Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Сторчак, Нестационарное обобщенное преобразование Дуру–Кляйнерта в континуальных интегралах для систем дифференциальных уравнений в одномерном пространстве, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 17–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:17:08

С. Н. Сторчак*

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДУРУ–КЛЯЙНЕРТА В КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Получены новые формулы преобразования винеровских континуальных интегралов для параболических систем дифференциальных уравнений в одномерном пространстве, состоящих из двух уравнений с зависящими от времени коэффициентами. Эти формулы задают преобразование континуальных интегралов при реономном однородном точечном преобразовании переменных интегрирования и при преобразовании репараметризации путей. На основе этих формул получено интегральное соотношение между функциями Грина для соответствующих друг другу систем дифференциальных уравнений. Показано, как это соотношение приводит к обобщенной формуле Шеппа для рассматриваемых континуальных интегралов. При выводе новых формул использованы свойства случайных процессов при фазовых преобразованиях и при случайной замене времени.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования последних лет демонстрируют успешное применение методов континуального интегрирования для решения квантово-механических задач. При решении таких задач обычно делается преобразование континуального интеграла, которое основано на функциональной замене эволюционного параметра. Новое преобразование континуальных интегралов называется “подстановкой нового времени”, “пространственно-временным преобразованием” и, наконец, как признание приоритета авторов, впервые применивших это преобразование при квантовании атома водорода [1], – “преобразованием Дуру–Кляйнерта”.

К настоящему времени использование техники дискретных аппроксимаций фейнмановских континуальных интегралов, а также методов теории случайных процессов в континуальных интегралах винеровского типа позволило вывести ряд новых формул преобразования континуальных интегралов [2].

* Институт физики высоких энергий

В работе [3] был рассмотрен общий случай такого преобразования континуальных интегралов винеровского типа в одномерном пространстве. Применение полученной в [3] формулы для решения квантово-механической задачи с зависящим от времени гамильтонианом (одномерный нестационарный “атом водорода”) было продемонстрировано в работе [4]. Отметим также работы [5] и [6], где изучались подобные преобразования континуальных интегралов.

В данной статье мы рассмотрим общий случай преобразования Дуру–Кляйнерта (реомомное однородное точечное преобразование и преобразование репараметризации путей) в винеровских континуальных интегралах, которые представляют собой решения параболических дифференциальных систем уравнений в одномерном пространстве. Мы будем иметь дело с дифференциальными системами, состоящими из двух уравнений, коэффициенты которых явно зависят от времени. Ранее в [7] было проведено исследование подобных континуальных интегралов в стационарном случае.

Содержание статьи следующее. После введения во втором разделе даются исходные определения. Третий раздел посвящен реомомным однородным точечным преобразованиям в континуальных интегралах. В четвертом разделе рассматривается преобразование репараметризации путей, которое в винеровских континуальных интегралах, как хорошо известно [8], порождается случайной заменой времени в случайных процессах. Основным результатом этих разделов является записанное через континуальные интегралы интегральное соотношение между функциями Грина для соответствующих систем дифференциальных уравнений. Мы перепишем полученную формулу в виде символьной формулы для фейнмановских континуальных интегралов. Однако строгое обоснование формул для фейнмановских континуальных интегралов требует отдельного доказательства, которое в данной статье не сделано.

В качестве следствия общей формулы в последнем разделе будет получено интегральное соотношение между функциями Грина, обобщающее формулу Шешпа [9] для континуальных интегралов по одномерному пространству. В работе [10] с помощью формулы Шешпа изучалось адиабатическое возмущение квантово-механических систем. Вывод формулы Шешпа для фейнмановских континуальных интегралов был проделан в [5].

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В соответствии с работами [11] решение системы дифференциальных уравнений

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_a} + \frac{1}{2} \mu^2 \varkappa \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} \right) \delta_n^i + L_n^i \frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{1}{\mu^2 \varkappa m} M_n^i \right] (\psi_{t_b})_i(x_a, t_a) = 0, \quad (1)$$

$$\lim_{t_a \uparrow t_b} (\psi_{t_b})_i(x_a, t_a) = \chi_i^0(x_a), \quad i, n = 1, 2,$$

где $\mu^2 = \frac{\hbar}{m}$, $\varkappa$ – вещественный положительный параметр, $L_n^i \equiv L_n^i(x_a, t_a)$, $M_n^i \equiv M_n^i(x_a, t_a)$ – матрично-значные вещественные функции, а на коэффициенты дифференциальных уравнений наложены определенные аналитические ограничения, может быть

