Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Динамика струны в $D = 4$ пространстве-времени. II. Квантовая теория, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 1, 80–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 03:52:10

С. В. Талалов*

ДИНАМИКА СТРУНЫ В $D = 4$ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ. II. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Предложена общая схема ковариантного квантования струнной теории, для которой ранее была проведена нестандартная гамильтонизация. Детально исследован частный случай, соответствующий бозонной струне. Найден реджевский спектр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье продолжено начатое в [1]¹⁾ исследование спиновой струны, которая описывается действием

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{h} \{ h^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - i \kappa e_L^j (\Gamma^0)_{AB} \bar{\Psi}^A \gamma_j \nabla^I \Psi^B \}. \quad (1)$$

В отличие от стандартного случая (см., например, [2]) здесь $\Psi_\pm^A$ — комплекснозначные компоненты спинорного поля Ψ , которое является майорановским (по индексу A) в пространстве Минковского $E_{1,3}$ и вейлевским в двумерном пространстве-времени с координатами (ξ^0, ξ^1) (индекс $\pm$). Было показано, что множество исходных струнных переменных $(X_\mu, \Psi_\pm; \kappa)$ отображается взаимно однозначно на подмножество фазового пространства $\mathfrak{R}'_1$ с координатами $(f(\xi); j_0(\xi), j_a(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}; m^2, s^2, \theta, q)$, задаваемое конечным числом связей первого рода. В терминах указанных координат были определены (вырожденные) скобки Пуассона и динамика всех наблюдаемых в теории. Важная особенность предлагаемой схемы — то, что алгебра скобок Пуассона фундаментальных гамильтоновых переменных не является алгеброй Гейзенберга–Вейля W_∞ , как обычно, а имеет более сложную структуру: $\mathcal{A}_{\text{кл}} = W'_\infty \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{P}$. Здесь $\mathcal{A}_1$ — центрально-расширенная алгебра токов, $\mathcal{P}$ — алгебра Пуанкаре, а алгебра W'_∞ диагональна. Исходя из общей концепции квантования динамических систем [3] мы построим представление алгебры $\mathcal{A}_{\text{кл}}$ операторами, действующими в корректно определенном пространстве

¹⁾Мы будем использовать в настоящей работе как обозначения, принятые в [1], не оговаривая это особо, так и необходимые формулы, ссылаясь на них так: (1.1) — формула (1) работы [1].

*Тольяттинский филиал Самарского государственного педагогического университета

квантовых состояний струны. Поскольку зависимость от размерной константы $\hbar$ является при этом принципиальной, нам необходимо восстановить в классических формулах все in-put-параметры, которые в классической теории там, где это возможно, не выписывались. Напомним, что кроме действия (1), содержащего размерную константу α' , для построения фундаментальных гамильтоновых переменных нам необходимо задать две безразмерные константы – комплексную z и вещественную j_0 . Величины z и j_0 параметризуют построенное семейство отображений

$$(X_\mu, \Psi_\pm; \kappa) \xrightarrow{z, j_0} \mathfrak{R}'_1.$$

Введем вместо константы j_0 константу R , которая имеет размерность длины и определяется формулой

$$j_0 = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{R^2}{\alpha' \hbar} \right). \quad (2)$$

Необходимые модификации определений следующие. Фундаментальные переменные $f(\xi)$ и $j_0(\xi)$ должны быть определены так, чтобы величины $|f(\xi)|^2$ и $j_0^2(\xi)$ имели размерность действия:

$$f(\xi) \longrightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} f(\xi), \quad j_0(\xi) \longrightarrow \frac{\sqrt{\alpha'}}{R} j_0(\xi).$$

Переменные $j_a(\xi)$ ($a = 1, 2, 3$) остаются безразмерными; однако в определении фундаментальной скобки (1.34) должна быть восстановлена соответствующая константа, так что

$$\{j_{a\hbar}(\xi), j_{b\hbar}(\eta)\} = -2 \frac{\alpha'}{R^2} (\delta_{ab} \delta'(\xi - \eta) + \varepsilon_{abc} j_{c\hbar}(\xi) \delta(\xi - \eta))$$

и размерность $[\dots]$ скобки $\{A, B\}$ есть $[A][B][\text{действие}]^{-1}$.

