионные уравнения. Альтернативное описание $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых бездисперсионных уравнений (связанных *не только* с егоровскими гидродинамическими цепочками) было предложено в работах [14], однако среди них не было найдено примеров с экспонентами (см., например, (9)) и тем более случаев, рассмотренных ниже. Тем не менее, несмотря на огромное количество найденных примеров как в [14], так и в настоящей работе, классификация пока не может быть построена, так как многие найденные $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые бездисперсионные уравнения могут оказаться эквивалентными.

ТЕОРЕМА 2. *Если в условии (7) положить $\beta = \varepsilon = 0$ (всегда можно выбрать $\alpha = 1$, константа γ любая, ее можно исключить сдвигом $H_0 + \gamma \rightarrow H_0$), то*

$$\Phi_{11} = \frac{H_2}{H_0} + \left(\frac{1}{H_0} + \frac{A}{4H_0^2} \right) H_1^2 + \left(\frac{B}{H_0} + \frac{C}{H_0^2} \right) H_1 + \frac{C^2}{AH_0^2} + \frac{E}{H_0} + Ge^{A/H_0}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (7), находим

$$\Phi_{11} = \frac{H_2}{H_0} + F(H_0, H_1), \quad (15)$$

где (см. (8))

$$\begin{aligned} F_{000} &= 2(F_{01}^2 - F_{00}F_{11}) - \frac{2}{H_0}F_{00} + \frac{4}{H_0}(F_1F_{01} - F_0F_{11}) + \frac{2}{H_0^2}(F_0 + F_1^2), \\ F_{001} &= -\frac{4}{H_0}F_{01} - \frac{2}{H_0^2}F_1, \quad F_{011} = -\frac{2}{H_0}F_{11} + \frac{2}{H_0^2}, \quad F_{111} = 0. \end{aligned}$$

Последняя система уравнений последовательно и элементарно интегрируется.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Подставляя $H_0 \equiv \Omega_{xx}$, $H_1 \equiv \Omega_{xt}$, $H_2 \equiv \Omega_{xy}$, $\Phi_{11} \equiv \Omega_{tt}$ в (14), получаем новое интегрируемое $(2 + 1)$ -мерное бездисперсионное уравнение*

$$\Omega_{tt} = \frac{\Omega_{xy}}{\Omega_{xx}} + \left(\frac{1}{\Omega_{xx}} + \frac{A}{4\Omega_{xx}^2} \right) \Omega_{xt}^2 + \left(\frac{B}{\Omega_{xx}} + \frac{C}{\Omega_{xx}^2} \right) \Omega_{xt} + \frac{C^2}{A\Omega_{xx}^2} + \frac{E}{\Omega_{xx}} + Ge^{A/\Omega_{xx}}. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 3. *Преобразование по решению*

$$d\tilde{x} = H_0 dx + H_1 dt, \quad d\tilde{t} = dt$$

переводит $(2 + 1)$ -мерное бездисперсионное уравнение (16) в $(2 + 1)$ -мерное бездисперсионное уравнение (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При этом преобразовании по решению все моменты преобразуются по правилу $H_0 \rightarrow -1/H_0$, $H_1 \rightarrow H_1/H_0$, $H_2 \rightarrow H_2/H_0$ и т.д. Соответственно $\Phi_{11} - H_1^2/H_0 \rightarrow \Phi_{11}$, откуда прямым пересчетом и получается указанная эквивалентность.

ТЕОРЕМА 4. Если в условии (7) положить $\varepsilon = 0$ (всегда можно выбрать $\beta = 1$, а H_0 и константа γ исключаются преобразованием Галилея $H_1 + \alpha H_0 + \gamma \rightarrow H_1$, $x - \alpha t \rightarrow x$), то

$$\Phi_{11} = \frac{H_2 + BH_0 + C}{H_1} + \frac{1}{6}\zeta(H_0)H_1^2, \quad (17)$$

где функция ζ является решением уравнения Шази

$$\zeta''' + 2\zeta\zeta'' = 3\zeta'^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (7), находим

$$\Phi_{11} = \frac{H_2}{H_1} + F(H_0, H_1), \quad (18)$$

где (см. (8))

$$\begin{aligned} F_{000} &= 2(F_{01}^2 - F_{00}F_{11}) + \frac{4}{H_1}(F_0F_{01} - F_1F_{00}) + \frac{2}{H_1^2}F_0^2, \\ F_{001} &= \frac{2}{H_1}F_{00}, \quad F_{011} = \frac{2}{H_1^2}F_0, \quad F_{111} + \frac{2}{H_1}F_{11} = \frac{2}{H_1^2}F_1. \end{aligned}$$

Последняя система уравнений последовательно и элементарно интегрируется.