представлено в виде

$$(\psi_{t_b})_n(x_a, t_a) = \int_{\Omega_-} d\mu^\xi(\omega) \overleftarrow{\exp} \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} L_n^i(\xi(t), t) dw(t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\mu^2 \varkappa m} M_n^i(\xi(t), t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} L_n^{n'}(\xi(t), t) L_n^i(\xi(t), t) \right) dt \right] \chi_i^0(\xi(t_b)). \quad (2)$$

Континуальное интегрирование в формуле (2) идет по мере μ^ξ , связанной с винеровским процессом $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$, который удовлетворяет простейшему стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\xi(t) = \mu\sqrt{\varkappa} dw(t). \quad (3)$$

Пространство путей Ω_- характеризуется условием $\xi(t) = x_a + \omega(t)$, $\omega(t_a) = 0$.

Стоящий в формуле (2) мультипликативный стохастический интеграл $\overleftarrow{\exp}[\dots]$ понимается как предел (при измельчении временного интервала) упорядоченных по времени экспоненциальных множителей. Порядок следования этих множителей обозначен при помощи стрелки. Стохастический интеграл в $\overleftarrow{\exp}[\dots]$ есть интеграл в смысле Ито.

Мультипликативный стохастический интеграл является матрично-значным случайным процессом [11] и определяется по решению линейного стохастического дифференциального уравнения

$$d\eta^i(t) = \frac{1}{\mu^2 \varkappa m} M_n^i(\xi(t), t) \eta^n(t) dt + \frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} L_n^i(\xi(t), t) \eta^n(t) dw(t) \quad (4)$$

и $\eta^i(t_b) = \overleftarrow{\exp}_k^i(t_a, t_b) \eta^k(t_a)$.

Таким образом, с континуальным интегралом (2) связано два стохастических дифференциальных уравнения – (3) и (4).

Наша система (1) является системой обратных уравнений Колмогорова. Начальное условие в ней задается в конечный момент времени t_b . Это свойство проявляется в том, что (2) задает полугруппу следующего вида:

$$(\psi_{t_b})_n(x_a, t_a) = \int G_n^{j'}(x_b, t_b; x_a, t_a) \chi_{j'}^0(x_b) dx_b \equiv (G\chi^0)_n(x_a, t_a; t_b). \quad (5)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что существование плотности G_n^j , которая, кроме обратного уравнения Колмогорова по переменным (x_a, t_a) , удовлетворяет также и прямому уравнению по переменным (x_b, t_b) , но уже с сопряженным оператором, зависит от поведения коэффициентов уравнения. Мы предполагаем, что необходимые для этого ограничения аналитического поведения коэффициентов у нашей системы уравнений имеют место.

Мы получим представление для плотности G_n^j (матричной функции Грина) через континуальный интеграл, если в (5) выберем

$$\chi_{j'}^0(x) = \delta(x - x_b) \delta_{j'}^j.$$

Функция Грина G_n^j по переменным (x_b, t_b) будет удовлетворять системе прямых уравнений Колмогорова. При $\varkappa = i$ эта система преобразуется в систему уравнений Шредингера с гамильтонианом $\hat{H}$:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta_j^i - i\hbar L^{Tj}_j(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + M^{Tj}_j(x, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (L^{Tj}_j(x, t)), \quad (6)$$

который действует в гильбертовом пространстве со скалярным произведением $(\psi, \varphi) = \sum_{i=1,2} \int \bar{\psi}_i(x) \varphi_i(x) dx$. В (6) L^T, M^T обозначают транспонированные матрицы.

То что G_n^j при $\varkappa = i$ удовлетворяет системе уравнений Шредингера, можно отобразить в виде представления функции Грина G_n^j через символ континуального интеграла¹⁾

$$G_n^j(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int_{\substack{x(t_a)=x_a \\ x(t_b)=x_b}} \frac{Dx(t)Dp(t)}{[2\pi\hbar]} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left(p\dot{x} - \frac{p^2}{2m} \right) dt \right\} \delta_{k'}^j \times \\ \times \overrightarrow{\exp} \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[L^{Tk'}_n p + M^{Tk'}_n - i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (L^{Tk'}_n(x)) \right] dt \right\}^{k'}. \quad (7)$$

Заметим здесь еще раз, что переход от (2) к фейнмановскому континуальному интегралу, для которого (7) было бы более естественным символьным представлением, нуждается в строгом обосновании.

