Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Слободенюк, Исследование сходимости разложения Швингера–де Витта для некоторых потенциалов, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 70–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 18:06:38

В. А. Слободенюк*

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДЕ ВИТТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Установлено, что разложение Швингера–де Витта является сходящимся для потенциала $V = q^2/2 + g/q^2$ при $g = \lambda(\lambda - 1)/2$ (λ – целое) и ряда трехмерных потенциалов с разделяющимися переменными и расходящимся для потенциалов $V = qe^{aq}$, $V = -ge^{-a^2q^2}$. Тем самым показано, что для последних двух потенциалов начальное условие для ядра оператора эволюции выполняется только в асимптотическом смысле. Обсуждается выделенная роль потенциалов, для которых разложение Швингера–де Витта сходится.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории имеются серьезные трудности из-за расходимости разложений по различным параметрам, например разложения по константе связи [1, 2], разложения Швингера–де Витта [3, 4], $1/n$ -разложения [5] и др. В разных подходах либо предлагается суммировать расходящиеся ряды специальными методами (см., например, [6]), либо строятся новые разложения, сходящиеся в некоторой области изменения параметров [7–9]. Однако имеет смысл исследовать задачу об эволюции квантовой системы на предмет выяснения причин возникновения расходимостей. Для этого может оказаться полезным изучение аналитических свойств ядра оператора эволюции с помощью разложения Швингера–де Витта, которое для большинства потенциалов является асимптотическим [10]. Асимптотический характер разложения связан с существенной особенностью в точке $t = 0$. И эта сингулярность ядра приводит к тому, что в теории изначально присутствуют расходимости, которые впоследствии проявляются в различных формах.

Для некоторых потенциалов разложение Швингера–де Витта сходится. В [11] представлен ряд таких потенциалов:

$$V(q) = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} \frac{1}{q^2}, \quad (1)$$

*Ульяновский филиал Московского государственного университета

$$V(q) = -\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 q}, \quad (2)$$

$$V(q) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 q}, \quad (3)$$

$$V(q) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \frac{1}{\sin^2 q}, \quad (4)$$

здесь везде λ – целое число.

В настоящей работе будут исследованы некоторые потенциалы на предмет сходимости разложения Швингера–де Витта.

Приведем основные соотношения, используемые в дальнейшем. Исследуется ядро оператора эволюции $\langle q', t \mid q, 0 \rangle$, которое является решением следующей задачи:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \langle q', t \mid q, 0 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \langle q', t \mid q, 0 \rangle - V(q') \langle q', t \mid q, 0 \rangle, \quad (5)$$

$$\langle q', t = 0 \mid q, 0 \rangle = \delta(q' - q). \quad (6)$$

Здесь и далее используются безразмерные переменные, определенные очевидным образом. Временная переменная t при исследовании аналитических свойств ядра будет трактоваться как комплексная.

Для ядра используется разложение Швингера–де Витта [3, 4, 11, 12]

$$\langle q', t \mid q, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} \exp \left\{ i \frac{(q' - q)^2}{2t} \right\} F(t; q', q), \quad (7)$$

где

$$F(t; q', q) = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n a_n(q', q). \quad (8)$$

Функция F является решением задачи

$$-i \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial q'^2} - \frac{q' - q}{it} \frac{\partial F}{\partial q'} - V(q') F, \quad (9)$$

$$F(t = 0; q', q) = 1. \quad (10)$$

Нашей целью будет исследование сходимости разложения (7), (8) для различных потенциалов.

2. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДЕ ВИТТА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА $V = q^2/2 + g/q^2$

При исследовании сходимости разложения (7), (8) для потенциала

$$V = q^2/2 + g/q^2, \quad (11)$$

используемого в одномерных моделях многих тел [13, 14], будем исходить из известного аналитического выражения для ядра [15, 16], которое получается при решении уравнения Шредингера (5) с помощью подстановки

$$\langle q', t | q, 0 \rangle = \frac{\sqrt{q'q}}{i \sin t} \exp \left\{ \frac{i}{2} (q'^2 + q^2) \operatorname{ctg} t \right\} y(t; q', q). \quad (12)$$

Функция y в действительности зависит только от комбинации переменных $z = q'q/\sin t$ и удовлетворяет уравнению

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - (1/4 + 2g)) = 0, \quad (13)$$

общее решение которого выражается через функции Бесселя порядка $a = \sqrt{1/4 + 2g}$. Представим g как $g = \lambda(\lambda - 1)/2$, тогда $a = \lambda - 1/2$.

