Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Демской, Об одном классе систем лиувиллевого типа, *ТМФ*, 2004, том 141, номер 2, 208–227

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:36:31

© 2004 г.

Д.К. Демской*

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

Доказана лиувиллевость одного класса систем с лагранжианом вида $L = [g_{ij}(u)u_x^i u_t^j]/2 + f(u)$. Построены новые интегрируемые гамильтоновы системы, связанные дифференциальными подстановками типа преобразования Миуры с симметриями рассматриваемых гиперболических систем. Для одной из полученных систем построен рекурсионный оператор второго порядка.

Ключевые слова: системы лиувиллевого типа, высшие псевдоконстанты, рекурсионный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Открытие метода обратной задачи рассеяния позволило проинтегрировать ряд уравнений, играющих важную роль в описании нелинейных волн самой различной природы. К этим уравнениям относятся, в частности, уравнение Кортвега–де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение sh-Гордон и др. Как оказалось, эти уравнения обладают широкими классами точных решений, среди которых наиболее известны солитонные. Этот факт возродил интерес исследователей к методам точного интегрирования как таковым, а также позволил переосмыслить ряд известных еще с конца XIX в. фактов, связанных с приложениями нелинейных гиперболических уравнений в дифференциальной геометрии. Систематическое исследование нелинейных гиперболических уравнений с новых позиций было начато в работах [1], где были исследованы уравнения вида $u_{xt} = F(u)$. Было показано, что интегрируемыми над полем комплексных чисел являются только три уравнения:

$$u_{xt} = ae^u, \quad (1a)$$

$$u_{xt} = ae^u + be^{-2u}, \quad (1б)$$

$$u_{xt} = ae^u + be^{-u}, \quad (1в)$$

где $a, b = \text{const.}$ Это хорошо известные уравнения Лиувилля, Цицейки и sh-Гордон. Нужно отметить, что все они были известны еще в начале XX в. Приведенные урав-

*Орловский государственный университет, Орел, Россия. E-mail: demskoy@iname.com

нения представляют два различных класса интегрируемых уравнений: уравнения Цицейки и sh-Гордона являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния, а для уравнения Лиувилля известна формула общего решения

$$u = \ln \left(2 \frac{X'T'}{a(X+T)^2} \right), \quad X = X(x), \quad T = T(t).$$

Несмотря на различие этих классов, между ними существует тесная связь. Уравнение Лиувилля является вырождением уравнений sh-Гордона и Цицейки, вследствие чего высшие симметрии этих уравнений имеют одинаковую структуру:

$$u_\tau = MG_k(\omega, \omega_x, \dots), \quad (2)$$

где

$$M = D + u_x, \quad \omega = u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2.$$

Для уравнений (1б), (1в) G_k – дискретные последовательности функций; например, для (1б) эта последовательность имеет вид

$$G_{k+1} = (D^2 + 2\omega - D^{-1}\omega_x)G_k, \quad G_0 = 1.$$

В случае уравнения Лиувилля G – произвольная функция своих аргументов, а функция ω удовлетворяет характеристическому уравнению

$$D_t\omega = 0, \quad (3)$$

где D_t – оператор полного дифференцирования по переменной t . Решения уравнения (3) называются t -псевдоконстантами (t -интегралами). Понятно, что далеко не каждое гиперболическое уравнение обладает псевдоконстантами, однако, если это свойство выполняется, то уравнение может быть явно проинтегрировано (см., например, [2]–[4]). Поэтому уравнение Лиувилля, а также другие уравнения, обладающие псевдоконстантами, представляют особый интерес. В работах [2], [5], [6] приводятся результаты классификации уравнений, обладающих псевдоконстантами не выше второго порядка, а в работе [7] показано, что существуют уравнения, имеющие псевдоконстанты порядка больше 2.

Обобщением уравнения Лиувилля для случая систем уравнений являются открытые двумеризованные цепочки Тоды [3], [8], которые можно записать в виде

$$u_{xt}^i = \exp(A_j^i u^j), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь A_j^i – элементы матрицы Картана простой алгебры Ли; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Причем общим признаком как в случае скалярных уравнений, так и в случае систем является наличие псевдоконстант. Однако в последнем случае просто их наличие оказывается слишком слабым признаком интегрируемости. Например, для любой симметризуемой матрицы A_j^i :

$$\alpha_{ij} = \Lambda_{is} A_j^s, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \Lambda = \text{diag}(a_1, \dots, a_n),$$

соответствующая система (4) допускает псевдоконстанту

$$\rho = a_i u_{xx}^i - \frac{1}{2} \alpha_{ij} u_x^j u_x^i.$$

Поэтому требуется существование полного набора псевдоконстант по каждой характеристике. Точное определение выглядит следующим образом [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система гиперболических уравнений

$$u_{xt}^i = F^i(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

называется системой Лиувиллевого типа, если существуют t -псевдоконстанты и x -псевдоконстанты $\omega^i, \tilde{\omega}^i$, $i = 1, \dots, n$, порядка соответственно s и p , удовлетворяющие условиям

$$\det\left(\frac{\partial \omega^i}{\partial u_s^j}\right) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial \tilde{u}_p^j}\right) \neq 0. \quad (6)$$

Для того чтобы получить полный набор псевдоконстант для заданной системы, можно использовать несколько различных способов. Первый подход состоит в том, чтобы решить характеристическое уравнение (3), зафиксировав предварительно порядок псевдоконстанты. Этот способ проблематичен по двум причинам. Первая из них заключается в том, что порядок псевдоконстанты заранее не известен. Вторая проблема состоит в том, что решение получающихся в этом случае дифференциальных уравнений может оказаться технически непростой задачей, особенно в случае $\text{ord}(\omega) > 2$.

Иногда полезным оказывается то наблюдение, что уравнения Лиувиллевого типа возникают как вырожденный случай уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. При этом плотности законов сохранения вторых являются одновременно псевдоконстантами для первых. Точнее, сохраняющиеся плотности с точностью до полных производных являются функциями псевдоконстант и их полных производных. Это означает, что можно использовать рекуррентные соотношения для законов сохранения, чтобы получить полные наборы псевдоконстант.

