Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, Метод приближенного вычисления континуальных интегралов, использующий теорию возмущений со сходящимися рядами. I, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 51–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:23:13

В. В. Белокуров*, Ю. П. Соловьев*, Е. Т. Шавгулидзе*
**МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ
КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,
ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ТЕОРИЮ ВОЗМУЩЕНИЙ
СО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ. I**

Предложен метод вычисления континуальных интегралов, в рамках которого значение интеграла можно приблизить со сколь угодно высокой точностью суммой конечного числа членов некоторого абсолютно сходящегося ряда.

1. Одной из основных задач теории возмущений в квантовой теории поля [1] является приближенное вычисление изучаемых величин (задаваемых, например, в виде континуальных интегралов), которое сводится к вычислению конечного (и, как правило, небольшого) числа членов ряда по степеням константы связи. В различных квантово-полевых моделях расчеты, выполненные в нескольких первых порядках разложения по степеням константы связи, находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов.

Однако, как известно [2], степенные ряды, возникающие в квантовой теории поля, представляют собой асимптотические разложения в смысле Пуанкаре, которые справедливы только для достаточно малых значений константы связи $\hbar$, следовательно, только для них приближенные вычисления традиционной теории возмущений имеют смысл.

Асимптотические разложения соответствуют формальной теории возмущений, оперирующей расходящимися рядами [3]. Для получения таких рядов приходится формально менять местами операции континуального интегрирования и бесконечного суммирования. Эта процедура незаконна и является одной из причин, по которой асимптотические ряды оказываются расходящимися.

Простые переразложения ряда традиционной теории возмущений, например выбор в качестве нового параметра разложения какой-нибудь дробной степени константы связи, также не приводят к сходящимся рядам¹⁾.

¹⁾Здесь имеет место полная аналогия с теорией возмущений в небесной механике, где, как было показано Пуанкаре, расходящимися оказываются не только степенные ряды теории возмущений, но и ряды модифицированной теории возмущений, в которой разложение ведется по целым и полужелым степеням характерного параметра (см., например, [4]).

*Московский государственный университет

В рамках традиционного подхода невозможно провести вычисление с произвольной заданной точностью и, более того, из-за расходимости ряда традиционной теории возмущений невозможно, вообще говоря, даже установить точность сделанного приближения.

В настоящей работе мы предлагаем другой метод вычисления континуальных интегралов, в рамках которого значение интеграла можно приблизить со сколь угодно высокой точностью суммой конечного числа членов некоторого абсолютно сходящегося ряда.

Основная идея метода состоит в том, чтобы приблизить сколь угодно точно исходный континуальный интеграл некоторым другим (регуляризованным) континуальным интегралом, для которого справедливо представление в виде абсолютно сходящегося ряда. Такое приближение осуществляется с помощью некоторой специальной регуляризации подынтегрального выражения при сохранении формы самого континуального интеграла. В результате члены нового (сходящегося) ряда находятся с использованием приемов традиционной теории возмущений (теоремы Вика, диаграммная техника Фейнмана и т.д.).

При этом для любого конечного числа членов ряда можно выбрать такое значение параметра регуляризации, при котором эти члены нового (сходящегося) ряда практически совпадают с соответствующими членами ряда традиционной теории возмущений.

В настоящей статье мы сформулируем основные идеи метода и проиллюстрируем основные его элементы, включая необходимые доказательства, которые должны присутствовать и во всех других случаях, на модельных примерах интегралов в конечномерных пространствах **специально так, как если бы это были континуальные интегралы**. Применению метода к континуальным интегралам квантовой механики и квантовой теории поля будут посвящены следующие работы.