Если искать решение уравнения (5) с начальным условием (6), то в качестве y надо брать функцию Ханкеля второго рода $H_{\lambda-1/2}^{(2)}(q'q/\sin t)$. Однако в этом случае ядро будет сингулярным при $q' \rightarrow 0$ (или $q \rightarrow 0$), поскольку $H_{\lambda-1/2}^{(2)}(z) \sim \beta z^{-\lambda+1/2}$ при $z \rightarrow 0$. Выберем решение (13), ограниченное при $z = 0$. Это функция Бесселя $J_{\lambda-1/2}(z)$. Тогда ядро можно представить в виде

$$\langle q', t | q, 0 \rangle = A e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda-1/2)} \frac{\sqrt{q'q}}{i \sin t} \exp \left\{ \frac{i}{2} (q'^2 + q^2) \operatorname{ctg} t \right\} J_{\lambda-1/2} \left(\frac{q'q}{\sin t} \right). \quad (14)$$

Учитывая асимптотику для $J_{\lambda-1/2}(z)$, найдем, что оно удовлетворяет начальному условию

$$\langle q', t = 0 | q, 0 \rangle = A \left(\delta(q' - q) + B \delta(q' + q) \right), \quad (15)$$

где для потенциала (14) $B = e^{-i\pi\lambda}$. Таким образом, в случае сингулярного потенциала начальное условие (6) может видоизменяться. Коэффициент A в (15) выбирается в зависимости от постановки задачи. Так, если рассматривается задача на полуоси $q \geq 0$, то надо положить $A = 1$. Если рассматривается задача двух тел и q — относительная координата, меняющаяся на всей прямой, то $A = 1/2$. Коэффициент B выбирается из условия выполнения граничного условия в точке $q = 0$.

Функция F вводилась соотношением (7) с учетом начального условия (6). Поскольку для рассматриваемого потенциала начальное условие имеет вид (15), то в соответствии с этим удобно представить ядро в форме

$$\begin{aligned} \langle q', t | q, 0 \rangle = A \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} \left\{ \exp \left\{ i \frac{(q' - q)^2}{2t} \right\} F_1(t; q', q) + \right. \\ \left. + e^{-i\pi\lambda} \exp \left\{ i \frac{(q' + q)^2}{2t} \right\} F_2(t; q', q) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

и исследовать аналитические свойства в окрестности точки $t = 0$ у двух независимых функций: F_1 и F_2 . Причем уравнение для F_1 будет точно совпадать с (9), а уравнение для F_2 будет отличаться от (9) только заменой $q' - q$ на $q' + q$ во втором слагаемом правой части. Начальное условие может быть выполнено в строгом смысле только тогда, когда функции F_i регулярны в точке $t = 0$ и $F_i(t = 0; q', q) = 1$.

Представив в (14) $J_{\lambda-1/2} = (H_{\lambda-1/2}^{(1)} + H_{\lambda-1/2}^{(2)})/2$, получим для F_i

$$\begin{aligned} F_{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}(t; q', q) = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(\pm\lambda-1/2)} \frac{\sqrt{2\pi i t q' q}}{i \sin t} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{2}(q'^2 + q^2) \operatorname{ctg} t - i \frac{(q' \mp q)^2}{2t} \right\} H_{\lambda-1/2}^{\left(\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \right)} \left(\frac{q' q}{\sin t} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь для F_1 берутся верхние знаки и числа в фигурных скобках, для F_2 – нижние. Зная асимптотическое поведение $H_{\lambda-1/2}^{(i)}(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$, легко понять, как ведут себя функции F_i при $t \rightarrow 0$. Как известно, функция $\sqrt{z} e^{\mp i z} H_{\lambda-1/2}^{\left(\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right)}(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ представляется асимптотическим разложением вида $\sum_{k=0}^{\infty} C_k / z^k$. При нецелых λ ряд является расходящимся, и это означает, что функции F_i в (17) при $t \rightarrow 0$ представляются расходящимися разложениями типа (8). Значит, точка $t = 0$ – существенно особая точка функций F_i , и начальное условие (15) в этом случае не может быть выполнено в строгом смысле.

