Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пелетминский, В. П. Скрыпник, В. С. Щёлоков, Вариационное определение многовременных функций Грина вырожденных бозе-систем и общая структура полюсов их гидродинамической асимптотики, *ТМФ*, 1996, том 108, номер 3, 469–481

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:03:04

С. В. Пелетминский, В. П. Скрышник, В. С. Щёлоков
**ВАРИАЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
МНОВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА
ВЫРОЖДЕННЫХ БОЗЕ-СИСТЕМ И
ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПОЛЮСОВ ИХ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКИ**

Дано вариационное определение n -временных ($n = 2, 3, \dots$) запаздывающих функций Грина бозе-систем, состояние равновесия которых не инвариантно относительно группы градиентных преобразований. С помощью идей Боголюбова о сокращенном описании неравновесных состояний разработан математический аппарат исследования гидродинамической асимптотики функций Грина и проведен общий анализ их полюсной структуры. Показано, что качественно новые результаты, связанные с процессами нелинейного взаимодействия волн первого и второго звуков в сверхтекучей бозе-жидкости, определяются в терминах трехвременных функций Грина, а усиление сингулярности в n -временных ($n \geq 4$) функциях Грина обусловлено только виртуальными эффектами.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] проведено кинетическое описание пространственно неоднородной бозе-системы при наличии внешнего переменного поля $F(\vec{x}, t)$. Как легко показать, результаты этой работы будут справедливы и в том случае, если вместо внешнего поля $F(\vec{x}, t)$ использовать суперпозицию двух или большего числа полей $F_j(\vec{x}, t)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Это обстоятельство дает возможность развить вариационную теорию мновременных функций Грина бозе-систем со спонтанно нарушенной градиентной группой симметрии и проанализировать их полюсную структуру в кинетическом пределе, когда частоты малы по сравнению с τ_0^{-1} , а волновые векторы малы по сравнению с r_0^{-1} ($\tau_0 = r_0/v$ — время хаотизации, v — средняя скорость частиц; в качестве r_0 выбирается большая из двух величин: радиус действия сил и дебройлевская длина волны $(mv)^{-1}$ частиц с массой m). Кинетическая асимптотика двух- и трехвременных функций Грина была рассмотрена соответственно в работах [1] и [2]. Легко получить асимптотические соотношения и для произвольных n -временных функций Грина с $n \geq 4$. Однако аппарат кинетических асимптотик можно перестроить таким образом, чтобы исследовать и гидродинамическую асимптотику мновременных функций Грина, когда волновые векторы малы по сравнению с обратной длиной свободного пробега частиц l^{-1} , а частоты малы по сравнению с обратным временем релаксации τ_1^{-1} . При этом мы, следуя работам [1, 2, 3],

будем исходить из двух положений: первое – пространственно неоднородный вырожденный бозе-газ со слабым взаимодействием в процессе эволюции к равновесному состоянию проходит кинетический этап с временным масштабом τ_0 и гидродинамический этап, определяемый временем релаксации τ_1 ($\tau_1 \gg \tau_0$); второе – боголюбовская иерархия времен [4] поэтапной релаксации сохраняется и при наличии внешних переменных полей $F_j(\vec{x}, t)$, если их частоты ω_j будут значительно меньше τ_1^{-1} . Здесь мы сохраним обозначения работ [1–3].

1. ВАРИАЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА И МЕТОД СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ

Рассмотрим систему макроскопически большого числа одинаковых бозе-частиц с массой m , имеющую объем V . Гамильтониан H такой системы имеет вид

$$H = H_0 + \vartheta, \quad H_0 = \frac{1}{2m} \int_V d^3 \vec{x} \nabla \psi^+(\vec{x}) \nabla \psi(\vec{x}),$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \int_V d^3 \vec{x}_1 \int d^3 \vec{x}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \psi^+(\vec{x}_1) \psi^+(\vec{x}_2) \psi(\vec{x}_2) \psi(\vec{x}_1), \quad (1.1)$$

где $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ – потенциал парного взаимодействия, $\psi(\vec{x})$, $\psi^+(\vec{x})$ – полевые операторы. Полагаем, что при $t = -\infty$ система находилась в состоянии статистического равновесия, не инвариантного относительно группы градиентных преобразований. Если w – статистический оператор (СО) Гиббса данной системы, то $[w, N] \neq 0$, $N = \int_V d^3 \vec{x} \psi^+(\vec{x}) \psi(\vec{x})$ – оператор числа частиц и $\text{Sp } w \psi(\vec{x}) = \sqrt{n_0}$, n_0 – плотность частиц бозе-конденсата. Включение внешних полей $F_j(\vec{x}, t)$ при $t = -\infty$ выводит систему из состояния равновесия. Ее неравновесное состояние будет описываться СО $\rho_F(t)$, который удовлетворяет уравнению Лиувилля в шредингеровском представлении

$$-i[H(t), \rho_F(t)] = \partial \rho_F(t) / dt. \quad (1.2)$$

Здесь $H(t) = H + H_F(t)$ – гамильтониан системы при наличии внешних полей, H определяется формулой (1.1), а гамильтониан взаимодействия системы с внешними полями

$$H_F(t) = \sum_{k=1}^n H_{F_k}(t),$$

$$H_{F_k}(t) = \int_V d^3 \vec{x} \{F_k(\vec{x}, t) \xi_k(\vec{x}) + F_k^*(\vec{x}, t) \xi_k^+(\vec{x})\}. \quad (1.3)$$