2. Рассмотрим нуль-мерный аналог континуального интеграла квантовой теории поля с потенциалом $V = g\varphi^4$ – однократный интеграл ($g > 0$)

$$I(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - gx^4} dx. \quad (1)$$

Если разложить подынтегральное выражение в ряд по степеням g и переставить порядок операций интегрирования и суммирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} x^{4n} dx \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{4n} dx, \quad (2)$$

то в результате получится асимптотический ряд (при $g \rightarrow 0$) [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n g^n, \quad F_n = \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{4n+1}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4n}} \frac{(4n)!}{(2n)!}. \quad (3)$$

Очевидно, что этот ряд расходится.

В то же время интеграл (1) при $g > 0$ сходится. Его явное выражение (см. [6, с. 353, формула (3.469); с. 351, формула (3.462)]) записывается через функцию Макдональда $K_{\frac{1}{4}}$ или функцию параболического цилиндра $D_{-\frac{1}{2}}$ и имеет вид

$$I(g) = \exp\left(\frac{1}{8g}\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8g}\right) \frac{1}{\sqrt{4g}} = \frac{\pi}{(2g)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{1}{8g}\right) D_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2g}}\right). \quad (4)$$

Причина, по которой появляется расходящийся ряд (3) для сходящегося интеграла (1), состоит в том, что процедура (2) незаконна. Действительно, условия, при которых возможна перестановка операций интегрирования и суммирования бесконечного числа слагаемых, дает следующая теорема (см., например, [7]).

ТЕОРЕМА. Пусть (a, b) – конечный или бесконечный интервал, $u_n(t)$ – последовательность действительных или комплексных функций, непрерывных в (a, b) и обладающих следующими свойствами:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ сходится равномерно на любом компактном интервале в (a, b) ,
- 2) конечна по крайней мере одна из величин (интегралы в смысле Лебега)

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(t)| \right) dt, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b |u_n(t)| dt.$$

Тогда

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt.$$

Легко заметить, что для преобразования (2) условия теоремы не выполняются.

3. Перейдем теперь к реализации намеченной в пункте 1 программы для интеграла (1).

Обозначим фурье-образ функции $\exp(-r^4)$ через

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho r} e^{-r^4} dr. \quad (5)$$

При больших значениях $|\rho|$ для функции $\tilde{\varphi}(\rho)$ справедливо неравенство [8]

$$|\tilde{\varphi}(\rho)| \leq C \exp\left(-\frac{1}{5}|\rho|^{1+\frac{1}{3}}\right). \quad (6)$$

Перепишем интеграл (1) следующим образом:

$$I(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) e^{ig^{\frac{1}{4}}\rho x} d\rho \right) dx. \quad (7)$$

С учетом оценки (6) получим

$$\left| e^{-x^2} \tilde{\varphi}(\rho) e^{ig^{\frac{1}{4}}\rho x} \right| \leq C \exp\left(-\frac{1}{5}|\rho|^{1+\frac{1}{3}} - x^2\right). \quad (8)$$

Отсюда следует, что кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \tilde{\varphi}(\rho) e^{ig^{\frac{1}{4}} \rho x} d\rho dx \quad (9)$$

сходится абсолютно в смысле Лебега. Поэтому для (7) справедливы условия теоремы Фубини [7], и можно поменять порядок интегрирования по ρ и x :

$$I(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ig^{\frac{1}{4}} \rho x} dx \right) d\rho. \quad (10)$$

Интеграл $I(g)$ можно представить как предел собственных по ρ интегралов:

$$I(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ig^{\frac{1}{4}} \rho x} dx \right) d\rho. \quad (11)$$

При этом интеграл

$$J(g, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ig^{\frac{1}{4}} \rho x} dx \right) d\rho \quad (12)$$

при достаточно больших R ($R \sim -\ln \varepsilon$) приближает интеграл (1) с точностью ε :

$$|J(g, R) - I(g)| \leq \varepsilon.$$

Мы покажем, что интеграл $J(g, R)$, т.е. регуляризованное значение интеграла (1) при конечном R , может быть разложен в абсолютно сходящийся ряд, который естественным образом разбивается на две части – ряд по целым (g^n) и ряд по полупелым ($g^{n+\frac{1}{2}}$) степеням константы связи g .

