Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Чалых, Дополнительные интегралы обобщенной квантовой задачи
Калоджеро–Мозера, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 28–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:14:42

О. А. Чалых*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОБОБЩЕННОЙ КВАНТОВОЙ ЗАДАЧИ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

Рассматриваются интегрируемая квантовая задача Калоджеро–Мозера и ее обобщения, связанные с группами Кокстера. При специальных значениях параметров взаимодействия эта система имеет дополнительные интегралы и является алгебраически интегрируемой. Мы представляем эффективное описание дополнительных интегралов этой задачи.

Рассмотрим квантовый гамильтониан задачи Калоджеро–Мозера

$$H = -\Delta + \sum_{i < j} 2m(m+1)(x_i - x_j)^{-2}, \quad (1)$$

описывающий систему n точек на прямой, попарно взаимодействующих с потенциалом вида $u(x) = m(m+1)x^{-2}$, где m — произвольный параметр. Хорошо известно [1, 2], что данная задача наряду с ее классическим аналогом является интегрируемой, т.е. имеет n независимых инволютивных интегралов. В квантовом случае это означает, что существуют дифференциальные операторы $L_1, \dots, L_n$, $L_i = L_i(x, \frac{\partial}{\partial x})$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, такие, что $[L_i, H] = 0$ и $[L_i, L_j] = 0$ для всех i, j . Операторы L_i можно указать явным образом [3], при этом

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_1 + \dots + \partial_n, \\ L_2 &= \sum_{i < j} (\partial_i \partial_j + m(m+1)(x_i - x_j)^{-2}) = \frac{1}{2}(L_1^2 - H), \\ L_3 &= \sum_{i < j < k} \partial_i \partial_j \partial_k + \dots, \\ &\dots \\ L_n &= \partial_1 \dots \partial_n + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, а многоточия обозначают члены меньшего порядка. Отметим, что все L_i симметричны по $x_1, \dots, x_n$.

В работе [4] было показано, что при целых значениях параметра m задача (1) имеет дополнительные квантовые интегралы, не симметричные по $x_1, \dots, x_n$ и, следовательно, не выражающиеся через указанные $L_1, \dots, L_n$. Согласно терминологии работ [5, 4],

*Московский государственный университет

оператор (1) для целых m является алгебраически интегрируемым оператором Шредингера. Сформулируем этот результат точнее.

Рассмотрим для данного натурального m кольцо таких многочленов f от n переменных $k_1, \dots, k_n$, для которых при всех $i < j$

$$\text{разность } f - s_{ij}f \text{ делится на } (k_i - k_j)^{2m}, \quad (3)$$

где s_{ij} действует на $f(k_1, \dots, k_n)$ перестановкой k_i и k_j .

ТЕОРЕМА 1 [4]. Для любого $m \in \mathbf{N}$ существует функция $\psi(k, x)$ ($k, x \in \mathbf{R}^n$), удовлетворяющая условиям (3) по k и имеющая вид

$$\psi = P(k, x) \exp(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n), \quad (4)$$

где P — многочлен по k (зависящий от x) со старшим членом вида $\prod_{i < j} (k_i - k_j)^m$. При этом для любого многочлена $f(k)$, удовлетворяющего требованиям (3), существует дифференциальный оператор $L_f(x, \partial/\partial x)$ такой, что $L_f \psi = f(k) \psi$.

В качестве f можно брать элементарные симметрические многочлены от $k_1, \dots, k_n$, при этом соответствующие операторы L_f совпадут с вышеуказанными $L_1, \dots, L_n$. Если же $f = \prod_{i < j} (k_i - k_j)^{2m+1}$, то соответствующий оператор L_f будет антисимметрическим оператором, коммутирующим со всеми L_i , т.к. он имеет с ними общую собственную функцию (4). Более того, в качестве f можно взять любой многочлен, делящийся на $\prod_{i < j} (k_i - k_j)^{2m}$. Таким образом, задача (1) при целых m имеет много дополнительных интегралов. В настоящей работе мы хотим более явным по сравнению с [4, 6] образом построить эти квантовые интегралы для задачи (1) и ее обобщений.

Рассмотрим сразу несколько более общую ситуацию: пусть в $\mathbf{R}^n$ задан набор гиперплоскостей, ортогональные отражения относительно которых порождают конечную группу W , называемую в таком случае группой Кокстера (см. [7]). Зеркалами группы W будем называть гиперплоскости, отвечающие всевозможным отражениям из W . Выберем для каждого зеркала вектор, ему перпендикулярный, и пусть R_+ будет множеством этих нормалей. Припишем каждому $\alpha \in R_+$ целую кратность m_α так, что $m_\alpha = m_{\alpha'}$, если соответствующие зеркала переводятся друг в друга некоторым преобразованием из W .