В этом соотношении совокупность квазилокальных операторов $\xi_k(\vec{x})$, $k = \overline{1, n}$, представляет собой обобщенные “токи”, соответствующие внешним полям $F_k(\vec{x}, t)$. Взаимодействие $H_F(t)$ предполагается слабым, поэтому состояние $\rho_F(t)$ мало отличается от равновесного w . Можно найти решение уравнения (1.2) в рамках теории возмущения по слабым внешним полям, учитывая, что $\rho_F(-\infty) = w$ (эта схема не приведена, см. [5]). Тогда среднее значение произвольного квазилокального оператора $\xi(\vec{x})$ в состоянии $\rho_F(t)$ можно представить в виде ряда

$$\xi_F(\vec{x}, t) = \text{Sp } \rho_F(t) \xi(\vec{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_F^{(s)}(\vec{x}, t), \quad (1.4)$$

члены которого определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \xi_F^{(0)}(\vec{x}, t) &= \text{Sp } w\xi(\vec{x}), \\
 \xi_F^{(s)}(\vec{x}, t) &= \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^n \int d^3 \vec{x}_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int d^3 \vec{x}_s \int_{-\infty}^{\infty} dt_s \times \\
 &\times \left\{ G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_s, t_s) F_{i_1}(\vec{x}_1, t_1) F_{i_2}(\vec{x}_2, t_2) \dots F_{i_s}(\vec{x}_s, t_s) + \right. \\
 &+ G_{\xi_{i_1}^+ \xi_{i_2} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \vec{x}_2, t_2; \dots; \vec{x}_s, t_s) \times \\
 &\times F_{i_1}^*(\vec{x}_1, t_1) F_{i_2}(\vec{x}_2, t_2) \dots F_{i_s}(\vec{x}_s, t_s) + \dots \\
 &\left. \dots + G_{\xi_{i_1}^+ \dots \xi_{i_s}^+}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_s, t_s) F_{i_1}^*(\vec{x}_1, t_1) \dots F_{i_s}^*(\vec{x}_s, t_s) \right\}, \quad (1.5) \\
 s &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Из соотношения (1.5) легко видеть, что отклик s -го порядка выражается через $s+1$ -временные запаздывающие функции Грина, определяемые равенством

$$\begin{aligned}
 G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_s, t_s) &= (-i)^s \theta(t - t_1) \theta(t - t_2) \dots \theta(t_{s-1} - t_s) \times \\
 &\times \text{Sp } w[\dots [\xi(\vec{x}, t), \xi_{i_1}(\vec{x}_1, t_1)], \dots, \xi_{i_s}(\vec{x}_s, t_s)]. \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

На основании (1.5) можно получить выражение для функции Грина (1.6) в терминах вариационной производной s -го порядка:

$$G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_s, t_s) = \left[\frac{\delta^s \text{Sp } \rho_F(t) \xi(\vec{x})}{\delta F_{i_1}(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta F_{i_s}(\vec{x}_s, t_s)} \right]_0. \quad (1.7)$$

Здесь и ниже $[\dots]_0$ означает равновесное значение соответствующей величины. Используя инвариантность квазилокальных операторов $\xi(\vec{x})$, $\xi_k(\vec{x})$ по отношению к пространственным и временным трансляциям, можно показать, что функция Грина (1.6) является функцией независимых s временных и $3s$ пространственных переменных:

$$\begin{aligned}
 G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_s, t_s) &= \\
 &= G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x} - \vec{x}_s, t - t_s; \vec{x}_1 - \vec{x}_s, t_1 - t_s; \dots; \vec{x}_{s-1} - \vec{x}_s, t_{s-1} - t_s; 0, 0). \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Переопределим пространственные и временные переменные:

$$\begin{aligned}
 \vec{x} - \vec{x}_s &\rightarrow \vec{x}, \vec{x}_1 - \vec{x}_s \rightarrow \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{s-1} - \vec{x}_s \rightarrow \vec{x}_{s-1}; \\
 t - t_s &\rightarrow t, t_1 - t_s \rightarrow t_1, \dots, t_{s-1} - t_s \rightarrow t_{s-1}.
 \end{aligned}$$

Тогда на основании (1.7), (1.8) имеем

$$\begin{aligned}
 G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_{s-1}, t_{s-1}; 0, 0) &= \\
 &= \left[\frac{\delta^s \text{Sp } \rho_F(t) \xi(\vec{x})}{\delta F_{i_1}(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta F_{i_s}(\vec{x}_s, t_s)} \right]_{\vec{x}_s=0, t_s=0}^{\vec{x}_s=0, t_s=0}. \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Переходя в (1.9) от СО $\rho_F(t)$ к СО $\rho_F(\vec{x}, t)$ [1], окончательно получим

$$G_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_s}}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; \dots; \vec{x}_{s-1}, t_{s-1}; 0, 0) = \left[\frac{\delta^s \text{Sp } \rho_F(\vec{x}, t) \tilde{\xi}_{2F}(\vec{x}, t)}{\delta F_{i_1}(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta F_{i_s}(\vec{x}_s, t_s)} \right]_0^{\vec{x}_s=0, t_s=0}. \quad (1.10)$$

СО $\rho_F(\vec{x}, t)$ используется для описания кинетики пространственно неоднородного вырожденного бозе-газа в модели с выделенным конденсатом и в терминах квазичастиц, когда в качестве полного набора параметров используются функции $\xi_{F\alpha}(\vec{x}, t) = \{f_{Fp}(\vec{x}, t), \eta_F(\vec{x}, t), \vec{v}_F(\vec{x}, t)\}$, $f_{Fp}(\vec{x}, t)$ – функция распределения квазичастиц, $\eta_F(\vec{x}, t)$ – параметр, характеризующий конденсат, $\vec{v}_F(\vec{x}, t)$ – скорость сверхтекучей компоненты. Этот набор параметров может быть расширен за счет внешних полей $F_j(\vec{x}, t)$ и их временных производных, если предположить, что частоты внешних полей $\omega_j \ll \tau_0^{-1}$. Согласно идеям Боголюбова о сокращенном описании [4] при $t \gg \tau_0$ справедливо представление

$$\rho_F(\vec{x}, t) \xrightarrow{t \gg \tau_0} \rho_F(\vec{x}, \xi_F(\vec{x}, t); F_j(t), \dot{F}_j(t), \ddot{F}_j(t), \dots) \equiv \rho_F(\vec{x}, \xi_F(\vec{x}, t); t). \quad (1.11)$$