Разлагая в ряд функцию $\exp(ig^{\frac{1}{4}} \rho x)$, стоящую в интеграле (12), находим

$$J(g, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n g^{\frac{n}{4}} \rho^n x^n}{n!} \right) dx \right) d\rho. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае условия теоремы о перестановке операций суммирования и интегрирования выполняются. Поэтому

$$J(g, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n g^{\frac{n}{4}}}{n!} \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \rho^n d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^n dx. \quad (14)$$

Запишем формулу (14) в виде

$$J(g, R) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(g, R). \quad (15)$$

Тогда, как можно показать, для u_n справедливо неравенство

$$|u_n(g, R)| \leq C g^{\frac{n}{4}} \frac{R^{n+1}}{(n+1)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \quad (16)$$

Таким образом, ряд (15) сходится абсолютно.

Изучим более детально структуру членов этого ряда. Перепишем выражение (14) как

$$J(g, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} g^{\frac{2k}{4}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) A_{2k}(R), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A_n(R) &= i^n \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \rho^n d\rho = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \rho^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^4} e^{-i\rho r} dr \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dr^n} e^{-r^4} \frac{\sin Rr}{r} dr. \end{aligned} \quad (18)$$

Из формулы (18) видно, что $A_{2k+1}(R) = 0$.

Рассмотрим поведение коэффициентов $A_n(R)$ при больших R . Прежде всего заметим, что подстановка в (17) предельных значений

$$A_n(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} A_n(R)$$

дает расходящийся ряд (3). Действительно,

$$\begin{aligned} A_{4k}(\infty) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{4k}}{dr^{4k}} e^{-r^4} \delta(r) dr = \\ &= \frac{d^{4k}}{dr^{4k}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-r^4)^m}{m!} \right)_{r=0} = \frac{(-1)^k}{k!} (4k)!, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A_{4k+2}(\infty) = \frac{d^{4k+2}}{dr^{4k+2}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-r^4)^m}{m!} \right)_{r=0} = 0. \quad (20)$$

Другими словами, предельные значения $A_{4n}(\infty)$ и коэффициенты F_n асимптотического ряда (3) связаны соотношением

$$F_n = \frac{1}{(4n)!} \Gamma\left(\frac{4n+1}{2}\right) A_{4n}(\infty).$$

Выполняя дифференцирование экспоненты в подынтегральном выражении (18), получим

$$A_{4k}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k!} (4k)! + c_4 r^4 + \dots + c_{12k} r^{12k} \right] e^{-r^4} \frac{\sin Rr}{r} dr, \quad (21)$$

$$A_{4k+2}(R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [c_2 r^2 + \dots + c_{12k+6} r^{12k+6}] e^{-r^4} \frac{\sin Rr}{r} dr. \quad (22)$$

Для получения оценки при больших R повернем контур интегрирования в интеграле

$$B_n(R) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} r^n e^{-r^4} \frac{\sin Rr}{r} dr = 2 \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-r^4} e^{iRr} dr$$

на некоторый фиксированный угол θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{8}$). Это дает

$$B_n(R) = 2 \operatorname{Im} e^{in\theta} \int_0^{+\infty} r^{n-1} \exp(-e^{i4\theta} r^4) \exp(iRe^{i\theta} r) dr,$$

откуда следует, что

$$|B_n(R)| \leq 2 \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-R \sin \theta r} dr = \frac{2(n-1)!}{\sin^2 \theta R^n}.$$

Таким образом, при больших R

$$|A_{4k}(R) - A_{4k}(\infty)| \leq \frac{C(4k)}{R^4}, \quad |A_{4k+2}(R)| \leq \frac{C(4k+2)}{R^2}. \quad (23)$$

Результаты численных расчетов²⁾ показывают, что значения коэффициентов $A_{4n}(R)$ и $A_{4n+2}(R)$ с увеличением R осциллируют с затухающей амплитудой и при некоторых R , зависящих от номера n , практически выходят на свои предельные значения. При этом, чем выше n , тем больше значение R , при котором происходит выход на асимптотику.