СЛЕДСТВИЕ 3. Подставляя $H_0 \equiv \Omega_{xx}$, $H_1 \equiv \Omega_{xt}$, $H_2 \equiv \Omega_{xy}$, $\Phi_{11} \equiv \Omega_{tt}$ в (17), получаем еще одно новое интегрируемое $(2+1)$ -мерное бездисперсионное уравнение

$$\Omega_{tt} = \frac{\Omega_{xy} + B\Omega_{xx} + C}{\Omega_{xt}} + \frac{1}{6}\zeta(\Omega_{xx})\Omega_{xt}^2.$$

Наконец, самый общий случай (см. (7), когда все константы $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ ненулевые) сводится к последнему “однородному” случаю $\varepsilon = 1$ сдвигом $H_2 + \beta H_1 + \alpha H_0 + \gamma \rightarrow H_2$.

ТЕОРЕМА 5. Если в условии (7) положить $\varepsilon = 1$ ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), то

$$\Phi_{11} = \ln H_2 - \frac{1}{4} \int \zeta(H_0) dH_0 - \ln w(H_0, H_1), \quad (19)$$

где ζ является решением уравнения Шази (см. (17)) и $w(H_0, H_1)$ – тета-функция, определяемая из системы уравнений

$$4w_0 = w_{11}, \quad v = -(\ln w)_{11}, \quad v_1^2 = 4v^3 - 4\zeta v^2 - 8\zeta'v - \frac{8}{3}\zeta''.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя (7), находим

$$\Phi_{11} = \ln H_2 + F(H_0, H_1), \quad (20)$$

где (см. (8))

$$\begin{aligned} F_{111} &= 2F_1F_{11} + 4F_{01}, & F_{011} &= 2F_0F_{11} + 2F_{00}, & F_{001} &= 4F_0F_{01} - 2F_1F_{00}, \\ F_{000} &= 2(F_{01}^2 - F_{00}F_{11}) + 2(F_0 + F_1^2)F_{00} - 4F_0F_1F_{01} + 2F_0^2F_{11}. \end{aligned} \quad (21)$$

Последняя система уравнений последовательно и элементарно интегрируется.

СЛЕДСТВИЕ 4. Подставляя $H_0 \equiv \Omega_{xx}$, $H_1 \equiv \Omega_{xt}$, $H_2 \equiv \Omega_{xy}$, $\Phi_{11} \equiv \Omega_{tt}$ в (19), получаем самое общее интегрируемое $(2+1)$ -мерное бездисперсионное уравнение

$$\Omega_{tt} = \ln \Omega_{xy} - \frac{1}{4} \int \zeta(\Omega_{xx}) d\Omega_{xx} - \ln w(\Omega_{xx}, \Omega_{xt})$$

в рамках сделанных выше ограничений (см. (5), (6)).

3. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

Нахождение всех остальных коэффициентов Φ_{nk} является более простой задачей, чем вычисление самого первого коэффициента Φ_{11} . Из системы уравнений (6) явно находится не только первый коэффициент Φ_{11} , но и второй коэффициент Φ_{12} (соответствующие результаты приводятся ниже). Точно так же из остальных условий совместности, таких как $\partial_{tk}\Phi_{11} = \partial_t\Phi_{1k}$ ($\partial_{tm}\Phi_{nk} = \partial_{tn}\Phi_{mk} = \partial_{tk}\Phi_{mn}$), можно итеративно найти все коэффициенты Φ_{nk} . Однако есть альтернативный подход – построение производящей функции всех коэффициентов Φ_{nk} .

Начнем с первого случая (10).

ТЕОРЕМА 6. Производящая функция плотностей законов сохранения μ для первых двух гидродинамических цепочек, записанных в форме законов сохранения

$$\mu_t = \partial_x f(\mu, H_0), \quad \mu_y = \partial_x \varphi(\mu, H_0, H_1), \quad (22)$$

определяется из условия совместности $\partial_\tau \Phi_{11} = \partial_t f(\mu, H_0)$, где первые три уравнения производящей функции коммутирующих потоков суть

$$\partial_\tau H_0 = \mu_x, \quad \partial_\tau H_1 = \partial_x f(\mu, H_0), \quad \partial_\tau H_2 = \partial_x \varphi(\mu, H_0, H_1). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением.