Дополняя выражение (1.11) эргодическим соотношением (3.5) из [1], с помощью (3.2), (3.3) из [1] можно получить замкнутую систему уравнений для варьированных по внешним полям кинетических характеристик исследуемой бозе-системы и установить связь между ними и функциями Грина (1.10).

Решим эту задачу индуктивно для трех- и в общем случае n -временных функций Грина. Причем, как будет видно из дальнейшего, основные закономерности в формировании полюсной структуры многовременных функций Грина можно проследить в схеме вычисления трехвременных функций Грина, которую мы приведем здесь в полном объеме. Вычисляя вариационные производные в (1.10) и имея в виду, что СО $\rho_F(\vec{x}, t)$ является операторным функционалом (1.11), получим для $s = 2$ и $i_1 = 1, i_2 = 2$

$$\begin{aligned} G_{\xi_1 \xi_2}^{(+)}(\vec{x}, t; \vec{x}_1, t_1; 0, 0) &= \int d^3 \vec{x}' \int d^3 \vec{x}'' E_{\xi_\alpha \xi_\beta}^{(\xi)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(\vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) \times \\ &\times h_{\xi_\beta}^{(\xi_2)}(\vec{x}'', t) + \int d^3 \vec{x}' C_{\xi_\alpha}^{(\xi \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}'; \vec{x}', t) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(\vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) + \\ &+ \int d^3 \vec{x}' C_{\xi_\alpha}^{(\xi \xi_1)}(\vec{x} - \vec{x}'; \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_2)}(\vec{x}', t) + \int d^3 \vec{x}' \mathcal{P}_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{x} - \vec{x}') \times \\ &\times h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1, t_1) + W_{\xi_1 \xi_2}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1, t_1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_{\xi_\alpha \xi_\beta}^{(\xi)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') &= \text{Sp } \sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') \tilde{\xi}_2 + \text{Sp } \sigma_{\xi_\alpha}(\vec{x} - \vec{x}') \tilde{\xi}_{\xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}'') + \\ &+ \text{Sp } \sigma_{\xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}'') \tilde{\xi}_{\xi_\alpha}(\vec{x} - \vec{x}') + \text{Sp } \rho_{\text{eq}} \tilde{\xi}_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}''); \\ C_{\xi_\alpha}^{(\xi \xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \text{Sp } \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) \tilde{\xi}_2 + \\ &+ \text{Sp } \rho^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) \tilde{\xi}_{\xi_\alpha}(\vec{x} - \vec{x}'); \\ \mathcal{P}_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{x} - \vec{x}') &= \text{Sp } \sigma_{\xi_\alpha}(\vec{x} - \vec{x}') \tilde{\xi}_2 + \text{Sp } \rho_{\text{eq}} \tilde{\xi}_{\xi_\alpha}(\vec{x} - \vec{x}'); \\ W_{\xi_1 \xi_2}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1, t_1) &= \text{Sp } \rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1, t_1) \tilde{\xi}_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

В формулах (1.12), (1.13) операторы $\sigma_{\xi_\alpha}(\vec{x})$, $\rho^{(\xi_i)}(\vec{x}, t)$, $\tilde{\xi}_{\xi_\alpha}(\vec{x})$, $\tilde{\xi}_2$, ρ_{eq} и функции $h_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{x}, t)$ определяются с помощью (4.4) из [1]. Далее имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') &= [\delta^2 \rho_F(\vec{x}, \xi_F(\vec{x}, t); t) / \delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}', t) \delta \xi_{F_\beta}(\vec{x}'', t)]_0; \\ \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \left[\partial \left(\frac{\delta \rho_F(\vec{x}, \xi_F(\vec{x}, t); t)}{\delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}', t)} \right) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1) \right]_0; \\ \rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) &= [\partial^2 \rho_F(\vec{x}, \xi_F(\vec{x}, t); t) / \partial F_1(\vec{x}_1, t_1) \partial F_2(\vec{x}_2, t_2)]_0; \\ \tilde{\xi}_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') &= [\delta^2 \tilde{\xi}_2 F(\vec{x}, t) / \delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}', t) \delta \xi_{F_\beta}(\vec{x}'', t)]_0; \quad (1.14)\end{aligned}$$

$$h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) = [\delta^2 \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, t) / \delta F_1(\vec{x}_1, t_1) \delta F_2(\vec{x}_2, t_2)]_0. \quad (1.15)$$

Выполняя фурье-преобразование в (1.12), получим

$$\begin{aligned}G_{\xi_1 \xi_2}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; 0, 0) &= E_{\xi_\alpha \xi_\beta}^{(\xi)}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) h_{\xi_\beta}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ C_{\xi_\alpha}^{(\xi_2)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + C_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(\vec{k}; -\vec{k}_1, -\omega_1) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ \mathcal{P}_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{k}) h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + W_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1). \quad (1.16)\end{aligned}$$

Фурье-компоненты величин (1.13) не приводим. С помощью формулы (1.16) можно исследовать асимптотику функций Грина в области волновых векторов $k \ll r_0^{-1}$, $k_1 \ll r_0^{-1}$ и в области частот $\omega \ll \tau_0^{-1}$, $\omega_1 \ll \tau_0^{-1}$, используя линейное и квадратичное по внешним полям приближение интегралов столкновений ((2.5) в [1]). Линейное приближение $h_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{k}, \omega)$ ((4.10) в [1]) определяется величинами $\sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi)}(\vec{k})$, $\rho^{(\xi)}(\vec{k}, \omega)$, для которых в [1] были получены соответственно уравнения (4.6) и (4.8). Найдем уравнения для квадратичного приближения $h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$ и для операторов $\rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$, $\sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1)$, $\sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$.