Аналогичным образом можно вычислить интегралы вида

$$I(m, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - gx^{2m}} dx. \quad (24)$$

С этой целью определим функцию $\tilde{\varphi}(m, \rho)$, полагая

$$\tilde{\varphi}(m, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho r} e^{-r^{2m}} dr, \quad (25)$$

и повторим выкладки, задаваемые формулами (5)–(18) в случае $m = 2$. В результате получим

$$I(m, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} J(m, g, R), \quad (26)$$

$$J(m, g, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} g^{\frac{k}{m}} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) A_{2k}(m, R), \quad (27)$$

$$A_n(m, R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dr^n} \exp(-r^{2m}) \frac{\sin Rr}{r} dr. \quad (28)$$

В этом случае, как мы видим, параметром степенного разложения является $g^{\frac{1}{m}}$, и абсолютно сходящийся ряд теории возмущений для $J(m, g, R)$ разбивается на m сходящихся рядов, степени g в которых имеют вид $g^{\frac{1}{m}+n}$, $g^{\frac{2}{m}+n}$, $\dots$, $g^{\frac{m-1}{m}+n}$, g^{1+n} ($n = 0, 1, \dots$).

²⁾Мы благодарим Д.И.Казакова, В.В.Камчатного и С.О.Кривоноса за помощь в проведении численных расчетов.

4. Рассмотрим теперь, как выглядит предлагаемый метод построения теории возмущений для кратного интеграла

$$I(g) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-\|x\|^2 - gP(x)} dx. \quad (29)$$

Здесь $P(x)$ – однородный неотрицательный полином четвертой степени ($P(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^N$). Положим $Q(x) = P^{\frac{1}{4}}(x)$. Ясно, что $Q(x)$ – однородная функция первого порядка.

Тогда

$$e^{-gP(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\rho) e^{ig^{\frac{1}{4}}\rho Q(x)} d\rho dx, \quad (30)$$

где $\tilde{\varphi}(\rho)$ задается формулой (5).

Для интеграла (29) справедливы те же утверждения о возможности перестановки порядков интегрирования, что и для интеграла (1). Поэтому

$$I(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\|x\|^2} e^{ig^{\frac{1}{4}}\rho Q(x)} dx \right) d\rho. \quad (31)$$

В подынтегральном выражении интеграла

$$J(g, R) = \int_{-R}^{+R} \tilde{\varphi}(\rho) \left(\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\|x\|^2} e^{ig^{\frac{1}{4}}\rho Q(x)} dx \right) d\rho \quad (32)$$

разложим в ряд $\exp\left(ig^{\frac{1}{4}}\rho Q(x)\right)$ и поменяем порядки интегрирования и суммирования. В результате получим

$$J(g, R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{\frac{n}{4}} A_n(R) \int_{\mathbf{R}^N} Q^n(x) e^{-\|x\|^2} dx, \quad (33)$$

где $A_n(R)$ задается формулой (18).

Так же как и в случае однократного интеграла, ряд (33) разбивается на сумму двух сходящихся рядов:

$$J = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k)!} g^k A_{4k}(R) \int_{\mathbf{R}^N} P^k(x) e^{-\|x\|^2} dx, \quad (34)$$

$$J_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)!} g^k \sqrt{g} A_{4k+2}(R) \int_{\mathbf{R}^N} P^{k+\frac{1}{2}}(x) e^{-\|x\|^2} dx \quad (35)$$

(сходимость которых следует из того, что исходный ряд (33) сходится абсолютно).