Для иллюстрации ограничимся только уже упомянутыми следующими частными случаями:

а) для уравнения Хохлова–Заболоцкой ($\Phi_{11} = H_2 - H_0^2/2$) производящая функция законов сохранения имеет вид (см., например, [3])

$$\mu_t = \partial_x \left(\frac{\mu^2}{2} + H_0 \right);$$

б) для модифицированного уравнения Хохлова–Заболоцкой (12)

$$\mu_t = \partial_x \left(\frac{\mu^3}{3} - \frac{G_0}{B} \mu - BH_0 \mu \right);$$

в) наконец, для обобщенного случая (13)

$$\mu_t = \partial_x \left[e^{-AH_0/2} \left(e^\mu + \frac{GA}{2} e^{-\mu} \right) \right]. \quad (24)$$

Если теперь положить $G = 0$ и сделать замену $\tilde{\mu} = \mu + AH_0/2$, то последняя производящая функция перейдет в производящую функцию

$$\tilde{\mu}_t = \partial_x \left(e^{\tilde{\mu}} - \frac{A}{2} H_1 \right),$$

связанную с бездисперсионным пределом дискретного уравнения КП (см., например, [13] и теорему 7 ниже)

$$\partial_t C_k = \partial_x C_{k+1} + C_k \partial_x C_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (25)$$

Здесь необходимо отметить, что в эту гидродинамическую цепочку нулевой момент H_0 не входит. Если теперь сделать более сложный предельный переход $\tilde{\mu} = \delta\mu/2 - \ln \delta$, где $A = -\delta^2/2$ (здесь $G = A^{-2}$, см. выше) и $\delta \rightarrow 0$, то получается снова производящая функция, связанная с бездисперсионным пределом уравнения КП (см. выше и теорему 7):

$$\partial_t A_k = \partial_x A_{k+1} + k A_{k-1} \partial_x A_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 7. *Производящая функция законов сохранения (24) задает гидродинамическую цепочку*

$$\begin{aligned} \partial_t H_0 &= -\frac{2}{A} \partial_x C_0, & \partial_t C_0 &= \partial_x \left(C_1 - \frac{GA}{2} e^{-AH_0} \right), \\ \partial_t C_1 &= \partial_x C_2 + \left(C_1 - \frac{GA}{2} e^{-AH_0} \right) \partial_x C_0, \\ \partial_t C_k &= \partial_x C_{k+1} + k C_k \partial_x C_0 - \frac{GA}{2} e^{-AH_0} [\partial_x C_{k-1} + (k-1) A C_{k-1} \partial_x H_0], \end{aligned} \quad (27)$$

где $k = 2, 3, \dots$ и $C_0 \equiv -AH_1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\lambda(x, t, \mu)$, удовлетворяющую уравнению

$$\lambda_t - e^{-AH_0/2} \left(e^\mu - \frac{GA}{2} e^{-\mu} \right) \lambda_x = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \left\{ \mu_t - \partial_x \left[e^{-AH_0/2} \left(e^\mu + \frac{GA}{2} e^{-\mu} \right) \right] \right\}, \quad (28)$$

и формальный ряд ($\lambda \rightarrow \infty$, $p \rightarrow \infty$)

$$\lambda = p + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}, \quad (29)$$

где $p = e^{\mu - AH_0/2}$. Подставляя (29) и (27) в (28), получим тождество. Если в (28) положить $\lambda = \text{const}$, то немедленно получим (24). Уравнение вида (29) называется уравнением римановой поверхности (точнее, уравнение римановой поверхности на бесконечности имеет асимптотическое поведение (29)), а уравнение вида (28) называется уравнением деформации римановой поверхности (см. [6]).

Разлагая теперь функцию $p(x, t, \lambda)$ в ряд Бурмана–Лагранжа (обратный ряд к (29)) и подставляя ее в $\mu = AH_0/2 + \ln p$, из (24) получим явные выражения для $\Phi_{1k}(H_0, H_1, \dots, H_{k+1})$. Из сравнения законов сохранения $\partial_t H_k = \partial_x \Phi_{1k}$ и первой гидродинамической цепочки, записанной в форме (27), также найдем явные выражения моментов C_k через моменты H_k .