При целых λ асимптотические разложения для функций Ханкеля обрываются на слагаемом с $k = \lambda$ ($C_k = 0$ при $k > \lambda$). Это приводит к тому, что функция

$$\sqrt{\frac{q' q}{\sin t}} \exp \left\{ \mp i \frac{q' q}{\sin t} \right\} H_{\lambda-1/2}^{\left(\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right)} \left(\frac{q' q}{\sin t} \right)$$

представляется полиномом порядка λ от переменной $\frac{\sin t}{q' q}$. Тогда функции F_i при $t \rightarrow 0$ будут представляться сходящимися рядами по степеням t . А это значит, что для функций F_i при целых λ точка $t = 0$ регулярная. Таким образом, разложение (15), (8) при

целых λ оказывается сходящимся, а при нецелых – расходящимся, причем в случае целых λ функции F_i при любых фиксированных q', q являются целыми функциями переменной t . По координатным переменным (при фиксированном $t \neq 0$) функции F_i имеют полюсы порядка $\lambda - 1$ в нуле, так как при $q \rightarrow 0$ и/или $q' \rightarrow 0$ $F_i \sim (q'q)^{-\lambda+1}$. Однако в линейной комбинации (16) полюсные члены в точности сокращаются, и ядро $\langle q', t | q, 0 \rangle$ убывает как $(q'q)^\lambda$ при $q \rightarrow 0$ и/или $q' \rightarrow 0$.

Отметим, что в задаче двух тел (q – относительная координата двух частиц, изменяющаяся в бесконечных пределах) возникает дополнительное ограничение на λ . Константа λ должна быть четной в случае статистики Бозе и нечетной в случае статистики Ферми. Действительно, если волновая функция ψ , описывающая относительное движение частиц, обладает свойством $\psi(-q, t) = \eta\psi(q, t)$, где $\eta = 1$ для бозонов, $\eta = -1$ для фермионов, и $\psi(q, 0) = \psi(q)$, то соотношение

$$\psi(q', t) = \int \langle q', t | q, 0 \rangle \psi(q) dq$$

будет непротиворечивым при $t \rightarrow 0$ (см. (15)), только если $\eta e^{-i\pi\lambda} = 1$.

Легко понять, что факт сходимости или расходимости рядов для F_i не зависит от того, какое именно начальное условие для ядра выбирается: (6) или (15). В любом случае ядро будет выражаться через функции Бесселя порядка $\lambda - 1/2$. Но любая из четырех стандартных цилиндрических функций обладает тем свойством, что при полуцелых порядках (и только при них) асимптотическое разложение Ханкеля становится конечным рядом. А это означает, что разложение Швингера – де Витта сходится при целых λ .

Подобное замечание, очевидно, справедливо и по отношению к сингулярным потенциалам (1), (3) и (4), рассмотренным в [11] (в [11] начальное условие взято в виде (6)). Если для этих потенциалов начальное условие берется в виде линейной комбинации $\delta(q' - q)$ и $\delta(q' + q)$, для которой выполняется граничное условие при $q = 0$, то по-прежнему функции F_i будут удовлетворять уравнению типа (9) (для F_2 надо заменить $q' - q$ на $q' + q$), и поэтому все утверждения о сходимости разложений для F_i останутся в силе.

3. ТРЕХМЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Простейший способ построить трехмерные потенциалы, для которых разложение типа (7), (8) сходится, зная одномерные потенциалы, обладающие этим свойством, состоит в следующем. Рассмотрим потенциал вида

$$V(\vec{q}) = V_1(q_1) + V_2(q_2) + V_3(q_3). \quad (18)$$

В качестве $V_j(q_j)$ здесь берутся какие-либо из потенциалов (1)–(4), (11) при целых λ . Тогда в уравнении для F переменные разделяются. Получающиеся одномерные уравнения с потенциалом V_j имеют решения в виде сходящихся разложений. Поэтому трехмерная функция F также будет иметь сходящееся разложение. Убедимся в этом.