Еще один способ вычисления псевдоконстант опирается на тот хорошо известный факт (см., например, [2], [10]), что оператор полной производной в силу симметрии переводит псевдоконстанты в псевдоконстанты; следовательно, имея одну псевдоконстанту и невырожденную (определение см. ниже) симметрию, мы можем построить полный набор псевдоконстант. Этот факт приобретает прикладное значение именно в случае систем и, по-видимому, раньше для вычисления псевдоконстант не применялся. В качестве простого примера, иллюстрирующего эту идею, мы рассмотрим двухкомпонентную цепочку Тоды серии A:

$$u_{xt} = e^{2u-v}, \quad v_{xt} = e^{-u+2v}. \quad (7)$$

Легко найти, что система (7) допускает полиномиальную симметрию второго порядка

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx} - 2v_{xx} - 2u_x v_x - u_x^2 + 2v_x^2, \\ v_\tau &= -v_{xx} + 2u_{xx} + 2u_x v_x - 2u_x^2 + v_x^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Первая псевдоконстанта имеет вид

$$\rho = u_{xx} + v_{xx} - u_x^2 + u_x v_x - v_x^2.$$

Чтобы получить вторую независимую псевдоконстанту, положим $\phi = D_\tau \rho$, где D_τ — оператор эволюционного дифференцирования в силу системы (8). Легко видеть, что $\text{ord } \phi = 4$, и, кроме того, $\phi \in \text{Im } D$. Интегрируя ϕ по x , получим

$$\hat{\theta} = D^{-1}\phi = 3u_{xxx} - 3v_{xxx} - 6u_{xx}u_x - 3u_{xx}v_x + 3v_{xx}u_x + 6v_{xx}v_x + 6u_x^2v_x - 6v_x^2u_x.$$

Для упрощения полученной псевдоконстанты положим

$$\theta = -\frac{1}{6}\hat{\theta} + \frac{1}{2}\rho_x = v_{xxx} + u_{xx}v_x - 2v_{xx}v_x - u_x^2v_x + v_x^2u_x.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\rho_\tau = 3\rho_{xx} - 6\theta_x. \quad (9)$$

Кроме того, можно сравнительно легко получить эволюционную систему, связанную дифференциальной подстановкой (ρ, θ) с системой (8). Для этого мы действуем оператором D_τ на θ и записываем полученный результат в терминах $\rho, \theta, \rho_x, \theta_x, \dots$. Второе уравнение искомой системы будет иметь вид

$$\theta_\tau = 2\rho_{xxx} - 3\theta_{xx} + (\rho^2)_x. \quad (10)$$

Система (9), (10) является одной из форм записи уравнения Буссинеска. В заключение этого примера отметим, что высшие симметрии системы (7) могут быть представлены в форме (2). Теорема 3 настоящей статьи дает способ отыскания оператора M , опирающийся на гамильтонову формулировку соответствующей гиперболической системы.

Рассматриваемые в настоящей работе системы принадлежат к классу лагранжевых релятивистски-инвариантных двумерных систем следующего вида:

$$L = \frac{1}{2}(u_t u_x + \psi(v_t w_x + v_x w_t)) + f(u, v, w), \quad (11)$$

где $\psi = (vw + c)^{-1}$. Лагранжиану (11) соответствуют полевые уравнения

$$u_{tx} = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad v_{tx} - \psi w v_x v_t = \psi^{-1} \frac{\partial f}{\partial w}, \quad w_{tx} - \psi v w_t w_x = \psi^{-1} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (12)$$

В работе [11] показано, что существует только девять систем вида (12), допускающих высшие полиномиальные симметрии не выше пятого порядка, причем соответствующие функции f имеют вид

$$f = ave^{\sqrt{2}u} + bwe^{-\sqrt{2}u}, \quad (13a)$$

$$f = av^2e^{2u} + bw^2e^{-2u}, \quad (13б)$$

$$f = av^2e^{2u} + bwe^{-u}, \quad (13в)$$

$$f = ave^u + bwe^{-u}, \quad (13г)$$

$$f = \left(vw + \frac{c}{2}\right) [ae^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}], \quad (13д)$$

$$f = a \left(vw + \frac{c}{2}\right) e^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}, \quad (13е)$$

$$f = a \left(vw + \frac{c}{2}\right) e^{\sqrt{2}u} + be^{-2\sqrt{2}u}, \quad (13ж)$$

$$f = \left(v^2w + \frac{2}{3}vc\right) e^{\sqrt{2}u}, \quad (13з)$$

$$f = ve^{-\sqrt{2/3}u}, \quad (13и)$$

где a и b – произвольные постоянные.

В настоящей работе мы рассматриваем системы (12) с функциями (13а)–(13и) при условии $ab = 0$. Две основные цели, которые мы преследуем здесь, – это доказательство лиувиллевости рассматриваемых систем и построение эволюционных систем, связанных дифференциальными подстановками с симметриями гиперболических систем (13а)–(13ж). Для доказательства лиувиллевости мы используем идею вычисления псевдоконстант, приведенную выше. Как будет показано, все полученные эволюционные системы обладают по крайней мере одной локальной гамильтоновой структурой. Случай $ab \neq 0$ будет рассмотрен в отдельной публикации, где будет показано, что системы (13а)–(13ж) имеют нетривиальные представления Лакса и, следовательно, интегрируемы методом обратной задачи рассеяния.

2. СИСТЕМЫ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

Если положить $a = 0$ или $b = 0$ в системах (13а)–(13ж), то можно получить следующие четыре неэквивалентные системы:

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \sqrt{2}ave^{\sqrt{2}u}, & v_{xt} &= \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= a\psi^{-1}e^{\sqrt{2}u} + \psi vw_xw_t; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= 2av^2e^{2u}, & v_{xt} &= \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= 2av\psi^{-1}e^{2u} + \psi vw_xw_t; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= ave^u, & v_{xt} &= \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= a\psi^{-1}e^u + \psi vw_xw_t; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \sqrt{2}a \left(vw + \frac{c}{2}\right) e^{\sqrt{2}u}, \\ v_{xt} &= av\psi^{-1}e^{\sqrt{2}u} + \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= aw\psi^{-1}e^{\sqrt{2}u} + \psi vw_xw_t. \end{aligned} \quad (17)$$

Этот список не включает в себя треугольные системы, получающиеся из (13д)–(13ж) и состоящие из уравнения Лиувилля и вырождения системы Лунда–Редже. Функциям

(13з), (13и) соответствуют системы

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \sqrt{2} v \left(vw + \frac{2}{3} c \right) e^{\sqrt{2} u}, \\ v_{xt} &= v^2 e^{\sqrt{2} u} \psi^{-1} + v_t v_x w \psi, \\ w_{xt} &= 2 \left(vw + \frac{c}{3} \right) e^{\sqrt{2} u} \psi^{-1} + w_t w_x v \psi; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= -v \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-\sqrt{2/3} u}, \quad v_{xt} = v_t v_x \psi w, \\ w_{xt} &= e^{-\sqrt{2/3} u} \psi^{-1} + w_t w_x v \psi. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу инвариантности систем (14)–(19) относительно преобразования $x \leftrightarrow t$ достаточно знать набор, состоящий из трех t -псевдоконстант, удовлетворяющих первому из условий (6). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением фактов, связанных только с t -псевдоконстантами, подразумевая справедливость аналогичных утверждений для x -псевдоконстант. Отметим также, что все рассматриваемые системы соответствуют функции f вида

$$f = g(v, w) e^{ku},$$

и, следовательно, допускают по крайней мере одну псевдоконстанту вида [11], [12]

$$\rho = u_{xx} - k \psi v_x w_x - \frac{k}{2} u_x^2. \quad (20)$$

Этот результат можно обобщить для случая приводимого риманова пространства $\mathbb{V}_m$ с метрикой вида

$$ds^2 = du^1 du^1 + g_{ij}(u) du^i du^j, \quad i, j = 2, \dots, m, \quad (21)$$

где g_{ij} не зависит от u^1 , и пусть Γ_{jl}^i – связность, согласованная с неприводимой частью метрики (21). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Любая система вида*

$$u_{xt}^1 = k h e^{ku^1}, \quad u_{xt}^i + \Gamma_{jl}^i u_x^j u_t^l = g^{ij} \frac{\partial h}{\partial u^j} e^{ku^1}, \quad i, j, l = 2, \dots, m,$$