ЗАМЕЧАНИЕ. При $G = 0$ уравнения (27) переходят в (25); при $G = 4\varepsilon^{-4}$, $A = -\varepsilon^2/2$ уравнения (27) переходят в (26). Однако в последнем случае выражение моментов C_k через A_k не тривиально.

ТЕОРЕМА 8. Подставляя обратный к (29) ряд

$$\mu = \ln \lambda + \frac{A}{2} \left(H_0 + \frac{H_1}{\lambda} + \frac{H_2}{\lambda^2} + \dots \right) \quad (30)$$

($\lambda, \mu \rightarrow \infty$) в уравнение

$$\partial_{\tau(\zeta)} \mu(\lambda) = \frac{A}{2} \partial_x \ln \frac{e^{\mu(\lambda) + \mu(\zeta)} + GA/2}{e^{\mu(\lambda)} - e^{\mu(\zeta)}}, \quad (31)$$

где $\mu = AH_0/2 + \ln p$, получим все коэффициенты Φ_{nk} , $n, k = 0, 1, \dots$, так как (31) одновременно является производящей функцией как коммутирующих потоков (по параметру ζ), так и законов сохранения (по параметру λ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства вторых смешанных производных

$$\partial_t [\partial_{\tau(\zeta)} \mu(\lambda)] = \partial_{\tau(\zeta)} [\partial_t \mu(\lambda)]$$

(см. (24)).

Так же как и в теории бездисперсионных уравнений Хироты, связанных с бездисперсионными пределами стандартной и дискретной иерархий КП, если ввести оператор

$$D(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} \partial_{t^k}, \quad (32)$$

то уравнение (31) интегрируется один раз по x , так как

$$\mu(\lambda) = \ln \lambda + \frac{A}{2} D(\lambda) \Omega_x,$$

и принимает вид

$$e^{AD(\lambda)D(\zeta)\Omega/2} = \frac{\lambda - \zeta}{\lambda \zeta} \frac{\lambda \zeta e^{A(D(\lambda)+D(\zeta))\Omega_x/2} + GA/2}{\lambda e^{AD(\lambda)\Omega_x/2} - \zeta e^{AD(\zeta)\Omega_x/2}},$$

где $\partial_{\tau(\zeta)} \equiv AD(\zeta)/2$. Кроме этого выражения для пары (λ, ζ) , используя такие же выражения для пар (ζ, η) и (η, λ) и исключая из всех трех пар производные по x , окончательно получаем аналог бездисперсионных уравнений Хироты для обобщенной иерархии КП – дискретной иерархии КП (27):

$$\begin{aligned} &(\lambda - \zeta)\lambda\zeta\eta^2 e^{AD(\lambda)D(\eta)\Omega/2} e^{AD(\zeta)D(\eta)\Omega/2} + (\zeta - \eta)\zeta\eta\lambda^2 e^{AD(\zeta)D(\lambda)\Omega/2} e^{AD(\eta)D(\lambda)\Omega/2} + \\ &+ (\eta - \lambda)\lambda\eta\zeta^2 e^{AD(\eta)D(\zeta)\Omega/2} e^{AD(\lambda)D(\zeta)\Omega/2} = \frac{GA}{2}(\eta - \lambda)(\zeta - \eta)(\lambda - \zeta). \end{aligned}$$

Таким образом, последнее уравнение, так же как и (31), представляет собой бесконечный набор алгебраических соотношений между вторыми производными от логарифм-тау-функции ($\Omega \equiv \ln \tau$) для обобщенной иерархии КП – дискретной иерархии КП (27). Очевидно, что найденные таким образом коэффициенты Φ_{ik} заполняют не всю плоскость (где каждый индекс пробегает все целые значения), а лишь сектор, где оба индекса пробегает целые неотрицательные значения. Таким образом, необходимо найти альтернативу формальному ряду (29) и оператору $D(\lambda)$ (32). Легко видеть, что разложения производящих функций законов сохранения в формальные ряды не единственны. Описание всех возможных формальных рядов связано с перечислением всех особых точек соответствующих производящих функций законов сохранения. То есть в данном случае существуют только три возможности:

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \mu \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \mu \rightarrow -\infty; \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \ln \sqrt{-\frac{GA}{2}}.$$

Первый случай рассмотрен выше, а второй эквивалентен первому (с точностью до обозначений). Таким образом, именно третий случай позволит найти выражения для всех остальных коэффициентов Φ_{ik} .