3. РЕОНОМНОЕ ОДНОРОДНОЕ ТОЧЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Реономное однородное точечное преобразование в континуальном интеграле (2), т.е. замена $x = f(y, t)$, основано на двух преобразованиях случайного процесса $\xi(t)$. Первое преобразование – это так называемое фазовое преобразование процесса, когда один процесс функциональным образом выражается через другой: $\xi(t) = f(\zeta(t), t)$. Участвующая в таком преобразовании функция f должна быть обратимой и обладать достаточно гладким поведением. Вероятности двух процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ связаны уравнением $\tilde{P}_\xi(t_a, x_a; t_b, \tilde{\Gamma}) = P_\zeta(t_a, y_a; t_b, \Gamma)$. Это означает, что в (2) мы можем перейти от интегрирования по мере μ^ξ к интегрированию по мере μ^ζ . Однако теперь в соответствии с формулой Ито о дифференцировании сложной функции мы будем иметь для процесса $\zeta(t)$ следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\zeta = \left(-\frac{1}{f'} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu^2 \varkappa \frac{f''}{f'^3} \right) dt + \mu \sqrt{\varkappa} \frac{1}{f'} dw(t) \quad (8)$$

(где $f' \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta(t), t)$). Из уравнения (8) следует, что производящий генератор (дифференциальный оператор) процесса $\zeta(t)$ отличается от производящего генератора процесса $\xi(t)$.

¹⁾ Плотность полугруппы (5) и функцию Грина для системы уравнений Шредингера мы будем обозначать в работе одинаковой буквой.

Нетрудно также заметить, что полугруппа, связанная с процессом $\zeta(t)$, действует в гильбертовом пространстве, где у скалярного произведения весовая функция не равна единице. Если же преобразовать процесс $\zeta(t)$ к такому процессу $\tilde{\xi}(t)$, что

$$d\tilde{\xi} = \left(-\frac{1}{f'} \frac{\partial f}{\partial t} - \mu^2 \varkappa \frac{f''}{f'^3} \right) dt + \mu \sqrt{\varkappa} \frac{1}{f'} dw(t), \quad (9)$$

то мы возвратимся к нормировке функций с единичной весовой функцией в скалярном произведении.

Поскольку в уравнениях (8) и (9) стоят одинаковые коэффициенты диффузии, то переход от интегрирования по мере μ^ζ к интегрированию по мере $\mu^{\tilde{\xi}}$ происходит согласно формуле Гирсанова–Камерона–Мартина.

В результате такого перехода мы будем иметь следующее выражение для мультипликативного стохастического интеграла:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{1}{\mu \sqrt{\varkappa}} L_n^i + \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varkappa} \frac{f''}{f'^2} \delta_n^i \right] dw(t) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\mu^2 \varkappa m} M_n^i - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} L_n^{k'} L_{k'}^i - \frac{1}{8} \mu^2 \varkappa \left(\frac{f''}{f'^2} \right)^2 \delta_n^i - \frac{1}{2} \frac{f''}{f'^2} L_n^i \right] dt \right\}, \end{aligned}$$

здесь $L_n^i \equiv L_n^i(f(\tilde{\xi}(t), t), t)$. Аналогичную зависимость от аргументов имеет и M_n^i , а $f \equiv f(\tilde{\xi}(t), t)$.

В полученном выражении для мультипликативного стохастического интеграла второй стохастический интеграл пропорционален δ_n^i . Это означает, что экспоненту с этим интегралом можно вынести за знак мультипликативного интеграла. После этого мы преобразуем факторизованную экспоненту, воспользовавшись тождеством Ито из [3]:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{2} \mu \sqrt{\varkappa} \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{f''}{f'^2} \right) (\tilde{\xi}(t), t) dw(t) \right\} = \left(\frac{f'(\tilde{\xi}(t_b), t_b)}{f'(\tilde{\xi}(t_a), t_a)} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \int_{t_a}^{t_b} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{f'} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{1}{2} \frac{f''}{f'^2} \frac{\partial f}{\partial t} + \mu^2 \varkappa \left(-\frac{1}{4} \frac{f'''}{f'^3} + \frac{3}{4} \left(\frac{f''}{f'^2} \right)^2 \right) \right] dt \right\}. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} (\psi_{t_b})_n(x_a, t_a) = \int_{\Omega_-} d\mu^{\tilde{\xi}}(\omega) \left(\frac{f'(\tilde{\xi}(t_b), t_b)}{f'(\tilde{\xi}(t_a), t_a)} \right)^{1/2} \overleftarrow{\exp} \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{1}{\mu \sqrt{\varkappa}} L_n^{j'} dw(t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\mu^2 \varkappa m} \widetilde{M}_n^{j'} - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} L_{k'}^{j'} L_n^{k'} \right) dt \right]^{j'} \chi_{j'}^0(f(\tilde{\xi}(t_b), t_b), \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2 \varkappa m} \widetilde{M}_n^{j'} = \frac{1}{\mu^2 \varkappa m} M_n^{j'} - \frac{1}{2} \frac{f''}{f'^2} L_n^{j'} + \\ + \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{f'} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{1}{2} \frac{f''}{f'^2} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu^2 \varkappa \left(-\frac{1}{2} \frac{f'''}{f'^3} + \frac{5}{4} \frac{f''^2}{f'^4} \right) \right] \delta_n^{j'}. \end{aligned}$$