где $k = \text{const}$, $h = h(u^2, \dots, u^m)$ – произвольная функция, допускает псевдоконстанту

$$\rho = u_{xx}^1 - \frac{k}{2} ((u_x^1)^2 + g_{ij} u_x^i u_x^j),$$

а векторное поле

$$u_\tau^1 = (k u_x^1 + D) \rho, \quad u_\tau^s = k u_x^s \rho, \quad s = 2, \dots, m, \quad (22)$$

является высшей симметрией.

Справедливость теоремы можно проверить прямым вычислением. Отметим, что симметрия (22) приводится к треугольной системе

$$\rho_\tau = \rho_{xxx} + 3k\rho\rho_x, \quad u_\tau^i = u_x^i \rho, \quad i > 1, \quad (23)$$

дифференциальной подстановкой $(u^1, u^i) \rightarrow (\rho, u^i)$, $i > 1$. Этот пример показывает, что далеко не во всех случаях действие оператора D_τ на псевдоконстанты приводит к новым псевдоконстантам. Симметрии, обладающие таким свойством, мы называем вырожденными; точное определение сформулируем следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Высшая симметрия

$$u_\tau^i = \sigma^i(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots) \quad (24)$$

гиперболической системы (12) называется вырожденной, если она может быть приведена к блочно-треугольному виду

$$\begin{aligned} \omega_\tau^i &= \phi^i(\omega^1, \dots, \omega^k), & i &= 1, \dots, k, \\ \omega_\tau^j &= \phi^j(\omega^1, \dots, \omega^m), & j &= k+1, \dots, m, \end{aligned}$$

где ϕ^i, ϕ^j — дифференциальные функции, с помощью некоторой дифференциальной подстановки

$$\omega^i = \omega^i(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots), \quad i = 1, \dots, m.$$

Нужно признать, что приведенное определение не дает четкого алгоритма проверки того, является ли рассматриваемая симметрия вырожденной или нет. Поэтому интересно было бы отыскать сравнительно легко проверяемое условие, дающее ответ на этот вопрос. Следствием последнего определения и инвариантности $x \leftrightarrow t$ уравнения (12) является следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если система (12) допускает невырожденную высшую симметрию и одну псевдоконстанту, то она является системой Лувиллевого типа.

Приступим теперь к построению полных наборов псевдоконстант. Рассмотрим функцию вида

$$f = av^l e^{ku}, \quad (25)$$

где $a, k, l = \text{const}$, $k \neq 0$. Отметим, что функции вида (25) соответствуют системы (14)–(16), а также система (19).

ТЕОРЕМА 2. Любая система вида (12), где f имеет вид (25), допускает по крайней мере две псевдоконстанты ρ, θ , где ρ задается формулой (20), а θ имеет вид

$$\theta = D \ln v_x + \frac{l}{k} u_x - w_x v \psi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие псевдоконстанты ρ следует из теоремы 1. Заметим, что в рассматриваемом случае второе из уравнений (12) можно представить в виде

$$D_t \ln v_x = v_t w \psi.$$

Отсюда получаем

$$D \left(D_t \ln v_x + \frac{l}{k} u_t \right) = D \left(v_t w \psi + \frac{l}{k} u_t \right).$$

Используя закон сохранения $D(v_t w \psi + (l/k)u_t) = D_t(w_x v \psi)$, получим

$$D_t \left(D(\ln v_x) + \frac{l}{k} u_x - w_x v \psi \right) = 0.$$

Таким образом, для систем (14)–(16) и (19) доказано наличие по крайней мере двух псевдоконстант.

Для отыскания третьей псевдоконстанты ϕ удобно использовать следующий факт: все рассматриваемые системы допускают невырожденные симметрии. Подействовав оператором $D_\sigma \equiv D_\tau$ на функции ρ или θ , где σ – симметрия, мы можем получить третью псевдоконстанту. Например, система (14) допускает следующую симметрию второго порядка [12]:

$$\begin{aligned} u_\tau &= \sqrt{2} \psi v_x w_x, & v_\tau &= v_{xx} - 2v \psi v_x w_x + \sqrt{2} u_x v_x, \\ w_\tau &= -w_{xx} + 2w \psi v_x w_x + \sqrt{2} u_x w_x. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим $\hat{\phi} = D_\sigma \rho$, где ρ имеет вид (20), причем $k = \sqrt{2}$. Тогда нетрудно проверить, что $\hat{\phi} \in \text{Im } D$. Интегрируя $\hat{\phi}$ по x , получим

$$\phi = D^{-1} \hat{\phi} = 2\sqrt{2} \psi v_1 (w_2 - v_1 w_1 \psi w - \sqrt{2} u_1 w_1).$$

Это также дает нам первое уравнение системы, связанной дифференциальной подстановкой (ρ, θ, ϕ) с системой (26). Таким образом, полный набор псевдоконстант для системы (14) можно взять в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{6} (\sqrt{2} u_2 - u_1^2 - 2v_1 w_1 \psi), \\ \theta &= v_2 v_1^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 - \psi w_1 v, \\ \phi &= \psi v_1 (w_2 - v_1 w_1 \psi w - \sqrt{2} u_1 w_1). \end{aligned} \quad (27)$$