Варьируя уравнение (3.3) из [1] в соответствии с определением (1.15) и переходя к фурье-компонентам, находим

$$\begin{aligned}-i\omega h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) - N_{\xi_\alpha; \xi_\beta}(\vec{k}) h_{\xi_\beta}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) = \\ = q_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1), \quad (1.17)\end{aligned}$$

где “источники” имеют вид

$$\begin{aligned}q_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) &= N_{\xi_\alpha; \xi_\beta \xi_\gamma}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) h_{\xi_\beta}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) h_{\xi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ N_{\xi_\alpha; \xi_\beta}^{(\xi_2)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) h_{\xi_\beta}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + \\ &+ N_{\xi_\alpha; \xi_\beta}^{(\xi_1)}(\vec{k}; -\vec{k}_1, -\omega_1) h_{\xi_\beta}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + N_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1). \quad (1.18)\end{aligned}$$

В этом выражении использованы фурье-компоненты следующих функций:

$$\begin{aligned}N_{\xi_\alpha; \xi_\beta \xi_\gamma}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') &= [\delta^2 L_{\xi_{F_\alpha}}(\vec{x}, t) / \delta \xi_{F_\beta}(\vec{x}', t) \delta \xi_{F_\gamma}(\vec{x}'', t)]_0; \\ N_{\xi_\alpha; \xi_\beta}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \left[\partial \left(\frac{\delta L_{\xi_{F_\alpha}}(\vec{x}, t)}{\delta \xi_{F_\beta}(\vec{x}', t)} \right) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1) \right]_0; \quad (1.19) \\ N_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) &= [\partial^2 L_{\xi_{F_\alpha}}(\vec{x}, t) / \partial F_1(\vec{x}_1, t_1) \partial F_2(\vec{x}_2, t_2)]_0.\end{aligned}$$

Интегралы столкновений $L_{\xi_{F\alpha}}(\vec{x}, t)$ определяются формулой (2.5) из [1]. Уравнения для операторов $\sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1)$ можно получить на основании (3.2) из [1], вычисляя вариационную производную согласно первой из формул (1.14) и используя граничное условие в виде

$$\begin{aligned} \exp(i\overset{\circ}{H}_q \tau) \sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) \exp(-i\overset{\circ}{H}_q \tau) &\xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \exp(i\overset{\circ}{H}_q \tau) w_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) \exp(-i\overset{\circ}{H}_q \tau), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $w_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1)$ – фурье-компоненты дважды проварьированного СО идеального газа квазичастиц $w_F(\vec{x}, f_F(\vec{x}, t))$ ((3.6) из [1]):

$$w_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') = [\delta^2 w_F(\vec{x}, f_F(\vec{x}, t)) / \delta \xi_{F\alpha}(\vec{x}', t) \delta \xi_{F\beta}(\vec{x}'', t)]_0. \quad (1.21)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) = & w_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) + i \int_{-\infty}^0 d\tau \exp(i\overset{\circ}{H}_q \tau) \left\{ [\sigma_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1), V_{\text{eff}}] + \right. \\ & + [\sigma_{\xi_\alpha}(-\vec{k}), R_{\xi_\beta}(\vec{k} + \vec{k}_1)] + [\sigma_{\xi_\beta}(\vec{k} + \vec{k}_1), R_{\xi_\alpha}(-\vec{k})] + [\rho_{\text{eq}}, R_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1)] + \\ & + [w_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1), \overset{\circ}{H}_q] + i\sigma_{\xi_\gamma}(\vec{k}) N_{\xi_\gamma; \xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) + \\ & \left. + i\sigma_{\xi_\gamma \xi_\alpha}(\vec{k}, -\vec{k}_1) N_{\xi_\gamma; \xi_\beta}(\vec{k} + \vec{k}_1) + i\sigma_{\xi_\gamma \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) N_{\xi_\gamma; \xi_\alpha}(-\vec{k}_1) \right\} \exp(-i\overset{\circ}{H}_q \tau), \end{aligned} \quad (1.22)$$

здесь $R_{\xi_\alpha}(\vec{k})$ и $R_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1)$ – фурье-компоненты соответственно $R_{\xi_\alpha}(\vec{x})$ (см. (4.7) в [1]) и

$$R_{\xi_\alpha \xi_\beta}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') = [\delta^2 R_F(\vec{x}, t) / \delta \xi_{F\alpha}(\vec{x}', t) \delta \xi_{F\beta}(\vec{x}'', t)]_0. \quad (1.23)$$

На основании (3.5) из [1] легко получить граничное условие для операторов $\sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega)$

$$\exp(i\overset{\circ}{H}_q \tau) \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega) \exp(-i\overset{\circ}{H}_q \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} 0. \quad (1.24)$$

Варьируя уравнение (3.2) из [1] с учетом второй формулы (1.14) и используя (1.22), получим в терминах фурье-компонент

