Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Функциональные уравнения и перенормировки в p -адических теориях поля, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 09:52:55

М. Д. Миссаров*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ В p -АДИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Процедура дискретизации p -адической φ^4 -теории поля на иерархическую решетку сводится к решению интегрального функционального уравнения. Процедура перенормировки и β -функции конструируются в терминах этого решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

p -Адические модели математической физики, недавно привлечшие внимание исследователей (см., например, книгу Воловича, Владимирова и Зеленова [1], а также обзор [2]), являются любопытным полигоном для продумывания ряда традиционно сложных тем квантовой теории поля и статистической механики. Это свойство было отмечено еще при исследовании так называемых иерархических моделей Дайсона, которые являются дискретным вариантом p -адических моделей [3]. В частности, вильсоновская картина критических явлений получила наиболее полное и строгое обоснование именно в рамках иерархической модели Дайсона [4–7]. Этому способствовало свойство локальности в этой модели, заключающееся в том, что действие блок-спиновой ренорм-группы (РГ) Вильсона–Каданова сводится к нелинейному интегральному преобразованию плотности свободной меры. На самом деле свойство локальности в этой модели является следствием ультраметричности иерархического расстояния.

В этой статье мы исследуем более подробно связь между p -адическими и иерархическими моделями. Оказывается, что оператор дискретизации p -адического случайного поля на иерархическую решетку можно трактовать как нормализующее преобразование к отображению иерархической РГ в гауссовской неподвижной точке, которое находится как решение функционального уравнения. Решение этого функционального уравнения в рамках теории возмущений сводится к простым рекуррентным формулам для коэффициентов эффективного гамильтониана, которые на самом деле являются суммами определенных подклассов фейнмановских амплитуд. При этом процедуру перенормировки можно определить как преобразование, обратное к оператору дискретизации или к некоторому производному от него.

* Казанский государственный университет

Наиболее легко это объяснить на примере p -адической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели, поскольку преобразование РГ в иерархической $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели сводится к рациональному отображению в плоскости констант связи [8, 9].

Пусть p – фиксированное простое число, Q_p – поле p -адических чисел, $\|\cdot\|_p$ – p -адическая норма на Q_p .

Дробную часть p -адического числа $x = c_{-n}p^{-n} + \dots + c_{-1}p^{-1} + c_0 + c_1p + \dots$ мы определим как $\{x\} = c_{-n}p^{-n} + \dots + c_{-1}p^{-1}$. Положим для d -мерного p -адического вектора $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q_p^d$, $\|x\|_p = \max_i \|x_i\|_p$, $\{x\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_d\})$. Обозначим через T_p^d дискретное множество чисто дробных p -адических векторов $T_p^d = \{x \in Q_p^d : x = \{x\}\}$, а через Z_p^d – шар единичного радиуса $Z_p^d = \{x \in Q_p^d : \|x\|_p \leq 1\}$ (в дальнейшем мы будем опускать индекс p в обозначении нормы). Тогда мы имеем очевидное разбиение

$$Q_p^d = \bigcup_{j \in T_p^d} \{j + Z_p^d\}.$$

Рассмотрим 4-компонентное поле $\psi^*(x) = (\bar{\psi}_1(x), \psi_1(x), \bar{\psi}_2(x), \psi_2(x))$ на Q_p^d , все компоненты которого являются образующими алгебры Грассмана. Пусть гиббсовское состояние, описывающее это поле, задается гамильтонианом

$$H(\psi^*; \alpha; r, g) = H_0(\psi^*; \alpha) + \int L(\psi^*(x); r, g) dx, \quad (1)$$

гауссовская часть имеет вид

$$H_0(\psi^*; \alpha) = c(\alpha) \int \|x - y\|^{-\alpha d} (\bar{\psi}_1(x)\psi_1(y) + \bar{\psi}_2(x)\psi_2(y)) dx dy,$$

где без ограничения общности положим $c(\alpha) = f_n(\alpha)/f_n(\alpha - 1)$, $f_n(\alpha) = (1 - n^{-\alpha})^{-1}$, $n = p^d$, лагранжиан –

$$L(\psi^*(x); r, g) = r(\bar{\psi}_1(x)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)\psi_2(x)) + \\ + g(\bar{\psi}_1(x)\psi_1(x)\bar{\psi}_2(x)\psi_2(x)),$$

dx – мера Хаара на Q_p^d . Заметим, что гауссовская часть $H_0(\psi^*; \alpha)$ инвариантна относительно группы скейлинговых преобразований $(S_\lambda(\alpha)\psi^*)(x) = \|\lambda\|^{(1-\alpha)d/2}\psi^*(\lambda x)$, где $\alpha \in R$ – параметр этой группы, $\lambda \in Q_p$. Таким образом, действие преобразования $S_{p^{-1}}(\alpha)$ в пространстве гамильтонианов сводится лишь к растяжению констант связи, которое мы обозначим через $S(\alpha)$:

$$S(\alpha)(r, g) = (n^{\alpha-1}r, n^{2\alpha-3}g).$$

Рассмотрим теперь дискретизацию поля ψ^* на иерархическую (относительно p -адического расстояния) решетку T_p^d как поле

$$\xi^*(j) = \int \psi^*(j+x)\chi(x) dx, \quad j \in T_p^d,$$

$\chi(x)$ – характеристическая функция шара Z_p^d .