ТЕОРЕМА 9. Подставляя формальный ряд

$$\mu = \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{GA}{2} \right) + \lambda H_{-1} + \lambda^3 H_{-2} + \lambda^5 H_{-3} + \dots \quad (33)$$

в (31), где $\partial_{\tau(\zeta)} \equiv \tilde{D}(\zeta)$ и $\tilde{D}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} \partial_{t-k}$, получим все коэффициенты Φ_{nk} , $n, k = -1, -2, \dots$.

Подставляя формальный ряд (33) в (31) и полагая $\partial_{\tau(\zeta)} \equiv AD(\zeta)/2$ или, наоборот, подставляя (30) в (31) и полагая $\partial_{\tau(\zeta)} \equiv \tilde{D}(\zeta)$, получим все коэффициенты Φ_{nk} , $n = 1, 2, \dots$, $k = -1, -2, \dots$.

Все эти случаи имеют очевидную интерпретацию. Гидродинамические цепочки

$$\partial_{t^k} H_n = \partial_x \Phi_{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

суть не что иное, как *высшие* коммутирующие потоки, записанные через *высшие* плотности законов сохранения H_k ; если $k = 1, 2, \dots$, $n = -1, -2, \dots$, то соответствующие гидродинамические цепочки – это *высшие* коммутирующие потоки, записанные теперь через *низшие* плотности законов сохранения H_k ; если $k = -1, -2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, то соответствующие гидродинамические цепочки – это *низшие* коммутирующие потоки, записанные через *высшие* плотности законов сохранения H_k ; если $k = -1, -2, \dots$, $n = -1, -2, \dots$, то соответствующие гидродинамические цепочки – это *низшие* коммутирующие потоки, записанные через *низшие* плотности законов сохранения H_k . Причем в силу симметрии Φ_{kn}

$$\partial_{t^{-k}} H_n = \partial_{t^k} H_{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а также

$$\partial_{t^k} \mu(\lambda) = \partial_{\tau(\lambda)} H_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В качестве иллюстрации, приведем только первые два нетривиальных $(2 + 1)$ -мерных бездисперсионных уравнения

$$\Omega_{t^1 t^{-1}} = \sqrt{-2GA} e^{-A\Omega_{xx}/2} \Omega_{xt^{-1}}, \quad \Omega_{t^{-1} t^{-1}} = -A \left(\frac{\Omega_{xt^{-2}}}{\Omega_{xt^{-1}}} + \frac{\Omega_{xt^{-1}}^2}{6} \right).$$

Записанные в моментах H_k

$$\begin{aligned} \partial_{t^{-1}} H_1 &= \partial_{t^1} H_{-1} = \sqrt{-2GA} \partial_x (e^{-AH_0/2} H_{-1}), \\ \partial_{t^{-1}} H_{-1} &= -A \partial_x \left(\frac{H_{-2}}{H_{-1}} + \frac{H_{-1}^2}{6} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

они имеют общую производящую функцию законов сохранения

$$\partial_{t^{-1}} \mu = \frac{A}{2} \partial_x \left(\frac{e^\mu + \sqrt{-GA/2}}{e^\mu - \sqrt{-GA/2}} H_{-1} \right), \quad (35)$$

но являются элементами разных гидродинамических цепочек (ср. (27)). Из (35) немедленно получаем новую гидродинамическую цепочку (ср. (28) и (29))

$$-\frac{2}{A}\partial_{t^{-1}}E_k = \frac{1}{E_0}\left(2\partial_x E_{k+1} + \sum_{m=0}^k \frac{(2m+1)B_{2m}}{2(2m)!}\partial_x E_{k-m}\right) + \left[2(2k+3)E_{k+1} - \sum_{m=0}^k \frac{(2k-2m+1)B_{2m}}{2(2m)!}E_{k-m}\right]\partial_x \frac{1}{E_0},$$

где $k = 0, 1, \dots$, $E_0 = 1/H_{-1}$, B_m — числа Бернулли и уравнение римановой поверхности в окрестности нуля ($\lambda \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$) имеет асимптотическое поведение

$$\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \eta^{2m+1}, \quad \eta \equiv \mu - \ln \sqrt{-\frac{GA}{2}}.$$

Из последнего примера (34) сразу же видно, что замена направления времени ($t^k \leftrightarrow t^{-k}$) и одновременная перенумерация моментов ($H_k \leftrightarrow H_{-k}$) связывает первый случай (13) и частный случай ($\zeta = 1$) из (17). То есть соответствующие случаи *дуальные*: описание одного примера немедленно приводит к описанию двойственного к нему.