Так же просто получаются полные наборы псевдоконстант для систем (15), (16); их явный вид дают следующие формулы:

$$\begin{aligned}\rho &= u_2 - u_1^2 - 2v_1 w_1 \psi, \\ \theta &= v_2 v_1^{-1} + u_1 - v \psi w_1, \\ \phi &= -3\psi(2v_1^3 w_1 w^2 \psi^2 - 2\psi w w_2 v_1^2 + \psi v w_1 w_2 v_1 - 2\psi v v_1 w_1^2 u_1 - \\ &\quad - 2\psi v_1^2 w_1^2 - 2v_1 w_1 u_2 + 2v_2 u_1 w_1 - v_2 w_2 - 4w_2 u_1 v_1 + 4v_1 w_1 u_1^2 + \\ &\quad + 4w \psi v_1^2 w_1 u_1 + v_1 w_3); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\rho &= 2u_2 - u_1^2 - 2v_1 w_1 \psi, \\ \theta &= v_2 v_1^{-1} - w_1 v \psi + u_1, \\ \phi &= v_1 \psi(-w_3 - 2w^2 \psi^2 w_1 v_1^2 - v w \psi^2 v_1 w_1^2 + 2\psi w v_1 w_2 - 3\psi w v_1 w_1 u_1 + \\ &\quad + \frac{3}{2}\psi w_1^2 v_1 + w \psi v_2 w_1 + w_1 u_2 + 3u_1 w_2 - 2w_1 u_1^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Для системы (17) в силу теоремы 1 первую псевдоконстанту можно взять в виде

$$\rho = \sqrt{2} u_2 - u_1^2 - 2\psi v_1 w_1. \quad (30)$$

Рассмотрим функцию $\hat{\theta} = D_\sigma \rho$, где σ — одна из невырожденных высших симметрий системы (17). Пусть, например, σ — симметрия третьего порядка:

$$\begin{aligned}u_\tau &= -4u_x v_x w_x \psi + \sqrt{2}(w_x v_{xx} + v_x w_{xx})\psi - \sqrt{2} v_x w_x (v_x w + w_x v)\psi^2, \\ v_\tau &= v_{xxx} - 3w_x v_{xx} v \psi - \sqrt{2} v_x u_{xx} - 2v_x u_x^2 + 3\psi^2 v_x w_x^2 v^2 - v_x^2 w_x \psi, \\ w_\tau &= w_{xxx} - 3v_x w_{xx} w \psi - \sqrt{2} w_x u_{xx} - 2w_x u_x^2 + 3\psi^2 w^2 v_x^2 w_x - v_x w_x^2 \psi. \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что система (31) является также симметрией системы (13ж). Нетрудно проверить, что $\hat{\theta} \in \text{Im } D$. Полагая $\theta = D^{-1} \hat{\theta} / 3$, получим явный вид функции θ :

$$\theta = g_1 g_2 \psi, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}g_1 &= 2v_1 u_1 + \sqrt{2} v \psi v_1 w_1 - \sqrt{2} v_2, \\ g_2 &= 2w_1 u_1 + \sqrt{2} w \psi v_1 w_1 - \sqrt{2} w_2. \end{aligned} \quad (33)$$

Можно проверить, что функции g_1, g_2 удовлетворяют уравнениям

$$D_t \ln g_1 = v_t w \psi, \quad D_t \ln g_2 = w_t v \psi. \quad (34)$$

Используя закон сохранения системы (17)

$$D(v_t w \psi) = D_t(w_x v \psi),$$

нетрудно получить следствия:

$$D_t(-w_x v \psi + D \ln g_1) = 0, \quad D_t(-v_x w \psi + D \ln g_2) = 0.$$

Следовательно, в качестве третьей независимой псевдоконстанты можно взять любую из функций

$$\phi = \theta(-w_x v \psi + D \ln g_1), \quad \tilde{\phi} = \theta(-v_x w \psi + D \ln g_2). \quad (35)$$

Отметим, что $\phi, \tilde{\phi}$ связаны соотношением $\theta_x = \phi + \tilde{\phi}$.

Для системы (18) первая псевдоконстанта имеет вид

$$\rho = \sqrt{2} u_2 - u_1^2 - 2\psi v_1 w_1.$$

Пусть функция g_1 определяется формулой (33). Нетрудно проверить, что и в рассматриваемом случае g_1 удовлетворяет уравнению (34). Используя закон сохранения системы (18)

$$D_t \left(w_x v \psi - \frac{\sqrt{2}}{2} u_x \right) = D(v_t w \psi),$$

получим следствие

$$D_t \left(D(\ln g_1) - w_x v \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} u_x \right) = 0,$$

откуда

$$\theta = D(\ln g_1) - w_x v \psi + \frac{\sqrt{2}}{2} u_x.$$

Псевдоконстанту ϕ можно получить с помощью какой-либо невырожденной высшей симметрии системы (18). В данном случае $\min \text{ord}(\sigma) = 5$:

$$u_\tau = -4u_5 + \dots, \quad v_\tau = v_5 + \dots, \quad w_\tau = w_5 + \dots;$$

здесь мы не приводим полные выражения из-за их громоздкости. Положим

$$\phi = D_\sigma \rho + 4\rho_{xxxxx} + 20\rho\rho_{xxx}.$$

Тогда можно проверить, что ϕ имеет вид

$$\phi = -\frac{5}{\sqrt{2}} g_1 w_5 \psi + \phi_1,$$

где $\text{ord}(\phi_1) = 4$. Следовательно, набор (ρ, θ, ϕ) является полным. Функцию ϕ_1 мы не приводим из-за ее громоздкости.

Для системы (19) из теоремы 2 следует, что первые две псевдоконстанты имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{6} u_2 + u_1^2 + 2v_1 w_1 \psi, \\ \theta &= v_2 v_1^{-1} - \frac{\sqrt{6}}{2} u_1 - v w_1 \psi. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим функцию

$$\hat{\phi} = D_{\sigma}\rho + \frac{53}{2}\rho_{xxxx},$$

где σ – симметрия пятого порядка системы (19):

$$u_{\tau} = -\frac{53}{2}u_5 + \dots, \quad v_{\tau} = v_5 + \dots, \quad w_{\tau} = w_5 + \dots.$$

Можно проверить, что $\hat{\phi} \in \text{Im } D$. Тогда, полагая $\phi = D^{-1}\hat{\phi}$, получим

$$\phi = 5\psi v_1 w_5 + \phi_1,$$

причем $\text{ord}(\phi_1) = 4$. Следовательно, функции (ρ, θ, ϕ) представляют полный набор псевдоконстант. Функция ϕ_1 довольно громоздкая, и мы ее здесь не приводим.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ СИММЕТРИЙ СИСТЕМ ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА

Важной особенностью уравнений и систем лиувиллевского типа является их связь с преобразованиями типа Миуры. А именно, справедливо следующее (см. [2], [10], [13])

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для любой симметрии (24) системы (5), допускающей полный набор псевдоконстант, существует эволюционная система*

$$\omega_{\tau}^i = \Phi^i(\omega, \omega_x, \dots), \quad (37)$$

связанная с ней дифференциальной подстановкой $\omega^i = \omega^i(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots)$, $i = 1, \dots, n$, где D_{τ} – оператор эволюционного дифференцирования в силу симметрии, ω^i – псевдоконстанты.

Как уже было отмечено, операторы D_{τ} и D_t коммутируют, и, таким образом, оператор D_{τ} переводит псевдоконстанты системы (5) снова в псевдоконстанты. Понятно, что для гиперболической системы (5) число независимых псевдоконстант по каждой характеристике не может быть больше n , поэтому выражение, стоящее в левой части (37), всегда можно выразить через псевдоконстанты ω^i и полные производные от них.