Легко видеть, что дискретизация преобразования $S_{p-1}(\alpha)$ есть обычное иерархическое блок-спиновое преобразование

$$(r(\alpha)\xi^*)(j) = n^{-\alpha/2} \sum_{i \in B(j)} \xi^*(i),$$

где $B(j) = \{i \in T_p^d: \|i - p^{-1}j\| \leq p\}$ – элементарные блоки в иерархической решетке.

Из ультраметричности p -адической нормы можно получить, что гамильтониан дискретизованного поля ξ^* имеет вид

$$H'(\xi^*; \alpha; r, g) = H'_0(\xi^*; \alpha) - \ln \sum_j \left\langle \exp \left\{ - \int L(\xi^*(j) + \eta^*(x); r, g) dx \right\} \right\rangle_{\mu(d\eta^*)},$$

где среднее берется по мере $\mu(d\eta^*)$, отвечающей гауссовскому полю $\eta^*(x)$ с носителем в Z_p^d , нулевым средним и бинарной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}_k(x) \eta_l(y) \rangle &= \delta_{kl} \left(\frac{f_n(2-\alpha)}{f_n(\alpha-1)} \|x-y\|^{(\alpha-2)d} - \frac{f_n(2-\alpha)}{f_n(1)} \right), \\ \langle \bar{\eta}_k(x) \bar{\eta}_l(y) \rangle &= \langle \eta_k(x) \eta_l(y) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$i, j \in T_p^d$, $k, l = 1, 2$. Гауссовская часть $H'_0(\xi^*; \alpha)$ инвариантна относительно иерархической РГ $r(\alpha)$ и задается выражением

$$\begin{aligned} H'_0(\xi^*; \alpha) &= \sum_{i,j} h(i, j; \alpha) (\bar{\xi}_1(i) \xi_1(j) + \bar{\xi}_2(i) \xi_2(j)), \\ h(i, j; \alpha) &= \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1-\alpha)} (1 - \delta_{i,j}) \|i-j\|^{-\alpha d} + \frac{f_n(\alpha)}{f_n(1)} \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Таким образом, дискретизация поля с гамильтонианом (1) приводит к гамильтониану иерархической модели с потенциалом $L(\xi^*; u(r, g), v(r, g))$, где константы связи дискретизованного поля u и v могут быть определены, по крайней мере в рамках теории возмущений, из нетривиального функционального интеграла

$$\left\langle \exp \left\{ - \int L(\xi^* + \eta^*(x); r, g) dx \right\} \right\rangle_{\mu(d\eta)}.$$

Обозначим преобразование

$$(r, g) \rightarrow (u(r, g), v(r, g))$$

через $P(\alpha)$. С другой стороны, оказывается, что преобразование иерархической РГ $r(\alpha)$ может быть вычислено непосредственно в пространстве иерархических гамильтонианов с гауссовской частью $H'_0(\xi^*; \alpha)$ и самодействием $L(\xi^*; u, v)$ (см. подробнее [8]). Это преобразование сводится к изменению констант связи:

$$u' = n^{\alpha-1} \left(\frac{(u+1)^2 - v}{(u+1)^2 - v/n} (u+1) - 1 \right), \quad v' = n^{2\alpha-3} \left(\frac{(u+1)^2 - v}{(u+1)^2 - v/n} \right)^2 v.$$

Обозначив последнее отображение через $R(\alpha)$ и учитывая, что $r(\alpha)$ является дискретизацией $S_{p-1}(\alpha)$, мы можем написать следующее соотношение:

$$R(\alpha)P(\alpha) = P(\alpha)S(\alpha). \quad (3)$$

Заметим, что собственные числа дифференциала отображения $R(\alpha)$ в нуле равны $n^{\alpha-1}$ и $n^{2\alpha-3}$, и, следовательно, мы можем трактовать отображение $P(\alpha)$ (с точностью до линейного преобразования) как нормализующее преобразование к отображению $R(\alpha)$ в нуле.

Отображение $P(\alpha)$ можно найти из соотношения (3), решая соответствующее 2-мерное функциональное уравнение при условии, что α не является резонансным значением. Можно проверить, что полюсы по α фейнмановских амплитуд с пропагатором (2) как раз описывают резонансные значения для уравнения (3). Сходимость рядов, задающих отображение $P(\alpha)$, следует из классических теорем Пуанкаре и Зигеля. Процедуру перенормировки мы можем определить как отображение, обратное к преобразованию $P(\alpha)$. Пользуясь соотношением (3), мы можем вложить преобразование $R(\alpha)$ в непрерывную полугруппу

$$R^t(\alpha) = P(\alpha)S^t(\alpha)P(\alpha)^{-1}.$$

Коэффициенты векторного поля, порождающего эту полугруппу, являются β -функциями данной теории.