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega) = & i \int_{-\infty}^0 d\tau \exp(i\overset{\circ}{H}_q \tau) \left\{ \omega \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega) + \right. \\ & + i\sigma_{\xi_\beta \xi_\alpha}(\vec{k}; -\vec{k}_1) q_{\xi_\beta}^{(\xi_i)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega) + i\sigma_{\xi_\beta}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega) N_{\xi_\beta; \xi_\alpha}(-\vec{k}_1) + \\ & + [\sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega), V_{\text{eff}}] + [\rho_{\text{eq}}, R_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega) + H_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega)] + \\ & + [\sigma_{\xi_\alpha}(-\vec{k}), R_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega) + H_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega)] + \\ & \left. + [\rho^{(\xi_i)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega), R_{\xi_\alpha}(-\vec{k}_1)] \right\} \exp(-i\overset{\circ}{H}_q \tau), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где использованы фурье-образы следующих операторных функций:

$$\begin{aligned}
 R_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}'; \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \left[\partial \left(\frac{\delta R_F(\vec{x}, t)}{\delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}', t)} \right) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1) \right]_0; \\
 R^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) &= [\partial R_F(\vec{x}, t) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1)]_0; \\
 H_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}'; \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \left[\partial \left(\frac{\delta \tilde{H}_{2F}(\vec{x}, t)}{\delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}', t)} \right) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1) \right]_0; \\
 H_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1) &= [\partial \tilde{H}_{2F}(\vec{x}, t) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1)]_0.
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

И, наконец, запишем уравнение для нахождения величины $\rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$, для которой справедливо граничное условие

$$\exp(i \mathring{H}_q \tau) \rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) \exp(-i \mathring{H}_q \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} 0. \quad (1.27)$$

Соотношение (1.27) непосредственно следует из (3.5) работы [1] и (2.14). Дифференцируя уравнение (3.2) из [1] в соответствии с последней из формул (1.14) и имея в виду (1.27), находим

$$\begin{aligned}
 \rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) &= i \int_{-\infty}^0 d\tau \exp(i \mathring{H}_q \tau) \left\{ \omega \rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \right. \\
 &+ i \sigma_{\xi_\alpha}(\vec{k}) N_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + i \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(\vec{k}; -\vec{k}_1, -\omega_1) q_{\xi_\alpha}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\
 &+ i \sigma_{\xi_\alpha}^{(\xi_2)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) q_{\xi_\alpha}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + [\rho_{\text{eq}}, R^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)] + \\
 &+ [\rho^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1), V_{\text{eff}}] + [\rho^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1), R^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\
 &+ H^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)] + [\rho^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1), R^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + \\
 &+ H^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1)] \left. \right\} \exp(-i \mathring{H}_q \tau),
 \end{aligned} \quad (1.28)$$

где “источники” $q_{\xi_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$ определяются формулой (4.11) из [1], а $R^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$ – фурье-образ:

$$R^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) = [\partial^2 R_F(\vec{x}, t) / \partial F_1(\vec{x}_1, t_1) \partial F_2(\vec{x}_2, t_2)]_0. \quad (1.29)$$

Уравнения (1.17), (1.22), (1.25), (1.28) вместе с формулами (4.6), (4.8), (4.10) из [1] образуют замкнутую систему уравнений для варьированных по внешним полям неравновесных кинетических параметров вырожденной бозе-системы, которую можно решать в теории возмущений по малым волновым векторам и малому параметру λ эффективного взаимодействия между квазичастицами [6]. Решение этой системы уравнений позволяет последовательно учесть вклад в полюсы кинетической асимптотики трехвременных функций Грина (1.16) не только многочастичных (тройных, четверных и т.д.) процессов в системе слабо взаимодействующих бозонов, но и эффект нелинейного взаимодействия коллективных возбуждений [2]. Рассмотренная схема допускает простое обобщение на случай n -временных функций Грина с $n \geq 4$. Действительно, полагая в (1.10) $i_1 = 1$,

$i_2 = 2, \dots, i_s = n - 1$ и вычисляя соответствующие вариационные производные, получим в терминах фурье-компонент

$$\begin{aligned}
 G_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}; 0, 0) &= a_{\xi\alpha_1 \xi\alpha_2 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi)} h_{\xi\alpha_1}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) \times \dots \\
 &\dots \times h_{\xi\alpha_{n-1}}^{(\xi_{n-1})}(\vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_{n-1}, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1}) + \\
 &+ a_{\xi\alpha_2 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi\xi_1)} h_{\xi\alpha_2}^{(\xi_2)}(-\vec{k}_2, -\omega_2) \times \dots \\
 &\dots \times h_{\xi\alpha_{n-1}}^{(\xi_{n-1})}(\vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_{n-2}, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_{n-2}) + \dots \\
 &\dots + a_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{(\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1})} + a_{\xi\alpha_1 \xi\alpha_3 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi)} h_{\xi\alpha_1}^{(\xi_1 \xi_2)}(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2, -\omega_1 - \omega_2) \times \\
 &\times h_{\xi\alpha_3}^{(\xi_3)}(-\vec{k}_3, -\omega_3) \dots h_{\xi\alpha_{n-1}}^{(\xi_{n-1})}(\vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_{n-2}, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_{n-2}) + \dots \\
 &\dots + a_{\xi\alpha}^{(\xi)} h_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_{n-1})}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_{n-2}, \omega + \dots + \omega_{n-2}).
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Здесь $a_{\xi\alpha_1 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi)}$, $a_{\xi\alpha_2 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi\xi_1)}$, $\dots$, $a_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{(\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1})}$, $a_{\xi\alpha_1 \xi\alpha_3 \dots \xi\alpha_{n-1}}^{(\xi)}$, $\dots$, $a_{\xi\alpha}^{(\xi)}$ — регулярные по аргументам $\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \vec{k}_2, \omega_2; \dots; \vec{k}_{n-1}, \omega_{n-1}$ функции, значения которых находятся с помощью обобщенных уравнений (1.22), (1.25), (1.28), а $h_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \dots + \omega_m)$ — фурье-образ функции

$$\begin{aligned}
 h_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2; \dots; \vec{x}_{m-1} - \vec{x}_m, t_{m-1} - t_m) = \\
 = [\delta^m \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, t) / \delta F_1(\vec{x}_1, t_1) \dots \delta F_m(\vec{x}_m, t_m)]_0, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Легко получить уравнение для функций $h_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_m)$, варьируя уравнение (3.3) из [1] в соответствии с (1.31) и переходя к фурье-компонентам; находим

$$\begin{aligned}
 &-i\omega h_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_m) - \\
 &-N_{\xi\alpha; \xi\beta}(\vec{k}) h_{\xi\beta}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_m) = \\
 &= q_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_m),
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