Среди симметрий систем (14)–(17) нас будут интересовать только те, которые одновременно являются симметриями для полных систем (13а)–(13ж). Такой выбор обусловлен тем, что эти системы являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим гиперболическую систему (5), и пусть функции $\omega^i(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots)$ представляют полный набор ее псевдоконстант. Предположим, что высшие симметрии системы (5) представимы в виде (ср. с формулой (2))

$$u_{\tau}^i = M^{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots) f_j(\omega), \quad (38)$$

где M^{ij} — матричный линейный дифференциальный оператор. Действуя оператором D_τ на ω^i , будем иметь

$$\omega_\tau^i = \frac{\partial \omega^i}{\partial u_k^j} D^k M^{jl} f_l, \quad (39)$$

или, в матричной форме,

$$\omega_\tau = \omega' M f(\omega) = L f(\omega), \quad (40)$$

где штрих обозначает производную Фреше. В соответствии с утверждением 2 линейный оператор L всегда выражается через псевдоконстанты системы (5); таким образом, эволюционная система (39), записанная в переменных ω^i , и есть искомая система, связанная подстановкой $\omega = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots)$ с (38). Отметим, что для скалярного уравнения лиувиллевого типа представление любой симметрии в форме (38) всегда возможно. В случае систем такое представление можно найти, если системе соответствует завершающаяся нулем последовательность обобщенных инвариантов Лапласа [14]. Однако для систем, имеющих гамильтонову форму, существует более простой способ отыскания оператора M .

ТЕОРЕМА 3. Пусть система лиувиллевого типа (5) имеет гамильтонову форму

$$u_t^\alpha = J^{\alpha\beta} \frac{\delta H(u)}{\delta u^\beta}, \quad (41)$$

где J — гамильтонов оператор, H — соответствующий гамильтониан. Тогда следующая эволюционная система является симметрией системы (41) при произвольной функции $f = f(\omega, \omega_x, \dots)$:

$$u_\tau^\alpha = \sum_{\beta, \gamma} J^{\alpha\beta} [(\omega^\beta)_\gamma]' + \frac{\delta f}{\delta \omega^\gamma},$$

где “+” означает формальное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $D_t \omega^\alpha = 0$ вытекает соотношение

$$(\omega^\alpha)_\beta' J^{\beta\gamma} \frac{\delta H}{\delta u^\gamma} = 0. \quad (42)$$

Вычислим значение скобки Пуассона, порождаемой оператором J , для произвольной функции f :

$$\begin{aligned} \{H, f\} &= \int \frac{\delta H}{\delta u^\alpha} J^{\alpha\beta} \frac{\delta f}{\delta u^\beta} dx = \int \frac{\delta H}{\delta u^\alpha} \sum_{\beta, \gamma} J^{\alpha\beta} [(\omega^\beta)_\gamma]' + \frac{\delta f}{\delta \omega^\gamma} dx = \\ &= - \int \frac{\delta H}{\delta u^\alpha} [(\omega^\alpha)_\beta' J^{\gamma\beta}] + \frac{\delta f}{\delta \omega^\gamma} dx = - \int \frac{\delta f}{\delta \omega^\alpha} (\omega^\alpha)_\beta' J^{\gamma\beta} \frac{\delta H}{\delta u^\gamma} dx = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Отсюда следует, что эволюционная система

$$u_\tau^\alpha = J^{\alpha\beta} \frac{\delta f}{\delta u^\beta} = \sum_{\gamma, \beta} J^{\alpha\beta} [(\omega^\beta)_\gamma]' + \left(\frac{\delta f}{\delta \omega^\gamma} \right) \quad (44)$$

является симметрией для (41).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что под знаком последнего интеграла в формуле (43) можно сделать замену

$$\frac{\delta f}{\delta \omega^\alpha} \rightarrow f_\alpha(\omega, \omega_x, \dots),$$

где f_α – произвольные функции. Следовательно, эволюционная система

$$u_\tau^\alpha = \sum_{\beta, \gamma} J^{\alpha\beta} [(\omega^\beta)'_\gamma]^+ f_\gamma \quad (45)$$

также будет симметрией системы (41).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Система (45) имеет форму (38), так что оператор

$$M = J\omega'^+ \quad (46)$$

отображает псевдоконстанты в симметрии системы (41). Таким же свойством будет обладать любой оператор вида

$$\widehat{M} = MS,$$

где $S = S(\omega, \omega_x, \dots)$ – некоторая матрица. Однако в дальнейшем мы будем иметь дело только с операторами, имеющими форму (46). Далее, из закона преобразования гамильтонова оператора при преобразовании $\omega = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots)$ следует, что L представляет гамильтонов оператор для системы (39); действительно,

$$\tilde{J} = \omega' J \omega'^+ = \omega' M = L. \quad (47)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Особый интерес представляет случай, когда эволюционные системы (38), (39) являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. Пусть система (39) гамильтонова с оператором $\omega' M$ и имеет бесконечную последовательность канонических плотностей

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega} = \widehat{R}^+ \frac{\delta f_{i-1}}{\delta \omega},$$

где $\widehat{R}^+$ – градиентно-рекурсионный оператор, и пусть R – симметрично-рекурсионный оператор для соответствующей иерархии системы (38). Тогда мы можем записать

$$\omega' R M \frac{\delta f_{i-1}}{\delta \omega} = \omega' M \frac{\delta f_i}{\delta \omega} = \omega' M \widehat{R}^+ \frac{\delta f_{i-1}}{\delta \omega},$$

откуда следует, что

$$R = M \widehat{R}^+ M^{-1}. \quad (48)$$

ПРИМЕР. Система (7) имеет гамильтонову форму, причем

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} D^{-1}, \quad H = \frac{1}{3}(e^{2u-v} + e^{-u+2v}). \quad (49)$$

Подставляя в формулу (46) выражение для оператора J и $\omega = (\rho, \theta)$, получим явный вид оператора M :

$$M = \begin{pmatrix} 3u_x + 3D & 2u_x v_x - 2v_x^2 + 2v_{xx} - u_{xx} + u_x^2 - D^2 \\ 3v_x + 3D & 2u_x^2 - 2u_x v_x - v_x^2 + v_{xx} - 2u_{xx} - 3v_x D - 2D^2 \end{pmatrix}.$$

Систему (8) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u_\tau \\ v_\tau \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Далее, формула (47) дает

$$L = 3 \begin{pmatrix} 2D^3 + \rho D + D\rho & -D^4 - \rho D^2 + \alpha D - \rho_{xx} + 2\theta_x \\ D^4 + D^2 \rho + D\alpha + \rho_{xx} - 2\theta_x & \frac{-2D^5 - 2(D^3 \rho + \rho D^3) + 2\beta D + \beta_x}{3} \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = 3\theta - 2\rho_x, \quad \beta = 3\theta_x - \rho^2.$$

Поддействовав оператором L на $(0, -1)^T$, получим систему (9), (10). Эта система бигамильтонова (см., например, [15]), а первый гамильтонов оператор имеет вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к построению эволюционных систем, связанных дифференциальными подстановками (27)–(29), (30), (32), (35) с симметриями систем (13а)–(13ж).