В этой статье мы будем изучать дискретизацию бозонной φ^4 -теории. В отличие от фермионного случая динамическая система в бозонном случае является незамкнутой в том смысле, что при дискретизации φ^4 -теории в иерархическом гамильтониане возникают члены 6-й, 8-й и т.д. степеней поля. Удобнее изучать действие РГ $R(\alpha)$ в пространстве плотностей свободных мер, в котором оно сводится к интегральному оператору. Оператор дискретизации $P(\alpha)$ отображает плоскость констант связи φ^4 -теории в подмногообразие плотностей. Соотношение (3) остается справедливым и в этом случае, где оператор скейлинга $S(\alpha)$ действует естественным образом в плоскости констант связи. Во 2-м разделе мы обсуждаем алгоритм решения соответствующего интегрального функционального уравнения в формальных степенных рядах. Как и в случае фермионной модели, резонансные явления проявляются как полюсы по α в коэффициентах этих рядов. Мы определяем процедуру перенормировки как замену переменных в плоскости констант связи такую, что плотность свободной меры дискретизованной модели не содержит полюсов в точке $\alpha = 3/2$ в коэффициентах разложения по новым переменным (напомним, что значение $3/2$ является бифуркационным для преобразования $R(\alpha)$). Наиболее простая замена задается обращением преобразования, заданного коэффициентами при 2-й и 4-й степенях разложения по старым переменным. В 3-м разделе мы доказываем теоремы о перенормировке и β -функциях.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ φ^4 -ТЕОРИИ

Рассмотрим p -адическую φ^4 -теорию на Q_p^d , заданную действием

$$H(\varphi; r, g) = H_0(\varphi; \alpha) + \int L(\varphi(x); r, g) dx, \quad (4)$$

где

$$L(\varphi(x); r, g) = r\varphi^2(x) + g\varphi^4(x)$$

и гауссовская часть задана как

$$H_0(\varphi; \alpha) = \frac{c(\alpha)}{2} \int |x - y|^{-\alpha d} \varphi(x) \varphi(y) dx dy, \quad (5)$$

dx — мера Хаара на Q_p^d .

Гауссовское поле, заданное гамильтонианом (5), инвариантно относительно группы скейлинговых преобразований $(S_\lambda(\alpha)\varphi)(x) = |\lambda|^{(1-\alpha)d/2} \varphi(\lambda x)$, где $\alpha \in R$ — параметр этой группы, $\lambda \in Q_p$.

Дискретизация поля φ определяется как поле ξ на T_p^d , такое что

$$\xi(j) = \int \varphi(j + x) \chi(x) dx, \quad j \in T_p^d.$$

Дискретизация ζ поля $(S_{p^{-1}}(\alpha)\varphi)(x)$ есть преобразование иерархической блок-спиновой РГ над полем ξ :

$$\zeta(j) = (r(\alpha)\xi)(j) = n^{-\alpha/2} \sum_{i \in B(j)} \xi(i).$$

Дискретизация гауссовского поля φ с гамильтонианом (5) является гауссовским полем $\xi(j)$ с гамильтонианом

$$H'_0(\xi; \alpha) = 1/2 \sum_{i,j} h(i, j; \alpha) \xi(i) \xi(j). \quad (6)$$

Чтобы найти гамильтониан $H'(\xi; \alpha; r, g)$ дискретизации ξ поля φ , заданного действием (4), введем поле $\eta(x) = \varphi(x) - \xi(\{x\})$. Если φ задано действием (5), то поле η , как легко видеть, является гауссовским с бинарной корреляционной функцией

$$\langle \eta(x) \eta(y) \rangle = \chi(x - y) \left(\frac{f_n(2 - \alpha)}{f_n(\alpha - 1)} |x - y|^{(\alpha-2)d} - \frac{f_n(2 - \alpha)}{f_n(1)} \right). \quad (7)$$

Таким образом, поле $\eta(x)$ можно представить как сумму независимых гауссовских полей $\eta_j(x)$, которые определяются как ограничения поля η на шары $j + Z_p^d$.

Используя соотношение

$$\int \eta_j(x) dx = 0,$$

легко видеть, что

$$H'(\xi; \alpha; r, g) = H'_0(\xi; \alpha) - \sum_j \ln \left\langle \exp \left\{ - \int L(\xi(j) + \eta_0(x); r, g) dx \right\} \right\rangle_{\mu(d\eta_0)}, \quad (8)$$

где среднее берется по гауссовской мере $\mu(d\eta_0)$ с нулевым средним и корреляционной функцией (7) при условии, что $x \in Z_p^d$, сумма берется по всем $j \in T_p^d$.

Заметим, что гауссовская часть в (8) инвариантна относительно блок-спинового иерархического преобразования, а негауссовская часть (при возведении в экспоненту) факторизуется в произведение плотностей свободных мер $f(\xi(j); r, g)$, где

$$f(y; r, g) = \frac{\langle \exp \left\{ - \int L(y + \eta_0(x); r, g) dx \right\} \rangle_{\mu(d\eta_0)}}{\langle \exp \left\{ - \int L(\eta_0(x); r, g) dx \right\} \rangle_{\mu(d\eta_0)}}.$$

Обычная теория возмущений дает разложение

$$f(y; r, g) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k(r, g) y^{2k}, \quad a^k(r, g) = \sum_{l,p} a_{l,p}^k r^l g^p,$$

где $a_{l,p}^k$ — сумма всех p -адических фейнмановских амплитуд с пропагатором (5) и $2k$ внешними линиями, порожденными l 2-хвостками и p 4-хвостками. Заметим, что

$$a^0 \equiv 1; \quad a_{1,0}^1 = -1, \quad a_{0,1}^2 = -1; \quad a_{l,p}^k = 0 \quad \text{при } l + p < d(k), \quad k > 0, \quad (9)$$