Аналог уравнения (9) в трехмерном случае имеет вид

$$-i \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial q_j'^2} - \frac{q_j' - q_j}{it} \frac{\partial F}{\partial q_j'} - V(\vec{q}') F. \quad (19)$$

Его решение ищем в форме

$$F(t; \vec{q}', \vec{q}) = F_1(t; q_1', q_1) F_2(t; q_2', q_2) F_3(t; q_3', q_3). \quad (20)$$

Тогда получаем

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ -i \frac{1}{F_j} \frac{\partial F_j}{\partial t} - \frac{1}{2F_j} \frac{\partial^2 F_j}{\partial q_j'^2} + \frac{q_j' - q_j}{itF_j} \frac{\partial F_j}{\partial q_j'} + V_j(q_j') \right\} = 0. \quad (21)$$

Так как при каждом j выражение в фигурных скобках зависит только от независимых переменных q_j' , q_j , то уравнение (21) выполняется, только если это выражение равно некоторой константе C_j , причем должно быть $\sum_{j=1}^3 C_j = 0$. Включение постоянных C_j в уравнение приводит лишь к сдвигам начал отсчета для потенциалов V_j . Можно поэтому без ограничения общности положить для всех j постоянные $C_j = 0$. Тогда для каждой функции $F_j(q_j)$ получим уравнение, в точности совпадающее с (9).

Поскольку потенциалы V_j выбраны так, что решение уравнения (9) представляется сходящимся рядом (8), то с учетом (20) разложение для функции F также будет сходящимся.

4. РАСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА $V = ge^{aq}$

Оценим асимптотическое поведение коэффициентов $a_n(q', q)$ при $n \rightarrow \infty$ в разложении (7), (8) для потенциала

$$V = ge^{aq}, \quad (22)$$

используемого, в частности, в одномерных моделях многих тел (см., например, [17]). Постоянная a может иметь любой знак. Если представить

$$a_n(q', q) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta q^k b_{nk}(q), \quad (23)$$

где $\Delta q = q' - q$, то b_{nk} могут быть найдены из рекуррентного соотношения [11]

$$b_{nk}(q) = \frac{1}{n+k} \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} b_{n-1, k+2}(q) - \sum_{m=0}^k \frac{V^{(m)}(q)}{m!} b_{n-1, k-m}(q) \right] \quad (24)$$

с учетом того, что $b_{00} = 1$. Здесь и далее

$$V^{(m)}(q) \equiv \frac{d^m V(q)}{dq^m}. \quad (25)$$

Заметим, что для потенциала (22) $V^{(m)} = a^m V$, и рассмотрим коэффициенты b_{nk} при нескольких первых значениях n :

$$b_{1k} = -\frac{a^k V(q)}{(k+1)!}, \quad (26)$$

$$b_{2k} = -\frac{1}{2} \frac{k+1}{(k+3)!} a^{k+2} V + \frac{2^{k+1}-1}{(k+1)!} a^k V^2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} b_{3k} = & -\frac{1}{4} \frac{(k+1)(k+2)}{(k+5)!} a^{k+4} V + \left[\frac{(k+1)(k+2)(2^{k+3}-1)}{2(k+3)(k+3)!} + \right. \\ & + \frac{1}{2(k+3)} \sum_{m=0}^k \frac{k-m+1}{m!(k-m+3)!} \left. \right] a^{k+2} V^2 - \\ & - \frac{1}{k+3} \sum_{m=0}^k \frac{2^{k-m+1}-1}{m!(k-m+1)!} a^k V^3. \end{aligned} \quad (28)$$

Структура выражений (26)–(28) и всех последующих при бóльших n такова, что знаки коэффициентов при разных степенях V чередуются, но все вклады в коэффициент перед определенной степенью V имеют одинаковый знак (это определяется структурой соотношений (24) для потенциала (22)). Поскольку V^k при разных k имеют разную функциональную зависимость от q , то слагаемые с разными степенями V не могут компенсировать друг друга при произвольных q . Сокращений в коэффициентах перед V^k также не происходит, так как все вклады имеют одинаковый знак.