1. Система (14). Полный набор псевдоконстант $(\omega^1, \omega^2, \omega^3) = (\rho, \theta, \phi)$ дан формулами (27). Как показано в работах [12], система (12) является гамильтоновой с оператором

$$J = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^\varphi D^{-1} e^{-\varphi} \psi^{-1} \\ 0 & \psi^{-1} e^{-\varphi} D^{-1} e^\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varphi = D^{-1}(\psi v_x w)$. Подставляя операторы J, ω^{+} в формулу (46), получим

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u_x + \frac{\sqrt{2}}{6}D & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\psi v_x w_x \\ \frac{1}{3}v_x & v & v_{xx} - v_x(2v\psi w_x - \sqrt{2}u_x - D) \\ \frac{1}{3}w_x & \frac{1}{\psi v_x}D - w & -w_{xx} + 2w\psi v_x w_x + \sqrt{2}u_x w_x \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Симметрии второго и третьего порядка системы (13а) имеют соответственно вид

$$\mathbf{u}_\tau = M(0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{u}_\tau = M\left(\frac{9}{2}\rho, \phi, \theta\right)^T. \quad (51)$$

Отметим, что первая система в (51) есть не что иное, как система (26). Оператор L имеет вид

$$L = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{6}D^3 + 2\rho D + \rho_x & -\frac{3}{2}D^2 + \theta D & 3\phi D + 2\phi_x \\ \frac{3}{2}D^2 + D\theta & \frac{9}{2}D & 3D^3 + 6D^2\theta + 3D\alpha \\ 3\phi D + \phi_x & 3D^3 - 6\theta D^2 + 3\alpha D & 6\beta D + 3\beta_x \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где

$$\alpha = 3\rho + \theta^2 - \theta_x, \quad \beta = 2\theta\phi - \phi_x.$$

Эволюционные системы

$$\omega_\tau = L(0, 0, 1)^T, \quad \omega_\tau = L\left(\frac{9}{2}\rho, \phi, \theta\right)^T \quad (53)$$

связаны дифференциальной подстановкой (27) с эволюционными системами (51). Явный вид систем (53) таков:

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \frac{2}{3}\phi_x, \\ \theta_\tau &= \theta_{xx} + (\theta^2)_x + 3\rho_x, \\ \phi_\tau &= -\phi_{xx} + 2(\theta\phi)_x; \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \left(\frac{1}{4}\rho_{xx} - \frac{1}{2}\phi_x + \frac{9}{4}\rho^2 + \theta\phi \right)_x, \\ \theta_\tau &= \left(\theta_{xx} + \frac{9}{4}\rho_x + \frac{3}{2}(\theta^2)_x + \frac{9}{2}\rho\theta + \theta^3 + \frac{3}{2}\phi \right)_x, \\ \phi_\tau &= \left(\phi_{xx} - 3\theta\phi_x + \frac{9}{2}\rho\phi + 3\phi\theta^2 \right)_x. \end{aligned} \quad (55)$$

Нетрудно найти, что системы (54), (55) имеют также следующий гамильтонов оператор первого порядка:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Операторы L_1 , L являются согласованными, поэтому $R = LL_1^{-1}$ — оператор рекурсии для систем (54), (55):

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}D^2 + 3\rho + \frac{3}{2}\rho_x D^{-1} & \phi + \frac{2}{3}\phi_x D^{-1} & \frac{1}{3}\theta - \frac{1}{2}D \\ \frac{9}{4}D + \frac{3}{2}D\theta D^{-1} & D^2 + 2D^2\theta D^{-1} + D\alpha D^{-1} & \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2}\phi + \frac{3}{2}\phi_x D^{-1} & 2D\beta D^{-1} - \beta_x D^{-1} & D^2 - 2\theta D + \alpha \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Подействовав оператором R на правые части систем (54), (55), мы получим две серии высших симметрий:

$$\sigma_{2k+2} = R^k \sigma_0, \quad \sigma_{2k+3} = R^k \sigma_1.$$

Очевидно, что системы (54), (55) имеют высшие симметрии всех порядков, причем σ_{2k+2} – симметрия четного порядка, а σ_{2k+3} – нечетного. Отметим еще, что все системы этих иерархий имеют вид законов сохранения.

2. Система (15). Оператор M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 2u_x + D & -1 & 6v_x\psi(w_x D + 2w_x\theta + \beta) \\ 2v_x & v & 3v_x(D^2 + 4\alpha D + \gamma) + v_{xx}(9D + 6\alpha) \\ 2w_x & \frac{1}{\psi v_x}D - w & 3(w_{xx} - 2u_x w_x)(D + 2\theta) - \frac{2}{v_x\psi}\phi + 6w\psi v_x\beta \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= u_x - v\psi w_x, & \beta &= w\psi v_x w_x - w_{xx} + 2u_x w_x, \\ \gamma &= 2(\theta_x + \theta^2 + \alpha^2 - \psi(v_x w_x + v\beta)). \end{aligned}$$

Симметрии третьего порядка систем (13б), (13в) имеют соответственно вид

$$\mathbf{u}_\tau = M \left(\frac{1}{4}\rho, 0, \frac{1}{6} \right)^T, \quad \mathbf{u}_\tau = \frac{1}{6} M (0, 0, 1)^T. \quad (59)$$

Оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} D^3 + 4\rho D + 2\rho_x & -3D^2 + 2\theta D & 8\phi D + 6\phi_x \\ 3D^2 + 2D\theta & D & 3D^4 + 12D^3\theta - D^2\zeta + D\xi \\ 8D\phi - 6\phi_x & -3D^4 + 12\theta D^3 + \zeta D^2 + \xi D & 9(\phi D^3 + D^3\phi) + \eta D + \frac{1}{2}\eta_x \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= 3(3\theta_x - \rho - 5\theta^2), & \xi &= 6\left(\frac{1}{2}\theta_{xx} - \frac{1}{2}\rho_x - (\theta^2)_x + \theta^3 + \rho\theta\right), \\ \eta &= -6\phi_{xx} - 36\phi_x\theta + 12\phi(\rho + 3\theta^2 + 3\theta_x). \end{aligned}$$

Набор псевдоконстант (28) задает дифференциальную подстановку систем (59) соответственно в системы