Обобщение на полиномы степени $2m$ очевидно. В этом случае имеем

$$J(m, g, R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{\frac{n}{2m}} A_n(m, R) \int_{\mathbf{R}^N} Q^n(x) e^{-\|x\|^2} dx, \quad (36)$$

где $Q(x) = P^{\frac{1}{2m}}(x)$ и $A_n(m, R)$ задается формулой (28).

5. Проиллюстрированная в настоящей работе на примере конечномерных интегралов идея метода без изменения переносится на континуальные интегралы. Прежде всего мы приближаем исходный континуальный интеграл $I(g)$ некоторым другим континуальным интегралом $J(g, R)$, зависящим от вспомогательного параметра R . Точность такого приближения соответствующим выбором значения параметра R может быть сделана сколь угодно высокой (т.е. разность $|I(g) - J(g, R)|$ может быть сделана сколь угодно малой.)

Интеграл $J(g, R)$ разлагается в **абсолютно сходящийся** ряд. Теперь для того чтобы вычислить значение интеграла $I(g)$ с **любой** наперед заданной точностью при **любом** значении константы связи g , достаточно взять конечное (зависящее от g и R) число членов этого ряда.

При этом, поскольку регуляризация затронула только подынтегральное выражение в исходном континуальном интеграле, а форма самого континуального интеграла сохранилась без изменений, члены нового (сходящегося) ряда могут быть найдены с использованием вычислительных приемов традиционной теории возмущений (теоремы Вика, диаграммная техника Фейнмана и т.д.).

Кроме членов с целыми степенями константы связи g в новом ряде присутствуют также члены с дробными степенями g , например для взаимодействия типа φ^4 — с полуцелыми. Существенно, что вклад этих отсутствующих в стандартном подходе — так сказать, “теневых” — членов при конечных R , которые используются в реальных вычислениях, не мал и его учет приводит к значительному улучшению аппроксимационных свойств ряда.

Так, например, в рассмотренном модельном примере (1) для вычисления интеграла с точностью 0,01 при $g = 1$ достаточно положить $R = 3$ и взять сумму первых 5 членов ряда.

Предложенный в настоящей работе метод применялся для вычисления энергии основного состояния ангармонического осциллятора (с ангармоничностью gx^4) [9]. Показано, что учет членов с нецелыми степенями g приводит к тому, что сумма первых пяти членов ряда (до $g^{\frac{5}{2}}$ включительно) совпадает с процентной точностью с численным решением уравнения Шредингера в области $0 \leq g \leq 0,2$. Использование паде-аппроксимации³⁾ расширяет эту область до $g \leq 0,5$.

Авторы выражают глубокую благодарность Д. И. Казакову, В. А. Рубакову, А. А. Славнову, О. Г. Смолянову и Д. В. Ширкову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Список литературы

- [1] *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. 4 изд. М.: Наука, 1984.
- [2] Large-order behaviour of perturbation theory. Eds J.-C. le Guillou, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- [3] *D.I. Kazakov, D.V. Shirkov.* Fortschr. Phys. 1980. V. 28. P. 465.

³⁾ Тот факт, что ряд сходится абсолютно, позволяет пересуммировать его члены и, в частности, делает законной аппроксимацию Паде.

- [4] *В.В. Козлов*. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ГУ, 1995.
- [5] *R.B. Dingle*. Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. London–New York: Academic Press, 1973.
- [6] *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962; Р. 351 (формула (3.462)).
- [7] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин*. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
- [8] *О.Г. Смолянов, Е.Т. Шавгулидзе*. Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [9] *Д.И. Казаков, А.И. Онищенко*. (готовится к печати).

Поступила в редакцию 11.IX.1995 г.

V. V. Belokurov, Yu. P. Solov'ev, E. T. Shavgulidze

**METHOD OF APPROXIMATE CALCULATING PATH INTEGRALS BY
USING PERTURBATION THEORY WITH CONVERGENT SERIES. I**

We propose a method of calculating path integrals according to which the value of integral can be approximated with any given accuracy by the partial sum of a certain absolutely convergent series.