ТЕОРЕМА 10. Если $\Omega_{kn} = \Phi_{kn}(H_0, \dots, H_{n+k})$, то

$$\begin{aligned} \Omega_{k,-n} &= \Phi_{k,-n}(H_{-n}, H_{-n+1}, \dots, H_0, \dots, H_{k-1}, H_k), \\ \Omega_{-k,-n} &= \Phi_{-k,-n}(H_{-(k+n)}, \dots, H_0). \end{aligned}$$

Таким образом, совокупность всех коммутирующих потоков, записанных в дивергентной форме

$$d \begin{pmatrix} \dots \\ \Omega_{-2} \\ \Omega_{-1} \\ \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \Phi_{-2,-2} & \Phi_{-2,-1} & H_{-2} & \Phi_{-2,1} & \Phi_{-2,2} & \dots \\ \dots & \Phi_{-2,-1} & \Phi_{-1,-1} & H_{-1} & \Phi_{-1,1} & \Phi_{-1,2} & \dots \\ \dots & H_{-2} & H_{-1} & H_0 & H_1 & H_2 & \dots \\ \dots & \Phi_{-2,1} & \Phi_{-1,1} & H_1 & \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} & \dots \\ \dots & \Phi_{-2,2} & \Phi_{-1,2} & H_2 & \Phi_{1,2} & \Phi_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \dots \\ t^{-2} \\ t^{-1} \\ t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ \dots \end{pmatrix},$$

образует интегрируемую решетку. Подставляя

$$\mu(\lambda) = \ln \sqrt{-\frac{GA}{2}} + \tilde{D}(\lambda)\Omega_x$$

в (31) и опять интегрируя по x , получаем

$$e^{2\tilde{D}(\lambda)\tilde{D}(\zeta)\Omega/A} = \frac{e^\lambda - e^\zeta}{e^{\lambda+\zeta} - 1} \frac{e^{(\tilde{D}(\lambda)+\tilde{D}(\zeta))\Omega_x} - 1}{e^{\tilde{D}(\lambda)\Omega_x} - e^{\tilde{D}(\zeta)\Omega_x}}.$$

Исключая Ω_x из трех соотношений на пары индексов (λ, ζ) , (ζ, η) и (η, λ) , окончательно получаем еще один аналог бездисперсионных уравнений Хироты для обобщенной иерархии КП – дискретной иерархии КП (27):

$$\begin{aligned} & \frac{e^\eta - e^\zeta}{e^{\eta+\zeta} - 1} e^{2\tilde{D}(\lambda)[\tilde{D}(\eta)+\tilde{D}(\zeta)]\Omega/A} + \frac{e^\zeta - e^\lambda}{e^{\zeta+\lambda} - 1} e^{2\tilde{D}(\eta)[\tilde{D}(\zeta)+\tilde{D}(\lambda)]\Omega/A} + \\ & + \frac{e^\lambda - e^\eta}{e^{\lambda+\eta} - 1} e^{2\tilde{D}(\zeta)[\tilde{D}(\lambda)+\tilde{D}(\eta)]\Omega/A} + \frac{e^\eta - e^\zeta}{e^{\eta+\zeta} - 1} \frac{e^\zeta - e^\lambda}{e^{\zeta+\lambda} - 1} \frac{e^\lambda - e^\eta}{e^{\lambda+\eta} - 1} = 0. \end{aligned}$$

Наконец, в боковых секторах ($k = 1, 2, \dots, n = -1, -2, \dots$) аналогично получаем

$$e^{\tilde{D}(\zeta)D(\lambda)\Omega} = \frac{\lambda - e^\zeta}{\lambda e^\zeta - 1} \frac{\lambda e^{(AD(\lambda)/2 + \tilde{D}(\zeta))\Omega_x} - 1}{\lambda e^{AD(\lambda)\Omega_x/2} - e^{\tilde{D}(\zeta)\Omega_x}}.$$