где $d(k)$ — целая часть $\frac{k+1}{2}$. Теперь рассмотрим иерархическую модель с гауссовским гамильтонианом (6) и потенциалом

$$L(\xi(j)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^{2k}(j).$$

Пусть $\zeta = r(\alpha)\xi$. Чтобы вычислить гамильтониан ζ , используем переменные $\sigma(i)$, $i \in N$, которые определяются из соотношения

$$\xi(i) = n^{\alpha/2-1} \zeta(pi) + \sigma(i).$$

Тогда легко видеть, что

$$H'_0(\xi; \alpha) = H'_0(\zeta; \alpha) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \in B(j)} \sigma^2(i).$$

Если обозначить гамильтониан поля $\zeta = r(\alpha)\xi$ через $(R(\alpha)H')(\zeta)$, то можно написать

$$(R(\alpha)H')(\zeta) = H'_0(\zeta, \alpha) + \sum_j L'(\zeta(j)),$$

где

$$L'(\zeta(j)) = -\ln \left(\sqrt{n}(2\pi)^{-(n-1)/2} \int \delta \left(\sum_{i \in B(j)} \sigma(i) \right) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i \in B(j)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2(i) + L(n^{\alpha/2-1} \zeta(j) + \sigma(i)) \right\} d\sigma(i) \right).$$

Вспоминая, что $\zeta(j)$ есть дискретизация поля $p^{(1-\alpha)d/2} \varphi(p^{-1}x)$, мы получаем для плотности $f(y; r, g)$ следующее интегральное функциональное уравнение:

$$f(y; n^{\alpha-1}r, n^{2\alpha-3}g) = \frac{\int \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n \exp \{ -1/2 x_i^2 \} f(y n^{\alpha/2-1} + x_i; r, g) dx_i}{\int \delta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n \exp \{ -1/2 x_i^2 \} f(x_i; r, g) dx_i}.$$

Для простоты будем обсуждать это функциональное уравнение для случая $n = 2$ ($p = 2$, $d = 1$):

$$f(y; 2^{\alpha-1}r, 2^{2\alpha-3}g) = \frac{\int \exp \{ -x^2 \} f(2^{\alpha/2-1}y + x) f(2^{\alpha/2-1}y - x) dx}{\int \exp \{ -x^2 \} f^2(x) dx}. \quad (10)$$

Это уравнение имеет тривиальное решение $f \equiv 1$. Пусть $\lambda_k = 2^{k\alpha-2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Множество D определяется как множество всех $\alpha \in R$ таких, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1^l \lambda_2^p \neq \lambda_k$ для всех целых l и p , $l \geq 0$, $p \geq 0$, $l + p \geq 2$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Простой анализ показывает, что

$$D = \{ \alpha \notin (3/2, 3) : \alpha \in R \setminus Q \} \cup \\ \cup \left\{ \alpha \in (3/2, 3) : \alpha \neq 3/2 + \frac{1}{2(2s-1)}, \alpha \neq 3 - 1/s, s = 1, 2, \dots \right\}, \quad (11)$$

где через Q обозначено поле рациональных чисел. Пользуясь явными формулами для p -адических амплитуд [10, 11], можно заметить, что множество D описывает все полюсы фейнмановских диаграмм в нашей теории.

Функциональное интегральное уравнение (10) при условиях нормировки (9) имеет единственное нетривиальное решение в формальных рядах для всех $\alpha \in D$, для коэффициентов которого можно получить простые рекуррентные соотношения.

Действительно, уравнение (10) сводится к бесконечной системе функциональных уравнений

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda_k \sum_{n+m \geq k} A_{m,n}^k a^m(r, g) a^n(r, g)}{\sum_{n+m \geq 0} A_{m,n}^0 a^m(r, g) a^n(r, g)} = a^k(\lambda_1 r, \lambda_2 g), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$A_{m,n}^k = \frac{(2(m+n-k)-1)!!}{2^{m+n-k}} \sum_{p+l=2k} (-1)^l C_{2m}^l C_{2n}^p.$$

Обозначим через a_s^n сумму всех членов степени s в ряде $a^n(r, g)$:

$$a_s^n(r, g) = \sum_{l+p=s} a_{l,p}^n r^l g^p.$$

Мы получаем из (12), что

$$\begin{aligned} a_s^k(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_k a_s^k(r, g) = \\ = \frac{1}{2} \lambda_k \sum_{m,n=1}^{2(s-1)} A_{m,n}^k \sum_{l+p=s} a_l^n(r, g) a_p^m(r, g) + \lambda_k \sum_{n=k+1}^{2s} A_{n,0}^k a_s^n(r, g) - \\ - \sum_{t=d(k)}^{s-1} a_t^k(\lambda_1 r, \lambda_2 g) \sum_{m+n>0} A_{m,n}^0 \sum_{l+p=s-t} a_l^n(r, g) a_p^m(r, g). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, если мы знаем коэффициенты форм a_l^n для $l \leq s-1$, $n \leq 2(s-1)$ и $l=s$, $k+1 \leq n \leq 2s$ и $\lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} \neq \lambda_k$ для всех целых $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$ таких, что $s_1 + s_2 = s$, то можем вычислить коэффициенты формы a_s^k .