ТЕОРЕМА 2 [4]. 1. Для произвольной группы Кокстера W и заданных целых W -инвариантных кратностей $m_\alpha \geq 0$ существует и единственная функция $\psi(k, x)$ вида (4) с многочленом P вида

$$P(k, x) = \prod_{\alpha \in R_+} (\alpha, k)^{m_\alpha} + \text{члены меньшей степени},$$

удовлетворяющая условию

$$\text{для любого } \alpha \in R_+ \quad \psi - s_\alpha \psi \text{ делится на } (\alpha, k)^{2m_\alpha}, \quad (5)$$

где $(s_\alpha \psi)(k, x) = \psi(s_\alpha k, x)$, а s_α — отражение, соответствующее $\alpha \in R_+$. При этом любая функция $\phi(k, x)$ вида (4), удовлетворяющая условию (5), получается из $\psi(k, x)$ применением некоторого дифференциального оператора по x .

2. Для любого многочлена $f(k)$, удовлетворяющего условию (5), существует дифференциальный оператор $L_f(x, \partial/\partial x)$ такой, что $L_f\psi = f(k)\psi$. Все эти операторы попарно коммутируют.

Теорема 2 в частном случае, когда группа W действует в $\mathbf{R}^n$ перестановками координат, совпадает с теоремой 1. Заметим, что в качестве f мы всегда можем брать W -инвариантные многочлены, например $f(k) = -k^2$, при этом несложное вычисление показывает, что оператор $H = L_{-k^2}$ имеет вид

$$H = -\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)(\alpha, x)^{-2}, \quad (6)$$

т.е. является предложенным Ольшанецким и Переломовым [3] обобщением гамильтониана (1) на случай произвольной группы Кокстера.

Пусть теперь подмножество R'_+ множества нормалей R_+ выбрано так, что соответствующие им гиперплоскости являются множеством зеркал некоторой кокстеровской подгруппы $W' \subset W$ и для $\alpha \in R'_+$ заданы W' -инвариантные кратности $m'_\alpha \leq m_\alpha$. При этом подгруппе W' соответствует гамильтониан

$$H' = -\Delta + \sum_{\alpha \in R'_+} m'_\alpha(m'_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)(\alpha, x)^{-2}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 3. Существует дифференциальный оператор $D(x, \partial/\partial x)$, сплетающий операторы (6), (7):

$$H \circ D = D \circ H'. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции ψ и ψ' , соответствующие данным W , m_α и W' , m'_α согласно теореме 2. Поскольку функция ψ , очевидно, удовлетворяет условию (5) для любого $m'_\alpha \leq m_\alpha$, она в соответствии с теоремой 2 может быть получена из ψ' применением подходящего дифференциального оператора. Пусть $D(x, \partial/\partial x)$ – дифференциальный оператор, переводящий ψ' в ψ . Имеем

$$(H \circ D)\psi' = H\psi = -k^2\psi = -k^2D\psi' = D(H'\psi').$$

Значит, операторы $H \circ D$ и $D \circ H'$ совпадают при действии на $\psi'(k, x)$ для всех k , поэтому равны тождественно.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $W' \subset W$ – кокстеровская подгруппа группы Кокстера W , $R'_+ \in R_+$ – нормали к ее зеркалам, а W' -инвариантные кратности m'_α выбраны так, что $m'_\alpha \leq m_\alpha$. Пусть, далее, L'_f – квантовый интеграл задачи (7), отвечающий некоторому многочлену f , удовлетворяющему условию (5) для m'_α , $\alpha \in R'_+$. Тогда оператор

$$L = D \circ L'_f \circ D^* \quad (9)$$

является квантовым интегралом задачи (6), где D – сплетающий оператор из (8), а D^* означает оператор, формально сопряженный к D , т.е.

$$\int_{\mathbf{R}^n} (Du)v \, dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(D^*v) \, dx$$