Как установлено в [10], при отсутствии сокращений коэффициенты a_n ведут себя при бóльших n как $n!$. Проведенный выше анализ показывает, что сокращений не происходит. Поэтому разложение (7), (8) для потенциала (22) является расходящимся. Это, в частности, означает, что начальное условие (10) для F выполняется только в асимптотическом смысле, т.е. $F(t \rightarrow +0; q', q) \rightarrow 1$ при стремлении вдоль действительной оси, но $F(t = 0; q', q) \neq 1$, так как точка $t = 0$ – существенно особая точка функции F , и F не имеет в этой точке никакого значения.

5. РАСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА $V = -ge^{-a^2 q^2}$

Рассмотрим потенциал гауссова типа

$$V = -ge^{-a^2 q^2} \quad (29)$$

на предмет сходимости разложения (7), (8). Производные от V выражаются через полиномы Эрмита H_k , и сам потенциал V имеет вид

$$V^{(k)}(q) = (-1)^k a^k H_k(aq) V(q). \quad (30)$$

Из соотношений (24) последовательно определяются коэффициенты b_{nk} :

$$b_{1k} = (-1)^{k+1} \frac{a^k}{(k+1)!} H_k(aq) V, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} b_{2k} = & (-1)^{k+1} \frac{a^{k+2}(k+1)}{2(k+3)!} H_{k+2}(aq) V - \\ & - (-1)^{k+1} \frac{a^k}{k+2} \sum_{m=0}^k \frac{H_m(aq) H_{k-m}(aq)}{m!(k-m+1)!} V^2 \end{aligned} \quad (32)$$

и т. д.

Из анализа рекуррентных соотношений (24) с учетом (30) можно установить, что b_{nk} имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} b_{nk} = & (-1)^k \sum_{j=1}^n (-1)^j \times \\ & \times \left\{ \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M \cdots \sum_{m_j=0}^M \left| \sum_{l=1}^j m_l = M \right. \kappa_{m_1 m_2 \dots m_j}^j H_{m_1} H_{m_2} \dots H_{m_j} \right\} V^j, \end{aligned} \quad (33)$$

где $M = k + 2(n - j)$, $\kappa_{m_1 m_2 \dots m_j}^j$ – положительные коэффициенты, зависящие, кроме явно указанных величин, от n , k и a . Полиномы Эрмита H_k в (33) можно представить как разложения по степеням q . Тогда получим представление вида

$$b_{nk} = \sum_j \beta_{lj} q^l V^j. \quad (34)$$

Оказывается, что при вычислении β_{lj} различные вклады при фиксированных l и j входят с одинаковыми знаками, т.е. сокращений не происходит. Чтобы убедиться в этом, надо проследить за знаками коэффициентов при переходе от (33) к (34). Для этого возьмем представление

$$H_k(aq) = \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j h_j q^{k-2j}, \quad (35)$$

где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$, $h_j > 0$ — известные коэффициенты, точный вид которых нас в данный момент не интересует. Тогда получим

$$\begin{aligned} H_{m_1} H_{m_2} \dots H_{m_j} &= \sum_{i_1=0}^{[m_1/2]} \dots \sum_{i_j=0}^{[m_j/2]} (-1)^{\sum_{l=1}^j i_l} h_{i_1} \dots h_{i_j} q^{\sum_{l=1}^j (m_l - 2i_l)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{[m_1/2]} \dots \sum_{i_j=0}^{[m_j/2]} (-1)^I h_{i_1} \dots h_{i_j} q^{k+2(n-j)-2I} = \sum_I (-1)^I \gamma_I q^{k+2(n-j-I)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $I = \sum_{l=1}^j i_l$, коэффициенты γ_I очевидным образом пересчитываются через k_i , причем $\gamma_I > 0$. Учитывая в формуле (33) представление (36), получим для b_{nk} выражение вида (34), где $l = k + 2(n - j - I)$, а знак коэффициентов β_{lj} определяется фактором $(-1)^{k+j+I}$. Как видно из (33), (36), все вклады в данный коэффициент β_{lj} имеют одинаковый знак, поэтому при его вычислении не происходит никаких сокращений.