При $s=1$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} a_1^1(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_1 a_1^1(r, g) &= 3\lambda_1 a_1^2(r, g), \\ a_1^2(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_2 a_1^2(r, g) &= 0, \end{aligned}$$

решение которых однозначно в силу условий нормировки $a_{1,0}^1 = a_{0,1}^2 = -1$. Отсюда получаем

$$a_1^1(r, g) = -r + \frac{3}{1-2^{\alpha-2}} g, \quad a_1^2(r, g) = -g.$$

Во 2-м порядке теории возмущений мы имеем 4 уравнения:

$$\begin{aligned} a_2^1(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_1 a_2^1(r, g) &= \lambda_1/2 \left(-(a_1^1(r, g))^2 - \frac{3}{2} a_1^2(r, g) a_1^1(r, g) - \frac{15}{2} (a_1^2(r, g))^2 \right) + \\ &+ \lambda_1 \left(3a_2^2(r, g) + \frac{9}{4} a_2^3(r, g) + \frac{45}{4} a_2^4(r, g) \right) - a_1^1(\lambda_1 r, \lambda_2 g) \left(a_1^1(r, g) + \frac{3}{2} a_1^2(r, g) \right), \\ a_2^2(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_2 a_2^2(r, g) &= \lambda_2/2 \left((a_1^1(r, g))^2 - a_1^2(r, g) a_1^1(r, g) + \frac{9}{2} (a_1^2(r, g))^2 \right) + \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{15}{2} a_2^3(r, g) + \frac{105}{2} a_2^4(r, g) \right) - a_1^2(\lambda_1 r, \lambda_2 g) \left(a_1^1(r, g) + \frac{3}{2} a_1^2(r, g) \right), \\ a_2^3(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_3 a_2^3(r, g) &= \lambda_3/2 \left(2a_1^2(r, g) a_1^1(r, g) - (a_1^2(r, g))^2 \right) + 14\lambda_3 a_2^4(r, g), \\ a_2^4(\lambda_1 r, \lambda_2 g) - \lambda_4 a_2^4(r, g) &= \lambda_4/2 (a_1^2(r, g))^2. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений в обратном порядке, получаем

$$\begin{aligned} a_2^4(r, g) &= 1/2g^2, & a_2^3(r, g) &= rg - 3\mu_1g^2, \\ a_2^2(r, g) &= 1/2r^2 - 3\mu_1rg + 9(1/2\mu_1^2 - 2\mu_2)g^2, \\ a_1^2(r, g) &= -6\mu_2rg + 18\mu_2(\mu_1 + 2\mu_3)g^2, \end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - 2^{\alpha-2}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{1 - 2^{2\alpha-3}}, \quad \mu_3 = \frac{1}{1 - 2^{3\alpha-5}}. \quad (14)$$

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА И β -ФУНКЦИИ

Как известно из теории иерархической модели Дайсона [4–7], значение $\alpha = \frac{3}{2}$ является бифуркационным: при этом значении α от тривиальной гауссовской неподвижной точки ответвляется негауссовская точка, которую можно искать по теории возмущений как дискретизацию некоторой φ^4 -теории. Как видно из формулы (11), значение $\alpha = \frac{3}{2}$ выделено во множестве резонансных значений α . Пусть $\alpha = \frac{3}{2} + \varepsilon$. При решении уравнений (13) нам приходится производить деление на выражения $(\lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} - \lambda_k) = 2^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)s_1 + 2\varepsilon s_2} - 2^{-\frac{k}{2} + 1 + k\varepsilon}$, $s_1, s_2 = 0, 1, \dots$. Легко видеть, что полюсы по ε в нуле возникают при делении на $(\lambda_1^{s_1} \lambda_2^{s_2} - \lambda_k)$ в случае, когда $k = 1$, $s_1 = 1$ или $k = 2$, $s_1 = 0$.

Целью формальной теории перенормировок является устранение полюсов по ε в нуле в коэффициентах a^k . Эту задачу можно решать традиционным способом [11, 12], вычисляя p -адические фейнмановские амплитуды и строя, например, процедуру аналитической перенормировки. Но функциональные уравнения (12) подсказывают более простой путь: необходимо найти формальные ряды $r(u, v)$ и $g(u, v)$ так, чтобы в разложениях коэффициентов $a^k(r(u, v), g(u, v))$ по степеням u, v в каждом порядке отсутствовали полюсы по ε .

В случае фермионной $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели мы находили ряды $r(u, v)$ и $g(u, v)$, обращая коэффициенты гамильтониана дискретизованного поля. Но в бозонном случае рекуррентные соотношения для коэффициентов эффективного гамильтониана достаточно сложны, в отличие от соотношений для коэффициентов a^k , описывающих разложение плотности свободной меры по степеням поля. Поэтому мы определим ряды r и g , формально обращая отображение, заданное парой $(-a^1, -a^2)$:

$$-a^1(r(u, v), g(u, v)) = u, \quad -a^2(r(u, v), g(u, v)) = v. \quad (15)$$

Разрешимость уравнений (15) в формальных рядах очевидна. В частности, решая уравнения (15) до 2-го порядка по u и v , получаем

$$\begin{aligned} r(u, v) &= u + 3\mu_1v + \frac{3}{2}\mu_1u^2 - 6\mu_2uv + 18\mu_2(2\mu_3 - 3\mu_1)v^2 + \dots; \\ g(u, v) &= v + \frac{1}{2}u^2 - 18\mu_2v^2 + \dots. \end{aligned}$$

Пусть

$$r(u, v) = \sum_{i,j} c_{ij} u^i v^j, \quad g(u, v) = \sum_{i,j} d_{ij} u^i v^j.$$

Покажем, что в дискретизации теории с гамильтонианом $H(\varphi; \frac{3}{2} + \varepsilon; r(u, v), g(u, v))$ отсутствуют полюсы по ε в нуле.