где “источники” $q_{\xi\alpha}^{(\xi_1 \dots \xi_m)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_m, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_m)$ линейно выражаются через величины $h_{\xi\alpha}^{(\xi_{i_1} \dots \xi_{i_{m-1}})}(\vec{k}, \omega; \dots; \vec{k} + \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_{m-1}, \omega + \omega_1 + \dots + \omega_{m-1})$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq m$.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА МНОВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Перестроим математический аппарат, разработанный в предыдущем разделе так, чтобы иметь возможность исследовать гидродинамическую асимптотику мновременных функций Грина. На гидродинамическом этапе эволюции полный набор параметров, необходимый для описания неравновесной сверхтекучей бозе-жидкости, образуют

функции $\psi_{F_\alpha}(\vec{x}, t) = \{Y_{F0}(\vec{x}, t), \eta_{F0}(\vec{x}, t), \vec{u}_F(\vec{x}, t), \vec{\gamma}_F(\vec{x}, t)\}$, где $Y_{F0}(\vec{x}, t)$ – обратная температура, $\eta_{F0}(\vec{x}, t)$ – параметр, связанный с плотностью бозе-конденсата, $\vec{u}_F(\vec{x}, t)$ – скорость нормальной компоненты, $\vec{\gamma}_{F0}(\vec{x}, t) = \vec{v}_F(\vec{x}, t) - \vec{u}_F(\vec{x}, t)$ [7]. Таким образом, для времен $t \gg \tau_1$ функции $\xi_{F_\alpha}(\vec{x}, t)$ в соответствии с методом Чепмена–Энскога, модифицированного Боголюбовым, будут зависеть от времени через параметры $\psi_{F_\alpha}(\vec{x}, t)$, внешние поля $F_j(\vec{x}, t)$ и их временные производные $\dot{F}_j(\vec{x}, t), \ddot{F}_j(\vec{x}, t), \dots$:

$$\xi_{F_\alpha}(\vec{x}, t) \xrightarrow[t \gg \tau_1]{} \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, \psi_F(\vec{x}, t); F_j(t), \dot{F}_j(t), \ddot{F}_j(t), \dots) \equiv \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, \psi_F(\vec{x}, t); t). \quad (2.1)$$

Переформулируем вначале равенство (1.16) для трехвременных функций Грина в духе соотношения (2.1). Гидродинамическая асимптотика двухвременных функций Грина была рассмотрена в [3]. Для фурье-компонент величин (1.15), входящих в (1.16), имеем

$$\begin{aligned} h_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) &= R_{\xi_\alpha; \psi_\gamma \psi_\lambda}(\vec{k}, \vec{k} + \vec{k}_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) \times \\ &\times S_{\psi_\lambda}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + R_{\xi_\alpha; \psi_\lambda}(\vec{k}) S_{\psi_\lambda}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ R_{\xi_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k}; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + \\ &+ R_{\xi_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_1)}(\vec{k}; -\vec{k}_1, -\omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ g_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь использованы фурье-компоненты величин, даваемых равенством (1.2) из [3], а также функций

$$\begin{aligned} R_{\xi_\alpha; \psi_\gamma \psi_\lambda}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}'') &= [\delta^2 \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, \psi_F(\vec{x}, t); t) / \delta \psi_{F_\gamma}(\vec{x}', t) \delta \psi_{F_\lambda}(\vec{x}'', t)]_0; \\ R_{\xi_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_i)}(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}' - \vec{x}_1, t - t_1) &= \left[\partial \left(\frac{\delta \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, \psi_F(\vec{x}, t); t)}{\delta \psi_{F_\gamma}(\vec{x}', t)} \right) / \partial F_i(\vec{x}_1, t_1) \right]_0; \\ S_{\psi_\lambda}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) &= [\delta^2 \psi_{F_\lambda}(\vec{x}, t) / \delta F_1(\vec{x}_1, t) \delta F_2(\vec{x}_2, t)]_0; \\ g_{\xi_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{x} - \vec{x}_1, t - t_1; \vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) &= [\partial^2 \xi_{F_\alpha}(\vec{x}, \psi_F(\vec{x}, t); t) / \partial F_1(\vec{x}_1, t_1) \partial F_2(\vec{x}_2, t_2)]_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (1.3) из [3] и (2.2) в (1.16), получим искомую формулу гидродинамической асимптотики трехвременных функций Грина:

$$\begin{aligned} G_{\xi_1 \xi_2}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; 0, 0) &= F_{\psi_\gamma \psi_\lambda}^{(\xi)}(\vec{k}, \vec{k}_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) S_{\psi_\lambda}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ K_{\psi_\gamma}^{(\xi \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + L_{\psi_\gamma}^{(\xi \xi_1)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ M_{\psi_\gamma}^{(\xi)}(\vec{k}) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + N_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где регулярные по всем аргументам функции $F_{\psi_\gamma \psi_\lambda}^{(\xi)}(\vec{k}, \vec{k}_1)$, $M_{\psi_\gamma}^{(\xi)}(\vec{k})$, $K_{\psi_\gamma}^{(\xi \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$, $L_{\psi_\gamma}^{(\xi \xi_1)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$, $N_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$ здесь явно не выписываем. Соотношение (2.4) устанавливает связь между трехвременными функциями Грина и проварьированными по