Поскольку в (34) функции $q^l V^j = (-1)^j g^j q^l e^{-j a^2 q^2}$ при различных l и j являются независимыми, то и вклады с различными l и j не могут друг друга компенсировать. Таким образом, в коэффициентных функциях a_n для потенциала (29) не происходит сокращений. Значит [10], $a_n(q', q)$ при $n \rightarrow \infty$ растут как $n!$, т.е. разложение (7), (8) является асимптотическим. Начальное условие (6) для решения уравнения Шредингера (5) также выполняется только асимптотически.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В соответствии с оценками [10] разложение Швингера–де Витта для большинства потенциалов оказывается расходящимся. Однако для некоторых потенциалов (например, (1)–(4), как установлено в [11], и (11), (18), как установлено в настоящей работе) при определенных значениях константы связи оно сходится (из-за сокращений различных вкладов), причем функция F в (7) в этом случае является целой функцией t при любых фиксированных q', q . Это явление само по себе представляет определенный интерес, поскольку оно выделяет некоторый класс потенциалов, для которых не возникает проблем с расходимостью различных разложений (имеются в виду разложение Швингера–де Витта, квазиклассическое разложение и т.п.).

В [11] в связи с этим было выдвинуто предположение, что требование сходимости разложения Швингера–де Витта можно использовать как критерий отбора потенциалов для построения точной квантовой теории, причем в такой теории изначально будут отсутствовать асимптотические ряды и заряд может принимать только дискретные значения.

Разумеется, на это предположение следует смотреть только как на гипотезу, подлежащую дальнейшему исследованию. Эта гипотеза привлекательна потому, что в ее рамках квантовая теория не содержит изначально расходимостей в ядре и, кроме того, в

ней естественным образом возникает дискретность заряда. Как известно, в природе заряды, в частности электрический, дискретны, и теоретически эта дискретность никак не объясняется. В этой связи можно надеяться, что последующее обобщение предлагаемого подхода на квантовую теорию поля позволит построить такую модель электродинамики, в которой постоянная тонкой структуры α будет равна $1/137,035 \dots$.

Список литературы

- [1] *C. M. Bender, T. T. Wu.* Phys. Rev. D. 1971. V. 7. № 6. P. 1620.
- [2] *Л. Н. Лунатов.* ЖЭТФ. 1977. Т. 72. № 2. С. 411.
- [3] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [4] *B. S. de Witt.* Phys. Rep. 1975. V. 19. P. 297.
- [5] *В. С. Попов, А. В. Сергеев, А. В. Шеблыккин.* ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1453.
- [6] *D. I. Kazakov, D. V. Shirkov.* Fortschr. Phys. 1980. V. 28. P. 465.
- [7] *I. G. Halliday, P. Suranyi.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. № 6. P. 1529.
- [8] *А. Г. Ушверидзе.* ЯФ. 1983. Т. 38. № 3(9). С. 798.
- [9] *A. N. Sissakian, I. L. Solovtsov.* Z. Phys. C. 1992. V. 54. № 2. P. 263.
- [10] *В. А. Слободенюк.* ТМФ. 1995. Т. 105. № 2. С. 246 [hep-th/9412001].
- [11] *V. A. Slobodenyuk.* Preprint IHEP 95–70, Protvino, 1995 [hep-th/9506134].
- [12] *V. A. Slobodenyuk.* Z. Phys. C. 1993. V. 58. № 4. P. 575.
- [13] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2191.
- [14] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2197.
- [15] *D. C. Khandekar, S. V. Lawande.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. № 2. P. 384.
- [16] *J. Rezende.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. № 11. P. 3264.
- [17] *A. O. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 315.

Поступила в редакцию 30.XI.1995 г.

V. A. Slobodenyuk

STUDY OF THE CONVERGENCE OF THE SCHWINGER–DE WITT EXPANSION FOR CERTAIN POTENTIALS

It is established that Schwinger–de Witt expansion is convergent for the potential $V = q^2/2 + g/q^2$ (here $g = \lambda(\lambda - 1)/2$ and λ is integer number) and for a number of three-dimensional potentials with separated variables, but is divergent for the potentials $V = qe^{aq}$, $V = -ge^{-a^2q^2}$. Thereby it is shown that the initial condition for the evolution operator kernel for two latter potentials is fulfilled only in asymptotic sense. An outstanding role of the potentials for which Schwinger–de Witt expansion converges is discussed.