В формуле (10) $\tilde{\xi}(t_a) = y_a$, а $y_a = g(x_a, t_a)$, где g – обратная функция к функции $f(y, t)$ по пространственной переменной.

Для полугруппы (10) производящим оператором будет

$$\tilde{A} = \left(\frac{1}{2} \mu^2 \varkappa \frac{1}{f'^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu^2 \varkappa \frac{f''}{f'^3} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{f'} \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \right) \delta_n^i + \frac{1}{f'} L_n^i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\mu^2 \varkappa t} \tilde{M}_n^i. \quad (11)$$

Выбирая в формуле (10) $\chi_{j'}^0(x) = \delta(x - x_b) \delta_{j'}^j$, можно получить выражение для функции Грина G_n^j через континуальный интеграл. Оно означает, что мы имеем следующее соотношение между функциями Грина:

$$G_n^j(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{-1/2} (g(x_b, t_b)) \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{-1/2} (g(x_a, t_a)) \times \\ \times \tilde{G}_n^j(g(x_b, t_b), t_b; g(x_a, t_a), t_a),$$

где $\tilde{G}_n^j(y_b, t_b; y_a, t_a)$ как функция переменных (y_a, t_a) является функцией Грина для уравнения с оператором $\tilde{A}$ (11). По прямым переменным, т.е. по переменным (y_b, t_b) , $\tilde{G}_n^j(y_b, t_b; y_a, t_a)$ есть функция Грина для уравнения с оператором $\tilde{A}^*$, сопряженным оператору $\tilde{A}$. Заметим, что оператор Гамильтона $\tilde{\hat{H}}$ определяется равенством $\tilde{\hat{H}} = \varkappa \hbar \tilde{A}^*|_{\varkappa=i}$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПУТЕЙ

В континуальных интегралах преобразование репараметризации путей, как и точечное преобразование, тоже основано на двух преобразованиях случайных процессов. Первое преобразование связано со случайной заменой времени в случайных процессах [8]. Если процесс $\tilde{\xi}(t, \omega)$ можно представить в виде

$$\tilde{\xi}(t, \omega) = \xi_1(\tau_t(\omega), \omega),$$

то говорят, что процесс $\tilde{\xi}(t)$ получается из процесса $\xi_1(t)$ в результате случайной замены времени (переменная t заменяется новой переменной τ_t – случайной функцией от t).

В нашем случае функция τ_t определяется из решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\tau_t}{dt} = \left[\frac{1}{f'(\xi_1(\tau_t), t)} \right]^2, \quad \tau_{t_a} = s_a.$$

Вместо решения этого уравнения можно решать интегральное уравнение для функции φ , обратной к функции τ_t ,

$$\varphi(s) = t_a + \int_{s_a}^s [f'(\xi_1(u), \varphi(u))]^2 du. \quad (12)$$

При случайной замене времени функция $f(y, t)$ выбирается такой, чтобы функция $[1/f'(y, t)]^2$ была гладкой, ограниченной и удовлетворяла условию Липшица по t .