внешним полям гидродинамическими параметрами сверхтекучей бозе-жидкости $S_{\psi_\gamma}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$ и $S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$, которые имеют полюсную структуру в области малых волновых векторов и частот. Уравнение для линейной вариации $S_{\psi_\gamma}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$ получено в [3]. Запишем его формальное решение

$$\widehat{S}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega) = [-\omega \hat{\Lambda} + \widehat{T}(\vec{k})]^{-1} \widehat{Q}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega). \quad (2.5)$$

В равенстве (2.5) операторы $\widehat{S}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$, $\hat{\Lambda}$, $\widehat{T}(\vec{k})$, $\widehat{Q}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$ соответствуют функциям $S_{\psi_\lambda}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$, $\Lambda_{\zeta_\alpha; \psi_\lambda}$, $k_n T_{\zeta_{\lambda n}; \psi_\delta}(\vec{k})$, $Q_{\zeta_\alpha}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$, определенным формулами (1.8), (1.9) из [3]. На основании (1.3) из [3], (1.17), (2.2) легко получить уравнение для дважды проварьированных параметров $S_{\psi_\lambda}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$:

$$[-\omega \Lambda_{\zeta_\alpha; \psi_\lambda} + k_n T_{\zeta_{\alpha n}; \psi_\lambda}(\vec{k})] S_{\psi_\lambda}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) = Q_{\zeta_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1), \quad (2.6)$$

где “источники” имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{\zeta_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) &= U_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma \psi_\lambda}(\vec{k}, \vec{k}_1, \omega) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) S_{\psi_\lambda}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + \\ &+ W_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_1)}(-\vec{k}_1, -\omega_1) + \\ &+ X_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_1)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) S_{\psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) + Y_{\zeta_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В формуле (2.6) $U_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma \psi_\lambda}(\vec{k}, \vec{k}_1, \omega)$, $W_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$, $X_{\zeta_\alpha; \psi_\gamma}^{(\xi_1)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$ и $Y_{\zeta_\alpha}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$ – регулярные функции, которые можно найти в теории возмущений по малым волновым векторам и малому параметру λ . С учетом (2.5), (2.7) решение уравнения (2.6) примет вид

$$\begin{aligned} \widehat{S}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1) &= [-\omega \hat{\Lambda} + \widehat{T}(\vec{k})]^{-1} [\omega_1 \hat{\Lambda} + \widehat{T}(-\vec{k}_1)]^{-1} \times \\ &\times [-(\omega + \omega_1) \hat{\Lambda} + \widehat{T}(\vec{k} + \vec{k}_1)]^{-1} \widehat{U}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\widehat{U}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$ – оператор, соответствующий некоторой целой функции $U_{\zeta_\lambda}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$. Подставляя (2.5) и (2.8) в (2.4) и имея в виду, что операторы $\widehat{S}^{(\xi_i)}(\vec{k}, \omega)$, $\widehat{S}^{(\xi_1 \xi_2)}(\vec{k}, \omega; \vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)$ действуют в пространстве индексов ψ_λ , получим

$$G_{\xi_1 \xi_2}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; 0, 0) = N_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) + G_{\xi_1 \xi_2}^{\text{sing}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1), \quad (2.9)$$

где сингулярное слагаемое равно

$$\begin{aligned} G_{\xi_1 \xi_2}^{\text{sing}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1) &= \frac{A_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)}{\Delta(\vec{k}, \omega) \Delta(-\vec{k}_1, -\omega_1) \Delta(\vec{k} + \vec{k}_1, \omega + \omega_1)}, \\ \Delta(\vec{k}, \omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \det[-\omega \hat{\Lambda} + \widehat{T}(\vec{k})]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Величина $A_{\xi_1 \xi_2}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1)$ определяет вычеты в полюсах функции Грина (2.9). В работе [3] были получены явные выражения для детерминанта $\Delta(\vec{k}, \omega)$ в приближении

Рис. 1

идеальной и вязкой жидкости. В главном приближении по малым волновым векторам имеем

$$\Delta(\vec{k}, \omega) = 2\sqrt{n_0} \sigma_n \frac{\partial(\varepsilon, \sigma)}{\partial(n_0, Y_0)} (\omega^2 - c_0^2 k^2) (\omega^2 - c_1^2 k^2), \quad (2.11)$$

где c_0 , c_1 — соответственно скорости первого и второго звуков.

Перейдем теперь к общему анализу выражения (2.9). Все формально возможные диаграммы нелинейного взаимодействия первого и второго звуков, связанные со структурой знаменателя сингулярной части (2.10) гидродинамической асимптотики трехвременных функций Грина (2.9), приведены на рис. 1 (сплошная линия соответствует первому звуку, штриховая — второму). Легко показать, используя (2.11), что процессы, соответствующие диаграммам 2 и 5 рис. 1, запрещены законом сохранения энергии. Особый интерес представляют диаграммы 1 и 3. На диаграмме 1 показан процесс резонансного возбуждения первого звука ($\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_1$, $\omega' = \omega + \omega_1$) при взаимодействии первого звука ($\vec{k}, \omega$) со вторым ($\vec{k}_1, \omega_1$). Этот процесс, как видно из (2.10), (2.11), возможен при выполнении равенства

$$(1 - \Delta^2)k_1 = 2(\Delta - \cos \varphi)k, \quad \Delta = c_1/c_0 < 1, \quad \varphi = \widehat{(\vec{k}, \vec{k}_1)}. \quad (2.12)$$