Чтобы получить аналог бездисперсионных уравнений Хироты, в этом случае уже необходимо использовать выражения для $e^{AD(\lambda)\Omega_x/2}$ и $e^{\tilde{D}(\zeta)\Omega_x}$ из двух главных секторов. Для исключения первых производных Ω_x можно использовать три пары $(\tilde{D}(\zeta), \tilde{D}(\lambda))$, $(\tilde{D}(\lambda), D(\eta))$, $(\tilde{D}(\zeta), D(\eta))$ или $(\tilde{D}(\zeta), D(\lambda))$, $(D(\lambda), D(\eta))$, $(D(\eta), \tilde{D}(\zeta))$.

Второй случай (15) не имеет смысла рассматривать отдельно, так как, как было показано ранее, преобразованием по решению он сводится к первому случаю. Поэтому сразу перейдем к третьему случаю (18).

ТЕОРЕМА 11. *Производящая функция плотностей законов сохранения μ для первых двух гидродинамических цепочек, записанных в форме законов сохранения*

$$\mu_t = \partial_x f(\mu, H_0, H_1), \quad \mu_y = \partial_x \varphi(\mu, H_0, H_1, H_2), \quad (36)$$

определяется из условия совместности $\partial_\tau \Phi_{11} = \partial_t f(\mu, H_0, H_1)$, где первые три уравнения производящей функции коммутирующих потоков суть

$$\partial_\tau H_0 = \mu_x, \quad \partial_\tau H_1 = \partial_x f(\mu, H_0, H_1), \quad \partial_\tau H_2 = \partial_x \varphi(\mu, H_0, H_1, H_2). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямым вычислением (ср. (22) и (23)).

Таким образом, производящая функция законов сохранения для первой из упомянутых двух гидродинамических цепочек имеет вид

$$\mu_t = \partial_x [b(\mu, H_0) H_1],$$

где $b(\mu, H_0)$ – первая производная от логарифма тета-функции (ср. (19)), определяемая из двух полных дифференциалов

$$db = \frac{v dv - (\zeta' v + 2\zeta''/3) dH_0}{\sqrt{R_3(v)}}, \quad d\mu = 2 \frac{dv}{\sqrt{R_3(v)}} + \left[2 \frac{-v^2 + \zeta v + \zeta'}{\sqrt{R_3(v)}} + b \right] dH_0,$$

где (ср. (19))

$$R_3(v) = 4v^3 - 4\zeta v^2 - 8\zeta'v - \frac{8}{3}\zeta'', \quad \zeta''' + 2\zeta\zeta'' = 3\zeta'^2.$$

Так же как и в первом случае (см. (31)), производящая функция для вторых производных Ω_{ik} может быть явно найдена:

$$\partial_{\tau(\zeta)}\mu(\lambda) = \partial_x\psi(\mu(\lambda), \mu(\zeta), H_0).$$

Однако здесь мы ограничимся только приведением выражения для полного дифференциала

$$\begin{aligned} d\psi = & \frac{b(\mu(\lambda), H_0)b_{H_0}(\mu(\zeta), H_0) - b(\mu(\zeta), H_0)b_{H_0}(\mu(\lambda), H_0)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0)} dH_0 + \\ & + \frac{b_{H_0}(\mu(\lambda), H_0) + b(\mu(\lambda), H_0)b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0)} d\mu(\zeta) - \\ & - \frac{b_{H_0}(\mu(\zeta), H_0) + b(\mu(\zeta), H_0)b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0)} d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим четвертый случай (20). Теорема 11 (см. (36), (37)) верна и в этом случае. В этом легко убедиться прямым вычислением.

Таким образом, производящая функция законов сохранения для первой из упомянутых двух гидродинамических цепочек имеет вид

$$\mu_t = \partial_x[b(\mu, H_0, H_1)],$$

где функция $b(\mu, H_0, H_1)$ определяется из трех полных дифференциалов

$$\begin{aligned} db_1 = & \frac{s^2 - F_1s - F_0}{\sqrt{R_4(s)}}[ds - (s^3 - 2F_1s^2 + (F_1^2 - F_0 - F_{11})s + \\ & + F_0F_1 - F_{01})dH_0 - (s^2 - F_1s - F_0)dH_1], \\ d\mu = & b_1dH_0 + \frac{1}{\sqrt{R_4(s)}}[ds - (s^3 - 2F_1s^2 + (F_1^2 - F_0 - F_{11})s + \\ & + F_0F_1 - F_{01})dH_0 - (s^2 - F_1s - F_0)dH_1], \\ db = & s d\mu + (\sqrt{R_4(s)} - sb_1)dH_0 + b_1dH_1, \end{aligned}$$