Поскольку в теории случайных процессов известно, как преобразуется резольвента при случайной замене времени, сделаем сначала переход от полугруппы (10) к ее резольвенте

$$(R_\lambda \chi^0)_n(x_a, t_a) = \int_{t_a}^{\infty} e^{-\lambda(t_b - t_a)} (\psi_{t_b})_n(x_a, t_a) dt_b.$$

Тогда в результате случайной замены времени, если в выражении для резольвенты t_b заменить на s_b согласно $t_b = \varphi(s_b)$ и учесть, что $\xi_1(s_a) = y_a$, будем иметь

$$\begin{aligned} (R_\lambda \chi^0)_n(x_a, t_a) &= \int_{s_a}^{\infty} ds_b \int_{\Omega_-} d\mu^{\xi_1}(\omega) f'^2(\xi_1(s_b), \varphi(s_b)) \left(\frac{f'(\xi_1(s_b), \varphi(s_b))}{f'(\xi_1(s_a), \varphi(s_a))} \right)^{1/2} \times \\ &\times \exp \left(-\lambda \int_{s_a}^{s_b} f'^2(\xi_1(s), \varphi(s)) ds \right) \delta_n^{k'}(\widetilde{\exp})_n^j \chi_j^0(f(\xi_1(s_b), \varphi(s_b))), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$(\widetilde{\exp})_{k'}^j = \overleftarrow{\exp} \left\{ \int_{s_a}^{s_b} \left[\frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} f' L_{k'}^j dw_1(s) + f'^2 \left(\frac{1}{\mu^2 \varkappa m} \widetilde{M}_{k'}^j - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} L_{k'}^i L_i^j \right) ds \right] \right\}_{k'}^j.$$

В полученном выражении для резольвенты матричные функции зависят от аргументов следующим образом: $M_{k'}^j \equiv M_{k'}^j(f(\xi_1(s), \varphi(s)), \varphi(s))$.

Второе преобразование – это преобразование Гирсанова–Камерона–Мартина континуального интеграла в (13). От процесса $\xi_1(s)$, чье стохастическое дифференциальное уравнение есть

$$d\xi_1(s) = \left(-f' \frac{\partial f}{\partial t} - \mu^2 \varkappa \frac{f''}{f'} \right) ds + \mu\sqrt{\varkappa} dw_1(s),$$

мы перейдем к случайному процессу $\xi_2(s)$:

$$d\xi_2(s) = -f' \frac{\partial f}{\partial t} ds + \mu\sqrt{\varkappa} dw_1(s).$$

При таком переходе снова необходимо воспользоваться тождеством Ито, получаемым из формулы (18) работы [3]:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -\mu\sqrt{\varkappa} \int_{s_a}^{s_b} \left(\frac{f''}{f'} \right) (\xi_2(s), \varphi(s)) dw_1(s) \right\} &= \left(\frac{f'(\xi_2(s_b), \varphi(s_b))}{f'(\xi_2(s_a), \varphi(s_a))} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ \int_{s_a}^{s_b} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \ln(f'^2) - f'' \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu^2 \varkappa \left(\frac{f'''}{f'} - \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

В результате, если еще сделать обратное преобразование резольвенты и заменить λ на $-\frac{i}{\hbar}E$, получим

$$\begin{aligned} (G\chi^0)_n(x_a, t_a; t_b) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b - t_a)} dE \int_{s_a}^{\infty} ds_b \int_{\Omega_-} d\mu^{\xi_2}(\omega) \times \\ &\times (f'(\xi_2(s_b), \varphi(s_b)))^{3/2} (f'(\xi_2(s_a), \varphi(s_a)))^{1/2} \times \\ &\times \overleftarrow{\exp} \int_{s_a}^{s_b} \left\{ \left[\frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} f' L_n^j dw_1(s) + \left(\frac{1}{\mu^2 \varkappa m} f'^2 M_n^j + \frac{1}{2} f'' L_n^j - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} f'^2 L_n^{n'} L_{n'}^j + \right. \right. \right. \\ &+ \frac{\mu^2 \varkappa}{4} \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right] \delta_n^j + \frac{i}{\hbar} E f'^2 \delta_n^j + \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial s} \ln(f'^2) - f' \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} - f'' \frac{\partial f}{\partial t} \right] \delta_n^j \right] ds \right\}^j \chi_j^0(f(\xi_2(s_b), \varphi(s_b))). \end{aligned} \quad (14)$$

В этой формуле $\xi_2(s_a) = y_a$, а функции M и L зависят от $(f(\xi_2(s), \varphi(s)), \varphi(s))$. Напомним, что функция $\varphi(s)$ определяется из уравнения (12).

Чтобы получить интегральное соотношение между функциями Грина, нужно в (14) подставить $\chi_j^0(x) = \delta(x - x_b)\delta_j^k$. Тогда континуальный интеграл, стоящий в (14), берется по пространству путей с фиксированными граничными точками: $\xi_2(s_a) = y_a$, $\xi_2(s_b) = y_b$.