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты $a^k(r(u, v), g(u, v))$, $k = 3, 4, \dots$, аналитичны по ε в нуле во всех порядках разложения по степеням u и v .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f_s^k(r, g) = \sum_{(p,q): p+q \leq s} a_{p,q}^k r^p g^q.$$

Тогда из (12) следует

$$\begin{aligned} f_s^k(r, g) - \lambda_k f_s^k(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g) &= \\ &= \frac{1}{2} \lambda_k \sum_{m,n=1}^{2(s-1)} A_{m,n}^k [f_{s-1}^m(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g) f_{s-1}^n(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g)]_{r,g}^s + \\ &+ \lambda_k \sum_{n=k+1}^{2s} A_{n,0}^k f_s^n(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g) - \\ &- \sum_{m+n>0} A_{m,n}^0 [f_{s-1}^k(r, g), f_{s-1}^m(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g) f_{s-1}^n(\lambda_1^{-1} r, \lambda_2^{-1} g)]_{r,g}^s, \end{aligned}$$

где через $[\cdot]_{r,g}^s$ обозначена сумма всех мономов от r и g , степень которых не превосходит s .

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) коэффициенты разложения $f_{s-1}^n(\lambda_1^{-1} r(u, v), \lambda_2^{-1} g(u, v))$, $n = 1, 2, \dots, 2(s-1)$, и $f_{s-1}^k(r(u, v), g(u, v))$ по степеням u и v до порядка $s-1$ аналитичны по ε в нуле;

2) коэффициенты разложения $f_s^n(\lambda_1^{-1} r(u, v), \lambda_2^{-1} g(u, v))$, $n = k+1, \dots, 2s$, по степеням u и v до порядка s аналитичны по ε в нуле.

Тогда если коэффициенты разложения $f_s^k(r(u, v), g(u, v))$ до порядка s аналитичны по ε в нуле, то то же самое верно для коэффициентов $f_s^k(\lambda_1^{-1} r(u, v), \lambda_2^{-1} g(u, v))$. Обратное утверждение также верно. Отсюда мы получаем, что из условий 1, 2 следует аналитичность в нуле коэффициентов разложения $f_{s-1}^n(\lambda^{-i} r(u, v), \lambda^{-i} g(u, v))$, $n = 1, 2, \dots, 2(s-1)$, до порядка $s-1$, $i = 0, 1, \dots$, и аналитичность в нуле коэффициентов разложения $f_s^n(\lambda_1^{-i} r(u, v), \lambda_2^{-i} g(u, v))$, $n = k+1, \dots, 2s$, до порядка s , $i = 0, 1, \dots$.

Далее, из предположений 1-2 мы получаем, что коэффициенты разложения $f_s^k(\lambda_1^{-i+1} r(u, v), \lambda_2^{-i+1} g(u, v)) - \lambda_k f_s^k(\lambda_1^{-i} r(u, v), \lambda_2^{-i} g(u, v))$ до порядка s аналитичны в нуле. Следовательно, мы можем утверждать то же самое для

$$\begin{aligned} f_s^k(r(u, v), g(u, v)) - \lambda_k^l f_s^k(\lambda_1^{-l} r(u, v), \lambda_2^{-l} g(u, v)) &\equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{l-1} \lambda_k^i (f_s^k(\lambda_1^{-i} r(u, v), \lambda_2^{-i} g(u, v)) - \lambda_k f_s^k(\lambda_1^{-i-1} r(u, v), \lambda_2^{-i-1} g(u, v))). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\left[f_s^k(r(u, v), g(u, v)) \right]_{u, v}^s = \sum_{(m, n): m+n \leq s} u^m v^n \sum_{(p, q): p+q \leq m+n} a_{p, q}^k t_{m, n}^{p, q},$$

где

$$t_{m, n}^{p, q} = \sum c_{i_1 j_1} \dots c_{i_p j_p} d_{k_1 l_1} \dots d_{k_q l_q},$$

сумма берется по всем наборам $(i_1, j_1), \dots, (i_p, j_p), (k_1, l_1), \dots, (k_q, l_q)$ таким, что $i_1 + \dots + i_p + k_1 + \dots + k_q = m$, $j_1 + \dots + j_p + l_1 + \dots + l_q = n$. Отсюда

$$\left[f_s^k(r(u, v), g(u, v)) - \lambda_k^l f_s^k(\lambda_2^{-l} g(u, v)) \right]_{u, v}^s = \sum_{(m, n): m+n \leq s} u^m v^n h_{m, n}^k,$$

где

$$h_{m, n}^k = \sum_{(p, q): p+q \leq m+n} a_{p, q}^k t_{m, n}^{p, q} (1 - (\lambda_k \lambda_1^{-p} \lambda_2^{-q})^l).$$