для любых (финитных) функций $u(x)$, $v(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что операторы (6) и (7) являются самосопряженными, и применим сопряжение к обеим частям соотношения (8): $D^* \circ H = H' \circ D^*$. Отсюда для оператора (9) получаем $L \circ H = D \circ L'_f \circ D^* \circ H' = D \circ L'_f \circ H' \circ D^* = D \circ H' \circ L'_f \circ D^* = H \circ D \circ L'_f \circ D^* = H \circ L$, т.е. L коммутирует с гамильтонианом (6). Докажем, что L коммутирует с любым интегралом L_g задачи (6). Для этого рассмотрим коммутатор $I = [L, L_g]$. Этот оператор также является интегралом, т.е. коммутирует с гамильтонианом (6). Однако, как нетрудно показать, операторы L, L_g имеют постоянные коэффициенты при $x = \infty$ (так же как и оператор (6), равный $-\Delta$ при $x \rightarrow \infty$). Это следует из процедуры нахождения ψ -функции и интегралов L_f , описанной в работе [4]. Однако в таком случае их коммутатор I равен нулю на бесконечности, а тогда он есть тождественный нуль в силу следующей леммы:

ЛЕММА [8]. *Если коммутатор дифференциального оператора I с оператором Лапласа в $\mathbf{R}^n$ имеет порядок, не превосходящий порядка I , то его коэффициенты при старших степенях — полиномы.*

Итак, $[L, L_g] = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, иллюстрирующие теорему 4.

ПРИМЕР 1. Тип A_1 . R_+ состоит из единственного вектора α с кратностью $m_\alpha = m$. Если α отождествить с единицей в $\mathbf{R}^1$, то соответствующая функция $\psi(k, x)$ ($k, x \in \mathbf{R}$) должна удовлетворять условию

$$\psi(k, x) - \psi(-k, x) \text{ делится на } k^{2m}$$

и имеет следующий вид [6]:

$$\psi(k, x) = D(e^{kx}), \quad D = D(x, d/dx) = (d/dx - m/x) \circ \dots \circ (d/dx - 1/x).$$

Поэтому оператор

$$A = D \circ d/dx \circ D^*,$$

где $D^* = (-1)^m (d/dx + 1/x) \circ \dots \circ (d/dx + m/x)$, будет оператором порядка $2m + 1$, коммутирующим с $L = -d^2/dx^2 + m(m+1)x^{-2}$, что отвечает тому, что L есть двукратное вырождение конечнозонного оператора (см. [9]).

ПРИМЕР 2. Тип A_2 . $R_+ = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3\} \subset \mathbf{R}^3$, $m_\alpha = 1$. Соответствующая ψ -функция, найденная в работе [6], имеет вид

$$\psi(k, x) = [D \circ (\partial_{12} - 2/x_{12})] e^{kx},$$

где оператор D выглядит следующим образом:

$$D = \partial_{13} \partial_{23} - 2x_{13}^{-1} \partial_{23} - 2x_{23}^{-1} \partial_{13} + 4x_{13}^{-1} x_{23}^{-1} + 2x_{12}^{-2}, \quad (10)$$

$$\partial_{ij} = \partial/\partial x_i - \partial/\partial x_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j.$$

Полагая $R'_+ = R_+$ с $m_\alpha \equiv 0$, мы получим, что оператор (7) является оператором Лапласа $-\Delta$ в $\mathbf{R}^3$ и согласно теореме 4 для любого оператора L_0 с постоянными коэффициентами оператор L вида

$$L = D \circ \left(\partial_{12} - \frac{2}{x_{12}} \right) \circ L_0 \circ \left(\partial_{12} + \frac{2}{x_{12}} \right) \circ D^*$$

будет квантовым интегралом задачи Калоджеро–Мозера (1) для случая трех частиц с $m = 1$. При этом L имеет вид

$$L = \partial_{13}^2 \partial_{23}^2 \partial_{12}^2 L_0 + \text{младшие члены.}$$

ПРИМЕР 3. R_+ и m_α те же, что и в предыдущем примере, но $R'_+ = \{e_1 - e_2\}$ с $m'_\alpha = 1$. В этом случае $\psi'(k, x) = (k_{12} - 2/x_{12})e^{kx}$, а $\psi(k, x) = D\psi'(k, x)$, где D задан формулой (10). Поэтому в соответствии с теоремой 4 оператор $L = D \circ L_0 \circ D^*$ будет квантовым интегралом трехчастичной задачи Калоджеро–Мозера (1) с $m = 1$, если L_0 – интеграл задачи с $H_0 = -\Delta + 2(x_1 - x_2)^{-2}$. Беря в качестве L_0 единицу и ∂_3 , получаем квантовые интегралы задачи (1) с $m = 1$ при $n = 3$:

$$\begin{aligned} L_1 &= D \circ D^* = (\partial_{13}\partial_{23})^2 + \text{младшие члены,} \\ L_2 &= D \circ \partial_3 \circ D^* = (\partial_{13}\partial_{23})^2 \partial_3 + \text{младшие члены.} \end{aligned}$$