Получившееся интегральное соотношение между функциями Грина можно записать символически в виде

$$\begin{aligned} G_n^k(x_b, t_b; x_a, t_a) = & \int dy_a \delta(y_a - g(x_a, t_a)) \int dy_b \delta(y_b - g(x_b, t_b)) \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{1/2}(y_a, t_a) \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^{1/2}(y_b, t_b) \times \\ & \times \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b - t_a)} \int_{s_a}^{\infty} ds_b \int_{\substack{y(s_a)=y_a \\ y(s_b)=y_b}} \frac{Dy(s) D\tilde{p}(s)}{[2\pi\hbar]} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{s_a}^{s_b} \left(\tilde{p}\dot{y} - \frac{\tilde{p}^2}{2m} + f' \frac{\partial f}{\partial t} \tilde{p} \right) ds \right\} \delta_j^k \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{s_a}^{s_b} \left[f' L_n^{Tj} \tilde{p} + f'^2 M_n^{Tj} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (i\hbar) f' \frac{\partial}{\partial y} (L_n^{Tj}(x)) - \frac{1}{2} (i\hbar) f'' L_n^{Tj} + V_n^j \right] ds \right\}_n^j, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$V_n^j = \left(-\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial s} \ln(f'^2) + \frac{1}{2} i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \left(f' \frac{\partial f}{\partial t} \right) - E f'^2 \right) \delta_n^j.$$

Для функции Грина G_n^k из левой части формулы (15) оператором Гамильтона соответствующей системы уравнений Шредингера является (6), а для функции Грина, стоящей в правой части (15), оператором Гамильтона будет

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\hbar f' \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \right) \delta_j^n - (i\hbar) f' L_j^{Tn} \frac{\partial}{\partial y} + f'^2 M_j^{Tn} - \\ & - (i\hbar) f' \frac{\partial}{\partial y} (L_j^{Tn}) - \frac{1}{2} (i\hbar) f'' L_j^{Tn} + V_j^n. \end{aligned} \quad (16)$$

Необходимо заметить, что т.к. в (15) функции f , L и M зависят от $\varphi(s)$ (например, $L(f(y(s), \varphi(s)), \varphi(s))$), то выражение (16) приобретает точный смысл тогда, когда из уравнения (12) удастся найти, как $\varphi(s)$ зависит от $y(s)$. Для континуального интеграла из правой части формулы (14) такая трудность в некоторых случаях преодолевается при помощи специального преобразования [4].

5. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ШЕППА

В этом разделе мы воспользуемся формулой (14) для вывода обобщенной формулы Шепша. Сначала подставим вместо $f(y, t)$ в (14) $f(y, t) = l(t)y$. Уравнение (12) для

определения функции $\varphi(s)$ теперь уже не будет содержать случайной переменной. После такой подстановки формула (14) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} (G\chi^0)_n(x_a, t_a; t_b) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t_b-t_a)} dE \int_{s_a}^{\infty} ds_b \int_{\Omega_-} d\mu^{\xi_2}(\omega) \times \\ &\times [l(t_a)]^{1/2} [l(\varphi(s_b))]^{3/2} \overleftarrow{\exp} \int_{s_a}^{s_b} \left\{ \left[\frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{\lambda(s)} L_n^j dw_1(s) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{1}{\lambda^2(s)} L_n^{n'} L_{n'}^j ds \right] + \widetilde{M}_n^j ds \right\}^j \chi_j^0 \left(\frac{\xi_2(s_b)}{\lambda(s_b)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\xi_2(s_a) = y_a$, и мы обозначили через $\widetilde{M}_n^j$ следующее выражение:

$$\widetilde{M}_n^j = \frac{1}{\mu^2 \varkappa m} \frac{1}{\lambda^2(s)} M_n^j + \frac{i}{\hbar} E \frac{1}{\lambda^2(s)} \delta_n^j + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} \ln(\lambda^2(s)) \right] \delta_n^j.$$

В (17) мы также ввели новую функцию $\lambda(s)$, обозначив $l(\varphi(s)) = 1/\lambda(s)$.

Следующий шаг – это преобразование Гирсанова–Камерона–Мартина в континуальном интеграле формулы (17). Мы перейдем от процесса $\xi_2(s)$, чье стохастическое дифференциальное уравнение есть

$$d\widetilde{\xi}_2(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda(s)}{ds} ds + \mu\sqrt{\varkappa} dw_1(s),$$

к винеровскому процессу $\widetilde{\xi}_2(s) = \mu\sqrt{\varkappa} w_1(s)$.