Предположим, что сумма

$$\sum_{(p, q): p+q \leq m+n} a_{p, q}^k t_{m, n}^{p, q}$$

не аналитична по ε в нуле, и пусть $N > 0$ — максимальная степень ε^{-1} в разложении этой суммы в ряд Лорана в нуле. Пусть $b_{p, q}^{k, m, n}$ — коэффициенты при ε^{-N} в разложении $a_{p, q}^k t_{m, n}^{p, q}$ в ряд Лорана в нуле. Тогда в силу аналитичности в нуле $h_{m, n}^k(\xi)$ мы можем написать, что

$$\sum_{(p, q): p+q \leq m+n} b_{p, q}^{k, m, n} = \sum_{(p, q): p+q \leq m+n} b_{p, q}^{k, m, n} 2^{(-\frac{k}{2} + 1 - \frac{p}{2})l}. \quad (16)$$

При $k \geq 3$ и $l \rightarrow \infty$ правая часть (16) стремится к нулю. Таким образом, равенство (16) возможно лишь при

$$\sum_{(p, q): p+q \leq m+n} b_{p, q}^{k, m, n} = 0,$$

что и доказывает аналитичность суммы в нуле.

База индукции следует из тождества

$$f_1^2(r(u, v), g(u, v)) = \lambda_2 f_1^2(\lambda_1 r(u, v), \lambda_2^{-1} g(u, v)) = g(u, v) = v + \dots.$$

Теорема доказана.

Обозначим действие преобразования РГ на плотность свободной меры $f(y; r, g)$, заданное правой частью соотношения (10), через $R(\alpha)f(y; r, g)$. Из этого же соотношения

легко получить представление для преобразования РГ в подмногообразии плотностей $f(y; r(u, v), g(u, v))$ в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} R^t(\alpha) f(y; r(u, v), g(u, v)) = \\ = \exp \left\{ t \left(\beta_1(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \beta_2(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\} f(y; r(u, v), g(u, v)), \end{aligned} \quad (17)$$

где β -функции имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{D} \left(\ln \lambda_1 r \frac{\partial g}{\partial v} - \ln \lambda_2 g \frac{\partial r}{\partial v} \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{D} \left(\ln \lambda_2 g \frac{\partial r}{\partial u} - \ln \lambda_1 r \frac{\partial g}{\partial u} \right), \\ D &= \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}. \end{aligned}$$

Формула (17) определяет формальное вложение РГ-преобразования R в непрерывную полугруппу, и β -функции являются коэффициентами векторного поля, порождающего эту полугруппу.

Во 2-м порядке по u и v мы имеем

$$\begin{aligned} \beta_1(u, v) &= \ln 2 \left[(1/2 + \varepsilon)u + 3(1/2 - \varepsilon)\mu_1(\varepsilon)v + 3/2 (1/2 - \varepsilon)\mu_1(\varepsilon)u^2 + \right. \\ &\quad \left. + 12\varepsilon\mu_2(\varepsilon)uv + (72\varepsilon\mu_1(\varepsilon)\mu_2(\varepsilon) - 36 \cdot 2^{1/2+\varepsilon}(1/2 + \varepsilon)\mu_1(\varepsilon)\mu_3(\varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - 144\varepsilon\mu_2(\varepsilon)\mu_3(\varepsilon))v^2 \right] + \dots, \\ \beta_2(u, v) &= \ln 2 \left[2\varepsilon v - 1/2 u^2 - 3\mu_1(\varepsilon)(1/2 - \varepsilon)uv + 36\varepsilon\mu_2(\varepsilon)v^2 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где μ_1, μ_2, μ_3 заданы соотношениями (14), $\alpha = 3/2 + \varepsilon$.

Заметим, что хотя некоторые коэффициенты разложений $r(u, v)$ и $g(u, v)$ не аналитичны по ε в нуле, коэффициенты разложений для β -функций 2-го порядка аналитичны по ε в нуле. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Коэффициенты формальных степенных рядов $\beta_1(u, v)$ и $\beta_2(u, v)$ аналитичны по ε в нуле.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\beta_i(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_i^n(u, v),$$

где β_i^n — сумма мономов степени n в разложении для β_i , $i = 1, 2$. Сделаем замену переменных $u = \omega - 3\mu_1 v$, и пусть

$$\gamma_i^n(\omega, v) = \beta_i^n(\omega - 3\mu_1 v, v).$$

Ясно, что из аналитичности коэффициентов $\gamma_i^n(\omega, v)$ будет следовать аналитичность коэффициентов $\beta_i^n(u, v)$. В новых переменных оператор $\beta_1(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \beta_2(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$ примет вид

$$A = \gamma_1(\omega, v) \frac{\partial}{\partial \omega} + \gamma_2(\omega, v) \frac{\partial}{\partial v} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где

$$A_n = \gamma_1^n(\omega, v) \frac{\partial}{\partial \omega} + \gamma_2^n(\omega, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

причем

$$A_1 = \ln \lambda_1 \omega \frac{\partial}{\partial \omega} + \ln \lambda_2 v \frac{\partial}{\partial v}.$$