Аналогично получаем интегралы со старшими символами

$$(\partial_{12}\partial_{23})^2, (\partial_{12}\partial_{13})^2, (\partial_{12}\partial_{23})^2 \partial_2, (\partial_{12}\partial_{13})^2 \partial_1.$$

ПРИМЕР 4. $R_+ = \{e_i - e_j\}_{i < j \leq n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ с $m_\alpha \equiv 1$, а в качестве R'_+ возьмем подсистему $R'_+ = \{e_i - e_j\}_{i < j \leq n}$ с $m'_\alpha \equiv 1$. Соответствующие функции $\psi(k, x)$ и $\psi'(k, x)$ связаны соотношением $\psi = D\psi'$, явный вид дифференциального оператора указан в работе [6],

$$D = \prod_{i \leq n} (\partial_i - \partial_{n+1}) + \text{младшие члены.}$$

Поэтому оператор $L = D \circ L_0 \circ D^*$ будет квантовым интегралом задачи (1), если в качестве L_0 взять единицу или любой из интегралов (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [4] содержится также тригонометрическая версия теоремы 2, когда при условии (5) многочлен $(\alpha, k)^{2m_\alpha}$ заменяется на $\prod_{s=1}^{m_\alpha} ((\alpha, k)^2 - s^2(\alpha, \alpha))$. При этом R_+ является положительной частью произвольной системы корней в $\mathbf{R}^n$, а группа W – соответствующей группой Вейля. В этом случае справедливы также буквальные аналоги теорем 1–4, а соответствующий оператор H имеет вид

$$H = -\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha) \sin^{-2}(\alpha, x).$$

Формулы примеров 2–4 также имеют тригонометрические аналоги, определяющие интегралы системы Сазерленда [10] с гамильтонианом

$$H = -\Delta + \sum_{i < j} 4 \sin^{-2}(x_i - x_j).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью теоремы 4 можно строить квантовые интегралы L_f задачи (6) для f вида

$$f(k) = f_0(k) \prod_{\alpha \in R_+ \setminus R'_+} (\alpha, k)^{2m_\alpha}, \quad (11)$$

где R'_+ отвечает кокстеровской подгруппе W' , а f_0 – произвольный многочлен, инвариантный относительно этой подгруппы. Однако, как показали Волченко и Козачко [11], уже в случае системы R_+ типа B_2 существуют многочлены, удовлетворяющие условию (5), но не выражающиеся через многочлены вида (11). Это показывает, что не все интегралы L_f задачи (6) могут быть получены по формуле (9). Это относится также и к тригонометрическому случаю.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–01–01404). Автор благодарит А. П. Веселова и А. Б. Шабата за полезные обсуждения и внимание к данной работе.

Список литературы

- [1] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436.
- [2] *J. Moser.* Adv. Math. 1978. V. 16. P. 1–23.
- [3] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [4] *А.П. Веселов, К.Л. Стыркас, О.А. Чалых.* ТМФ. 1993. Т. 94. № 2. С. 253–275.
- [5] *Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков.* УМН. 1976. Т. 31. Вып. 1. С. 59–164.
- [6] *О.А. Чалых, А.Р. Веселов.* Commun. Math Phys. 1990. V. 126. P. 597–611.
- [7] *Н. Бурбаки.* Группы и алгебры Ли. Гл.4–6. М.: Мир, 1972.
- [8] *Ф.А. Березин.* Тр. Моск. матем. об-ва. 1957. Т. 6. С. 371–463.
- [9] *И.М. Кривевер.* УМН. 1977. Т. 32. Вып. 6. С. 198–245.
- [10] *B. Sutherland.* Phys.Rev. 1971. V. A4. P. 2019–2021; 1972. V. A5. P. 1372–1376.
- [11] *К. Волченко, А. Козачко.* Вестн. МГУ (в печати).

Поступила в редакцию 3.VI.1996 г.

О. А. Chalykh

ADDITIONAL INTEGRALS OF THE GENERALIZED QUANTUM CALOGERO–MOSER PROBLEM

We consider quantum integrable Calogero–Moser problem and its generalizations connected with Coxeter groups. For special values of coupling constants this problem has additional integrals and it is algebraically integrable. We give an effective description of additional integrals of this quantum problem.