Такое преобразование изменяет мультипликативный стохастический интеграл, и он становится равным

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \int_{s_a}^{s_b} \left\{ \left[\frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{\lambda(s)} L_n^j + \frac{1}{\mu\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} \widetilde{\xi}_2(s) \delta_n^j \right] dw_1(s) + \right. \\ \left. + \widetilde{M}_n^j ds - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{1}{\lambda^2(s)} \left[L_n^{n'} L_{n'}^j + 2 \frac{d\lambda}{ds} \widetilde{\xi}_2(s) L_n^j + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \widetilde{\xi}_2^2(s) \delta_n^j \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

Тождество Ито

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \int_{s_a}^{s_b} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} \widetilde{\xi}_2(s) dw_1(s) \right\} &= \left(\frac{\lambda(s_b)}{\lambda(s_a)} \right)^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} \widetilde{\xi}_2^2(s) \Big|_{s_a}^{s_b} \right\} \exp \left\{ \int_{s_a}^{s_b} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} \right) \widetilde{\xi}_2^2(s) \right] ds \right\} \end{aligned}$$

помогает избавиться от второго стохастического интеграла в $\overleftarrow{\exp}[\dots]_n^j$. Для сокращения записи в правой части тождества было введено обозначение

$$\exp \left\{ F(s) \Big|_{s_a}^{s_b} \right\} = \exp \{ F(s_b) - F(s_a) \}.$$

Если теперь в формуле, которая получается из (17) после преобразования Гирсано-ва–Камерона–Мартина, проинтегрировать по E (это дает $\delta(t_b - t_a - \int_{s_a}^{s_b} \frac{1}{\lambda^2(s)} ds)$), а затем по s_b , то мы придем к выражению

$$\begin{aligned}
(G\chi^0)_n(x_a, t_a; t_b) = & \\
= l(t_a)^{-1/2} l(t_b)^{3/2} \int ds_a \delta(s_a - \varphi^{-1}(t_a)) \int ds_b \delta(s_b - \varphi^{-1}(t_b)) \times & \\
\times \int_{\Omega_-} d\mu^{\tilde{\xi}_2}(\omega) \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d\lambda}{ds} \tilde{\xi}_2^2(s) \Big|_{s_a}^{s_b} \right\} \exp \int_{s_a}^{s_b} \left\{ \left[\frac{1}{\mu \sqrt{\varkappa}} \frac{1}{\lambda(s)} L_n^j dw_1(s) - \right. \right. & \\
- \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \frac{1}{\lambda^2(s)} L_n^{n'} L_n^j ds + \frac{1}{\mu^2 \varkappa} \left(\frac{1}{m} \frac{1}{\lambda^2(s)} M_n^j - \frac{1}{\lambda^2(s)} \frac{d\lambda}{ds} \tilde{\xi}_2(s) L_n^j - \right. & \\
\left. \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d^2 \lambda}{ds^2} \tilde{\xi}_2^2(s) \delta_n^j \right) ds \right\} \chi_j^0 \left(\frac{\xi_2(s_b)}{\lambda(s_b)} \right). & \quad (18)
\end{aligned}$$

Обобщенная формула Шепша получается из (18), если ее переписать для функций Грина. Мы представим ее в символьном виде

$$\begin{aligned}
G_n^k(x_b, t_b; x_a, t_a) = l(t_a)^{-1/2} l(t_b)^{-1/2} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \frac{1}{l(t)} \frac{dl}{dt} m x^2(t) \Big|_{t_a}^{t_b} \right) \times & \\
\times \int dy_a \delta \left(y_a - \frac{x_a}{l(t_a)} \right) \int dy_b \delta \left(y_b - \frac{x_b}{l(t_b)} \right) \times & \\
\times \int ds_a \delta(s_a - \varphi^{-1}(t_a)) \int ds_b \delta(s_b - \varphi^{-1}(t_b)) \times & \\
\times \int_{\substack{y(s_a)=y_a \\ y(s_b)=y_b}} \frac{Dy(s) D\tilde{p}(s)}{[2\pi\hbar]} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{s_a}^{s_b} \left(\tilde{p}\dot{y} - \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d^2 \lambda}{ds^2} y^2(s) \right) ds \right\} \delta_j^k \times & \\
\times \overrightarrow{\exp} \left\{ - \frac{i}{\hbar} \int_{s_a}^{s_b} \left[\frac{1}{\lambda(s)} L_n^{Tj} \tilde{p} + \frac{1}{\lambda^2(s)} M_n^{Tj} - (i\hbar) \frac{1}{\lambda(s)} \frac{\partial}{\partial y} (L_n^{Tj}) - \right. \right. & \\
\left. \left. - \frac{1}{\lambda^2(s)} \frac{d\lambda}{ds} m y L_n^{Tj} \right] ds \right\}_n^j. & \quad (19)
\end{aligned}$$