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \left(\frac{1}{4}\rho_{xx} + \frac{3}{4}\rho^2 + \phi \right)_x, \\ \theta_\tau &= \left(\theta_{xx} + \frac{3}{2}((\theta^2)_x + \theta\rho) + \theta^3 + \frac{3}{4}\rho_x \right)_x, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\phi_\tau = (\phi_{xx} + 3(\phi\theta_x - \theta\phi_x + \phi\theta^2 + \phi\rho))_x - \frac{3}{2}\phi_x\rho;$$

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \phi_x, \\ \theta_\tau &= (\theta_{xx} + 3\theta\theta_x + \theta\rho + \theta^3)_x, \\ \phi_\tau &= (\phi_{xx} + 3(\phi\theta_x - \theta\phi_x + \phi\theta^2) + \rho\phi)_x. \end{aligned} \quad (62)$$

3. Система (16). Оператор M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 2(u_x + D) & -1 & D\psi v_x w_x + \psi v_x(3\beta + 4u_x w_x) \\ 2v_x & v & D^2 v_x - 3v_x(v\psi w_x - u_x)(D + \theta) + v_x \rho \\ 2w_x & \frac{1}{\psi v_x} D - w & D\alpha - \frac{\phi}{v_x \psi} + \frac{1}{2}\psi v_x(w(4\beta + 6w_x u_x) - 3w_x^2) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

где

$$\alpha = w\psi v_x w_x, \quad \beta = \alpha - w_{xx}.$$

Система (13г) допускает следующую симметрию третьего порядка:

$$\mathbf{u}_\tau = M \left(-\frac{1}{8}\rho, 0, 1 \right)^\top. \quad (64)$$

Оператор L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 4D^3 + 4D\rho - 2\rho_x & -4D^2 + 2\theta D & 8\phi D + 6\phi_x \\ 4D^2 + 2D\theta & D & D^4 + 3D^3\theta - D^2\zeta + D\xi \\ 8D\phi - 6\phi_x & -D^4 + 3\theta D^3 + \zeta D^2 + \xi D & \phi D^3 + D^3\phi + 2\eta D + \eta_x \end{pmatrix}, \quad (65)$$

где

$$\zeta = 3\theta_x - \rho - 3\theta^2, \quad \xi = \frac{1}{2}\zeta_x - \frac{1}{2}\theta_{xx} + \theta^3 + \rho\theta, \quad \eta = \phi(\rho + 3\theta^2) - 3\phi_x\theta.$$

Набор псевдоконстант (29) задает дифференциальную подстановку системы (64) в систему

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \left(-\frac{1}{2}\rho_{xx} + 6\phi - \frac{3}{8}\rho^2 \right)_x, \\ \theta_\tau &= \left(\theta_{xx} + 3\theta\theta_x + \frac{3}{4}\theta\rho + \theta^3 \right)_x, \\ \phi_\tau &= (\phi_{xx} - 3\theta\phi_x + 3\phi\theta^2)_x + \frac{3}{4}\rho\phi_x. \end{aligned} \quad (66)$$

Кроме того, делая замену $u_i \rightarrow -u_i$, $v_i \rightarrow w_i$, $w_i \rightarrow v_i$ в (29), получим подстановку, которая связывает симметрию системы (13в) со следующей системой:

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= 6\phi_x, \\ \theta_\tau &= \left(\theta_{xx} + 3\theta\theta_x + \theta\rho + \theta^3 + \frac{1}{2}\rho_x \right)_x, \\ \phi_\tau &= (\phi_{xx} - 3\theta\phi_x + \rho\phi + 3\phi\theta^2)_x. \end{aligned} \quad (67)$$

4. Система (17). Оператор M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \sqrt{2} D + 2u_x, & M_{12} &= -2\psi(w_x g_1 + v_x g_2), \\
M_{13} &= 2\psi v_x g_2 D + 2\psi(v_x(g_2)_x - w_x(g_1)_x) + 2\psi^2(vw_x^2 g_1 - wv_x^2 g_2), \\
M_{21} &= 2v_x, & M_{22} &= -\sqrt{2} g_1 D - \sqrt{2} (g_1)_x - 2(u_x - \sqrt{2} \psi v w_x) g_1 - \sqrt{2} v \psi v_x g_2, \\
M_{23} &= \sqrt{2} (v \psi(w_x g_1 + v_x g_2) - (g_1)_x) D - \sqrt{2} (g_1)_{xx} + \sqrt{2} (3v w_x \psi - \sqrt{2} u_x) (g_1)_x + \\
&\quad + \sqrt{2} \psi v v_x (g_2)_x - \sqrt{2} (3\psi v^2 w_x - v_x - 2\sqrt{2} v u_x) \psi w_x g_1 - \sqrt{2} \psi^2 v w v_x^2 g_2, \\
M_{31} &= 2w_x, & M_{32} &= -\sqrt{2} g_2 D + 2w_{xxx} + 2\psi v_x (3\psi w^2 w_x v_x - w_x^2 - 3w_{xx} w) - \\
&\quad - 2w_x (2u_x^2 + \sqrt{2} u_{xx}), \\
M_{33} &= \sqrt{2} D^2 g_2 - \sqrt{2} (3w \psi v_x - \sqrt{2} u_x) D g_2 - \sqrt{2} w (w_x \psi (g_1)_x - w_x^2 \psi^2 v g_1) - \\
&\quad - \sqrt{2} g_2 (w_x - 3\psi w^2 v_x + 2\sqrt{2} w u_x) \psi v_x,
\end{aligned} \tag{69}$$

а функции g_1, g_2 определяются по формулам (33). Систему (31) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{1}{2} M(0, 1, 0)^T, \tag{70}$$

а симметрии третьего порядка систем (13д), (13е) соответственно как

$$\mathbf{u}_\tau = \frac{1}{2} M(\rho, 1, 0)^T, \quad \mathbf{u}_\tau = \frac{1}{2} M\left(-\frac{1}{2}\rho, 1, 0\right)^T. \tag{71}$$