Из простого анализа соотношения (2.12) следует, что “перекачивание” энергии из второго звука в первый происходит в полусегменте углов $\varphi_{\text{кр}} < \varphi \leq \pi$, где $\varphi_{\text{кр}} = \arccos \Delta$ — критический угол. При абсолютном нуле температур $\Delta = 1/\sqrt{3}$ и $\varphi_{\text{кр}} = 54^\circ 44'$. Таким образом, область нелинейного взаимодействия первого и второго звуков, соответствующая диаграмме 1 рис. 1, представляет собой внешнюю область конуса в пространстве волновых векторов E^3 . В этой области зависимость отношения модулей волновых векторов k_1/k от угла φ имеет форму, изображенную на рис. 2а.

На диаграмме 3 рис. 1 показан процесс резонансного возбуждения первого звука ($\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}_1$, $\omega' = \omega + \omega_1$) при рассеянии второго звука ($\vec{k}, \omega$) на втором ($\vec{k}_1, \omega_1$). В этом случае, как легко показать на основании (2.10), (2.11), волновые векторы $\vec{k}_1$ и $\vec{k}$ должны

Рис. 2

удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_1} + \frac{k_1}{k} \right) (1 - \Delta^2) = \Delta^2 - \cos \theta, \quad \theta = \widehat{(\vec{k}, \vec{k}_1)}. \quad (2.13)$$

Из анализа уравнения (2.13) следует наличие двух резонансных ветвей 1 и 2, имеющих одну общую точку $(\theta_{кр}; 1)$ (см. рис. 2б) и соответствующих сегменту $\theta_{кр} \leq \theta \leq \pi$, где $\theta_{кр} = \arccos(2\Delta^2 - 1)$. При абсолютном нуле температур $\theta_{кр} = 109^\circ 28'$. Для диаграммы 3 рис. 1 область резонансного возбуждения первого звука в пространстве E^3 является внутренняя область конуса.

Выпишем теперь, обобщая результаты этого раздела, выражение для гидродинамической асимптотики n -временных функций Грина $G_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}; 0, 0)$. Учитывая формулу (1.30), а также равенства (1.31), (1.32), (2.1) и соотношения типа (2.5), (2.8) для $n \geq 2$, легко получить

$$\begin{aligned} G_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{(+)}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}; 0, 0) = \\ = N_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}) + \\ + G_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{\text{sing}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь сингулярное слагаемое имеет вид

$$\begin{aligned} G_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}^{\text{sing}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}) = \mathcal{A}_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2}) \times \\ \times \Delta^{-1}(\vec{k}, \omega) \prod_{l=1}^{n-2} \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n-2} \Delta^{-1}(\omega + \omega_{i_1} + \dots + \omega_{i_l}, \vec{k} + \vec{k}_{i_1} + \dots + \vec{k}_{i_l}) \times \\ \times \Delta^{-1}(-(\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_l}), -(\vec{k}_{i_1} + \vec{k}_{i_2} + \dots + \vec{k}_{i_l})). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) функции $\mathcal{A}_{\xi\xi_1 \dots \xi_{n-1}}(\vec{k}, \omega; \vec{k}_1, \omega_1; \dots; \vec{k}_{n-2}, \omega_{n-2})$ определяют вычеты в полюсах функции Грина (2.14), а $\Delta(\vec{k}, \omega)$ дается равенством (2.10). Исследуя выражение (2.15), можно заметить, что начиная с четырехвременных функций Грина, т.е. для $n \geq 4$, многоволновые процессы резонансного взаимодействия носят исключительно виртуальный характер. Например, для четырехвременных функций Грина резонансное

Рис. 3

возбуждение первого звука ($\vec{k}', \omega'$) при взаимодействии трех волн второго звука ($\vec{k}, \omega$), ($\vec{k}_1, \omega_1$) и ($\vec{k}_2, \omega_2$) возможно через виртуальное рождение как волны первого звука (диаграмма 1, рис. 3), так и волны второго звука (диаграмма 2, рис. 3, виртуальные волны изображены волнистой линией). Очевидно, что это свойство трехволновых процессов имеет место для произвольных k -волновых процессов рассеяния с $k \geq 4$.

Список литературы

- [1] В.П. Скрипник, В.С. Щёлоков // ТМФ. 1981. Т. 46. №2. С. 242–250.
- [2] В.С. Щёлоков // УФЖ. 1986. Т. 31. №12. С. 1877.
- [3] В.П. Скрипник, В.С. Щёлоков. Препринт ИТФ-83-38Р. Киев, 1983.
- [4] Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
- [5] А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977.
- [6] Ю.А. Церковников // ДАН СССР. 1962. Т. 143. №1. С. 832.
- [7] В.С. Щёлоков // УФЖ. 1988. Т. 33. №4. С. 620.

Харьковский государственный университет
Восточноукраинский государственный университет

Поступила в редакцию
14.XII.1995 г.

S. V. Peletminsky, V. P. Skripnik, V. S. Shchelokov

VARIATIONAL DETERMINATION OF MULTI-TIME GREEN'S FUNCTIONS FOR DEGENERATE BOZE-SYSTEMS AND COMMON STRUCTURE OF THEIR HYDRODYNAMICAL ASYMPTOTICS

Variational determination of n -time ($n = 2, 3, \dots$) Green's functions for degenerate boze-systems is given. Basing on Bogolubov's ideas about reduction in the description of nonequilibrium states the mathematical method for studying hydrodynamical asymptotics of multi-time Green's functions is developed. The resonance excitement diagrams of the first sound are investigated.