где (ср. (19), (21))

$$R_4(s) = s^4 - 2F_1s^3 + (F_1^2 - 2F_0 - F_{11})s^2 + 2(F_0F_1 - F_{01})s + F_0^2 - F_{00}.$$

Так же как и в третьем случае (см. (31)), ограничимся только приведением выражения для полного дифференциала

$$d\psi = \frac{b_{H_1}(\mu(\lambda), H_0, H_1)b_{H_0}(\mu(\zeta), H_0, H_1) - b_{H_1}(\mu(\zeta), H_0, H_1)b_{H_0}(\mu(\lambda), H_0, H_1)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0, H_1) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0, H_1)} dH_0 + \\ + \frac{b_{H_0}(\mu(\lambda), H_0, H_1) + b_{H_1}(\mu(\lambda), H_0, H_1)b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0, H_1)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0, H_1) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0, H_1)} d\mu(\zeta) - \\ - \frac{b_{H_0}(\mu(\zeta), H_0, H_1) + b_{H_1}(\mu(\zeta), H_0, H_1)b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0, H_1)}{b_{\mu(\zeta)}(\mu(\zeta), H_0, H_1) - b_{\mu(\lambda)}(\mu(\lambda), H_0, H_1)} d\mu(\lambda)$$

для производящей функции вторых производных Ω_{ik}

$$\partial_{\tau(\zeta)}\mu(\lambda) = \partial_x\psi(\mu(\lambda), \mu(\zeta), H_0).$$

Интересно, что поскольку функция $\psi(\mu(\lambda), \mu(\zeta), H_0)$ не зависит от H_1 , то и каждое слагаемое в правой части последнего равенства также не должно зависеть от H_1 , что совсем не очевидно.

Благодарности. Автор выражает искреннюю признательность С. П. Новикову, В. А. Соколову, Е. В. Ферапонтову, С. П. Цареву и А. Б. Шабату за многочисленные стимулирующие обсуждения, живой интерес и удачные советы, а также Ю. В. Брежневу, В. М. Бухштаберу и Ю. Н. Федорову за разъяснения некоторых малоизвестных деталей из теории эллиптических и тета-функций. Работа получила частичную финансовую поддержку РФФИ (грант № 03-01-00100).

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 3. С. 781–785.
- [2] С. П. Царев. ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537; Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [3] D. J. Wepner. Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
- [4] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин. Функции анализа и его прилож. 1978. Т. 12. № 1. С. 25–37; 1977. Т. 11. № 3. С. 31–42.
- [5] В. Е. Захаров. Функции анализа и его прилож. 1980. Т. 14. № 2. С. 15–24.
- [6] J. Gibbons. Physica D. 1981. V. 3. № 3. P. 503–511.
- [7] V. E. Zakharov. Duke Math. J. 1998. V. 94. № 1. P. 103–139.
- [8] J. Gibbons, Y. Kodama. Phys. Lett. A. 1989. V. 135. № 3. P. 167–170; Y. Kodama. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 477–480; I. M. Krichever. Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. № 2. P. 415–429; Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 437–475.
- [9] J. Gibbons, S. P. Tsarev. Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 19–24; 1999. V. 258. P. 263–270; E. V. Ferapontov, D. A. Korotkin, V. A. Shramchenko. Class. Q. Grav. 2002. V. 19. P. L1–L6.
- [10] М. В. Павлов, С. П. Царев. Функции анализа и его прилож. 2003. Т. 37. № 1. С. 38–54.
- [11] Д. Ф. Егоров. Работы по дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1970; G. Darboux. Lecons sur les systemes orthogonaux et les coordonnees curvilignes. Paris: Gautier-Villar, 1910.
- [12] E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov. Class. Q. Grav. 2003. V. 20. P. 2429–2441.
- [13] L. Yu. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 8127–8138.
- [14] M. Blaszkak. Phys. Lett. A. 2002. V. 297. P. 191–195; M. Blaszkak, B. M. Szablikowski. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 10325–10344; P. 10345–10364.

Поступила в редакцию 15.V.2003 г.