Здесь $L_n^{Tj} \equiv L_n^{Tj} \left(\frac{y(s)}{\lambda(s)}, \varphi(s) \right)$, аналогичную зависимость от аргумента имеет и M_n^{Tj} . Оператор Гамильтона для континуального интеграла из правой части (19) следующий:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 = & \left(- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m}{2} \frac{1}{\lambda(s)} \frac{d^2 \lambda}{ds^2} y^2(s) \right) \delta_j^n - i\hbar \frac{1}{\lambda(s)} L_n^{Tj} \frac{\partial}{\partial y} - \\
& - i\hbar \frac{1}{\lambda(s)} \frac{\partial}{\partial y} (L_n^{Tj}) + \frac{1}{\lambda^2(s)} M_n^{Tj} - \frac{1}{\lambda^2(s)} \frac{d\lambda}{ds} m y L_n^{Tj}.
\end{aligned}$$

В (19) $\varphi(s)$ определяется так:

$$\varphi(s) = t_a + \int_{s_a}^s l^2(\varphi(u)) du.$$

Выбирая $s_a = 0$ и $t_a = 0$, мы придем к такой же зависимости от $\varphi(s)$ в формуле (19), как и для формулы Шепша из работы [10] для обычных континуальных интегралов.

Список литературы

- [1] *I. H. Duru, H. Kleinert.* Phys. Lett. 1979. V. 84B. P. 185.
- [2] *N. K. Pak, I. Sokmen.* Phys. Rev. 1984. V. A30. P. 1629; *F. Steiner.* Phys. Lett. 1984. V. 106A. P. 356; *C. DeWitt-Morette, A. Young.* Ann. Phys. 1986. V. 169. P. 140; *C. Grosche, F. Steiner.* Z. Phys. 1987. B. C36. S. 699; *S. N. Storchak.* Path reparametrization in the path integral for Morse potential: IHEP Preprint 82–20. Serpukhov, 1982; IHEP Preprint 86–143. Serpukhov, 1986; *C. H. Сторчак.* ТМФ. 1988. Т. 75. С. 403; 1992. Т. 93. С. 17; 1993. Т. 94. С. 375; 1994. Т. 101. С. 374.
- [3] *S. N. Storchak.* Phys. Lett. 1989. V. A135. P. 77.
- [4] *S. N. Storchak.* Phys. Lett. 1992. V. A161. P. 397.
- [5] *C. Grosche.* Phys. Lett. 1993. V. A182. P. 28.
- [6] *A. Pelster, A. Wunderlin.* Z. Phys. 1992. B. B89. S. 373.
- [7] *S. N. Storchak.* Path reparametrization in the path integrals for the systems of differential equation in one-dimensional space: IHEP Preprint 92–133. Serpukhov, 1992.
- [8] *Ph. Blanchard, M. Sirugue.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1372; *Ph. Blanchard.* Lect. Notes in Phys. 1981. V. 173. P. 19.
- [9] *L. A. Shepp.* Ann. Math. Stat. 1966. V. 37. P. 321.
- [10] *E. Onofri.* Lett. Nuovo Cim. 1978. V. 21. P. 489.
- [11] *Ю. Л. Далецкий, Н. И. Тетерина.* УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 167; *Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий.* УМН. 1982. Т. 37. № 3. С. 95; *Ю. Л. Далецкий.* УМН. 1983. Т. 38. № 3. С. 87.

Поступила в редакцию 25.I.1996 г.

S. N. Storchak

NONSTATIONARY GENERALIZED DURU–KLEINERT
TRANSFORMATION OF PATH INTEGRALS FOR SYSTEMS OF
DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL SPACE

New formulas for transformations of the Winer continual integrals corresponding to parabolic systems of differential equations in the one-dimensional space are obtained. Namely, we consider the systems of two equations with time-dependent coefficients. These formulas determine the continual integral transformation under the reonomic homogeneous point-like transformation of the integration variables together with the path reparametrization transformation. These formulas result in the integral relation between Green functions of the related systems of differential equations. It is shown how the generalized Schepp formula for the continual integrals under consideration arises from this relation. In order to derive these new formulas, the properties of random processes under the phase transitions and the random change of time were used.