Доказательство аналитичности коэффициентов γ_i^n в нуле будем вести индукцией по n . База индукции следует из соотношений (18). Действие преобразования РГ R на плотность $f(y; r(\omega - 3\mu_1 v, v), g(\omega - 3\mu_2 v, v))$ сохраняет свойство аналитичности в нуле коэффициентов разложения этой плотности по степеням ω и v . Следовательно, то же самое должно быть верно и для формального дифференциального оператора $\exp\{A\}$. В частности, вспоминая, что в новых переменных $a^1(\omega, v) = 3\mu_1 v - \omega$, $a^2(\omega, v) = -v$, мы можем утверждать, что коэффициенты рядов $\exp\{A\}\omega$, $\exp\{A\}v$ аналитичны по ε в нуле. Заметим, что оператор A_n переводит моном степени m в сумму мономов степени $m + n - 1$. Отсюда можно увидеть, что в сумме мономов степени N в разложении $\exp\{A\}\omega$ коэффициенты оператора A_N встречаются только в сумме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k A_1^s A_N A_1^{k-s} \omega = \sum_{i+j=N} \gamma_1^{i,j} \sigma_1^{i,j} \omega^i v^j,$$

где $\gamma_1^{i,j}$ определяются соотношением $\gamma_1^N(\omega, v) = \sum_{i+j=N} \gamma_1^{i,j} \omega^i v^j$,

$$\sigma_1^{i,j} = \frac{\ln \lambda_1}{(i-1) \ln \lambda_1 + j \ln \lambda_2} \left[\left(\frac{i \ln \lambda_1 + j \ln \lambda_2}{\ln \lambda_1} \right) \lambda_1^i \lambda_2^j - \lambda_1 \right].$$

Отметим, что произведение $\gamma_1^{i,j} \sigma_1^{i,j}$ должно быть аналитично по ε в нуле, так как во всех остальных случаях коэффициенты при $\omega^i v^j$ зависят от коэффициентов операторов A_n , $n < N$, и по предположению индукции аналитичны по ε в нуле. Легко проверить, что $\sigma_1^{i,j}(\varepsilon)$ аналитично в нуле, причем $\sigma_1^{i,j}(0) \neq 0$. Отсюда следует аналитичность в нуле $\gamma_1^{i,j}$. Таким же образом можно проверить аналитичность в нуле коэффициентов $\gamma_2^{i,j}$. Теорема доказана.

Нетривиальная неподвижная точка РГ находится из уравнений

$$\beta_1(u(\varepsilon), v(\varepsilon)) = 0, \quad \beta_2(u(\varepsilon), v(\varepsilon)) = 0, \quad (19)$$

где решение ищется в формальных рядах

$$u(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varepsilon^i, \quad v(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \varepsilon^i.$$

Разрешимость уравнений (19) следует из соотношений (18) и теоремы 2. В частности, в 1-м порядке теории возмущений

$$u(\varepsilon) = -\frac{3}{1-2^{-1/2}} \frac{\ln 2}{9} \varepsilon + \dots, \quad v(\varepsilon) = \frac{\ln 2}{9} \varepsilon + \dots.$$

Впрочем, нетривиальную неподвижную точку можно искать исходя непосредственно из уравнений РГ в реальном пространстве. Процедура перенормировки позволяет вложить преобразование РГ в реальном пространстве в полугруппу преобразований, и квантово-полевые β -функции появляются при инфинитезимальном описании этой полугруппы.

Другой способ перенормировки состоит в обращении преобразования, заданного коэффициентами при 2-й и 4-й степенях поля в разложении $-\ln f(\xi; r, g)$ – гамильтониана взаимодействия в дискретизованной модели. Этот способ перенормировки, а также схема аналитической перенормировки с минимальными вычитаниями приводят к другим выражениям для контрчленов и β -функций, но дают такое же описание нетривиальной неподвижной точки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00270а) и Международного научного фонда (код гранта RHA300).

Список литературы

- [1] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленев. *P*-адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund. Phys. Rep. 1993. P. 2–66.
- [3] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. ТМФ. 1989. Т. 78. С. 248–257.
- [4] P. M. Bleher, Ya. G. Sinai. Commun. Math. Phys. 1973. V. 33. P. 23–42.
- [5] P. Collet, J.-P. Eckmann. A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics. Lect. Notes in Phys. V. 74. Berlin – Heidelberg – New York: Springer Verlag, 1978.
- [6] Я. Г. Синай. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [7] P. M. Bleher, P. Major. Ann. Prob. 1987. V. 15. P. 431–477.
- [8] E. Yu. Lerner, M. D. Missarov. J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817.
- [9] M. D. Missarov. Letters Math. Phys. 1994. V. 32. P. 347–356.
- [10] E. Yu. Lerner, M. D. Missarov. Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 35–48.
- [11] M. D. Missarov. In: Dynamical systems and statistical mechanics. Ed. Ya. G. Sinai (Adv. Sov. Math. Vol. 3). Amer. Math. Soc., 1991. P. 143–161.
- [12] Э. Ю. Лернер. ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 233–249.

Поступила в редакцию 27.II.1996 г.

M. D. Missarov

FUNCTIONAL EQUATIONS AND RENORMALIZATIONS IN p -ADIC FIELD THEORIES

In this paper the discretization procedure of p -adic φ^4 -theory onto hierarchical lattice is reduced to the solution of integral functional equation. The renormalization procedure and β -functions are constructed in terms of this solution.