Вид оператора L таков:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}, \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11} &= 2D^3 + 4\rho D + 2\rho_x, & L_{12} &= 8\theta D + 6\theta_x, & L_{13} &= -4D^2\theta + 10D\phi - 2\phi_x, \\
L_{21} &= 8\theta D + 2\theta_x, & L_{22} &= 2(\theta D^3 + D^3\theta) + 4\alpha D + 2\alpha_x, \\
L_{23} &= -2D^4\theta + 10D^3\phi - 2D^2(6\phi_x + \alpha) + D\gamma - \beta, \\
L_{31} &= 4\theta D^2 + 10\phi D + 2\phi_x, & L_{32} &= 2\theta D^4 + 10\phi D^3 + 2(6\phi_x + \alpha)D^2 + \gamma D + \beta, \\
L_{33} &= \left(4\phi_x - \frac{8\phi(\theta_x - \phi)}{\theta}\right) D^3 + D^3 \left(4\phi_x - \frac{8\phi(\theta_x - \phi)}{\theta}\right) + D\nu + \nu D, \\
\alpha &= 2\rho\theta - \frac{3\phi(\theta_x - \phi)}{\theta}, \\
\beta &= 2\phi_{xxx} + 8\rho_x\phi + 2\theta\rho_{xx} + 4\phi_x\rho - \frac{6((\theta_x - \phi)\phi_x)_x}{\theta} + \\
&\quad + 6(\theta_x - \phi) \frac{(2\theta_x\phi - (3/2)\phi^2)_x}{\theta^2} - \frac{12\theta_x\phi(\theta_x - \phi)^2}{\theta^3}, \\
\gamma &= 8\phi_{xx} + 6\theta\rho_x + 12\rho\phi + \frac{2\phi(8\theta_x - 7\phi)(\theta_x - \phi)}{\theta^2} - \frac{2(\theta_{xx}\phi + 8\phi_x\theta_x - 9\phi\phi_x)}{\theta}, \\
\nu &= \theta^2 - 2\phi_{xxx} + 2\rho_x\phi - \frac{4(2\rho\phi(\theta_x - \phi) - 3\phi_x(\theta_x - \phi)_x - \phi(\theta_x - \phi)_{xx})}{\theta} - \\
&\quad - \frac{4\phi(3\theta_{xx}\theta_x - 3\phi\phi_x + \phi_x\theta_x - \theta_{xx}\phi)}{\theta^2} + \frac{8\phi^2(2\theta_x - \phi)(\theta_x - \phi)}{\theta^3} + 4\phi_x\rho.
\end{aligned} \tag{73}$$

Полный набор псевдоконстант системы (17) задает дифференциальную подстановку систем (70), (71) в следующие системы, соответственно:

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= 3\theta_x, \\ \theta_\tau &= (\theta_{xx} - 3\phi\theta^{-1}(\theta_x - \phi) + 2\rho\theta)_x, \\ \phi_\tau &= (\phi_{xx} - 3\theta^{-2}(\theta_x - \phi)(\theta\phi_x - \phi\theta_x + \phi^2) + 2\phi\rho)_x + 2\rho_x\phi + \rho_{xx}\theta;\end{aligned}\tag{74}$$

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= \left(\rho_{xx} + \frac{3}{2}\rho^2 + 3\theta\right)_x, \\ \theta_\tau &= (\theta_{xx} - 3\phi\theta^{-1}(\theta_x - \phi) + 3\theta\rho)_x + 3\rho_x\theta, \\ \phi_\tau &= (\phi_{xx} - 3\theta^{-2}(\theta_x - \phi)(\theta\phi_x - \phi\theta_x + \phi^2) + 3\phi\rho)_x + 6\rho_x\phi + 3\rho_{xx}\theta;\end{aligned}\tag{75}$$

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= \left(-\frac{1}{2}\rho_{xx} - \frac{3}{4}\rho^2 + 3\theta\right)_x, \\ \theta_\tau &= (\theta_{xx} - 3\phi\theta^{-1}(\theta_x - \phi))_x + \frac{3}{2}\rho\theta_x, \\ \phi_\tau &= \left(\phi_{xx} - 3\theta^{-2}(\theta_x - \phi)(\phi_x\theta - \theta_x\phi + \phi^2) + \frac{3}{2}\phi\rho\right)_x.\end{aligned}\tag{76}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе доказано, что вырождения систем, найденных с помощью симметричного подхода в работе [11], являются системами лиувилевского типа. Также найдены новые эволюционные системы, связанные дифференциальными подстановками с симметриями исходных гиперболических систем. Интегрируемость полученных систем не вызывает сомнения; например, системы (54), (55) имеют рекурсионный оператор (57). Доказательство интегрируемости путем построения представлений Лакса или рекурсионных операторов для остальных систем мы надеемся выполнить в одной из следующих публикаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Как сообщил нам М. В. Павлов, эволюционная система (54) может быть связана с известной системой Яджимы–Оикавы [16]

$$i\psi_t + \psi_{xx} - 3\rho\psi = 0, \quad \rho_t = \frac{2}{3}\partial_x|\psi|^2\tag{77}$$

следующим образом. Введем замену

$$\psi = \sqrt{\phi} \exp\left(i \int \xi dx\right).$$

В новых переменных система (77) примет вид

$$\rho_t = \frac{2}{3}\phi_x, \quad \phi_t = -2\partial_x(\phi\xi), \quad \xi_t = \partial_x\left(\frac{1}{2}\frac{\phi_{xx}}{\phi} - \frac{1}{4}\frac{\phi_x^2}{\phi^2} - \xi^2 - 3\rho\right).\tag{78}$$

Делая подстановку $\xi = -\theta - (i/2)\partial_x \ln(\phi)$ в (78), получим

$$\rho_t = \frac{2}{3}\phi_x, \quad \theta_t = -i\theta_{xx} + (\theta^2)_x + 3\rho_x, \quad \phi_t = i\phi_{xx} + 2(\phi\theta)_x. \quad (79)$$

И, наконец, заменой $\partial_t \rightarrow i\partial_t$, $\partial_x \rightarrow i\partial_x$ система (79) приводится к виду (54).

Благодарности. Автор благодарен А. Г. Мешкову, М. В. Павлову и В. В. Соколову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *А. В. Жибер, А. Б. Шабат.* ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103–1107; *R. K. Dodd, R. K. Bullough.* Proc. Roy. Soc. London A. 1976. V. 351. P. 499–523.
- [2] *А. В. Жибер, В. В. Соколов.* УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [3] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [4] *I. M. Anderson, N. Kamran.* Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265–319; *M. Juras, I. M. Anderson.* Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351–375.
- [5] *E. Goursat.* Lecons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendants. T. I, II. Paris: Hermann, 1896, 1898.
- [6] *А. В. Жибер.* Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 33–54.
- [7] *А. В. Жибер, В. В. Соколов.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 20–26.
- [8] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт. Уфа: БФАН СССР, 1981.
- [9] *А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–22.
- [10] *В. В. Соколов.* УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 133–163.
- [11] *D. K. Demskoi, A. G. Meshkov.* New integrable string-like fields in 1 + 1 dimensions. In: Proc. Second Int. Conf. Quantum Field Theory and Gravity (July 28 – August 2, 1997, Tomsk, Russia). Eds. I. L. Bukhbinder, K. E. Osetrin. Tomsk: Tomsk Pedagogical University, 1998. P. 282–285.
- [12] *Д. К. Демской, А. Г. Мешков.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 401–415; *D. K. Demskoi, A. G. Meshkov.* Inverse Problems. 2003. V. 19. P. 563–571.
- [13] *С. Я. Старцев.* ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 336–348.
- [14] *А. В. Жибер, С. Я. Старцев.* Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 849–858.
- [15] *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [16] *N. Yajima, M. Oikawa.* Progr. Theor. Phys. 1976. V. 56. P. 1719–1739.

Поступила в редакцию 13.X.2003 г.,
после доработки 16.III.2004 г.