Корректный выбор квантовых переменных осложняется в данном подходе тем, что исходные струнные поля X_μ и $\Psi_\pm$ являются сложными функционалами фундаментальных переменных пространства $\mathfrak{R}'_1$ на поверхности связей. Поэтому для выполнения соответствия

$$\begin{aligned} X_\mu &\longleftrightarrow (\text{квантовые бозонные поля}), \\ \Psi_\pm &\longleftrightarrow (\text{квантовые фермионные поля}) \end{aligned}$$

необходима дополнительная информация о свойствах отображения $(X, \Psi) \rightarrow \mathfrak{R}'_1$. Докажем в этой связи вспомогательное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для того чтобы $\Psi_{\pm}^A(\xi) \equiv \text{const}$, необходимо и достаточно выполнение условий $j_0(\xi) \equiv \text{const}$; $j_a(\xi) \equiv 0$ ($a = 1, 2, 3$).

Схема доказательства такова. Пусть $\Psi_{\pm}^A(\xi) \equiv \text{const}$. Тогда согласно [1] существует матрица $T_0(\xi)$ решений вспомогательной линейной системы (1.15) такая, что

$$t_{21}(\xi) \equiv \tau_1, \quad t_{22}(\xi) \equiv \tau_2 \quad (\tau_i = \text{const}).$$

Отсюда однозначно имеем

$$T_0(\xi) = \begin{pmatrix} t_{11}(\xi) & t_{12}(\xi) \\ \tau_1 & \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a(\xi) \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} A,$$

где $A \in SL(2, C)$ – постоянная матрица. Записав, далее, разложение Ивасава для матрицы A и воспользовавшись определением фундаментальных переменных $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$, получаем доказываемое утверждение. Достаточность легко следует из явной формулы (1.19) восстановления спиноров $\Psi_{\pm}$.

Доказанное предложение делает разумным такой выбор квантования внутренних переменных теории: степени свободы $f(\xi)$ квантуются в терминах бозонных полей, а степени свободы $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$ ($a = 1, 2, 3$) – в терминах фермионных. При этом будем использовать метод бозонизации [4].

2. КВАНТОВАНИЕ БОЗОННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В данном разделе будет исследован частный случай рассматриваемой теории, отвечающий бозонной струне. Чтобы выполнить эту редукцию, наложим дополнительные связи 2-го рода

$$\frac{\sqrt{\alpha'}}{R} j_0(\xi) \equiv j_0 = \text{const}, \quad j_a(\xi) \equiv 0 \quad (a = 1, 2, 3); \quad q = 0, \quad \theta = 0.$$

Согласно общей схеме гамильтонова редукция требует введения скобки Дирака, переход к которой здесь тривиален и заключается в “отбрасывании” тех слагаемых в определении скобки Пуассона, которые отвечают замороженным степеням свободы. Величина $j_0 = (1/2\pi) \int j_0(\xi) d\xi$ является аннулятором исходной пуассоновой структуры и может принимать, вообще говоря, любые заранее заданные значения. В силу доказанного предложения 1 такая теория отвечает бозонной струне с постоянным спинорным полем $\Psi_{\pm}$ на мировом листе. Отметим, что случай $\Psi \rightarrow 0$ (т.е. аналог $D = 4$ струны Намбу–Гото) отвечает асимптотике $j_0 \rightarrow \infty$, поскольку $|\Psi_{\pm}^A| \propto (T_0)_{22} = \exp(-j_0)$. Как уже говорилось, вместо величины j_0 мы будем рассматривать размерную константу R . Что касается аннулятора $z = (1/2\pi) \int f(\xi) d\xi$, то здесь мы положим $z = 0$.

Введем (не зависящие от $\hbar$) бозонные операторы рождения и уничтожения b_n^+ , b_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), определенные в соответствующем пространстве Фока $\mathfrak{F}_b$ и такие, что $[b_n, b_n^+] = \delta_{mn}$. Определим операторнозначную функцию

$$F(\xi) = \sum_{n < 0} \sqrt{-n} b_n e^{in\xi} + \sum_{n > 0} \sqrt{n} b_n^+ e^{in\xi}.$$

Легко видеть, что

$$[F(\xi), F^+(\eta)] = i\delta'(\xi - \eta).$$

Обозначим символами $\mathfrak{G}_{\mu^2, S}$ пространства неприводимых представлений алгебры Пуанкаре, маркированные собственными значениями операторов Казимира $P^\mu P_\mu$ и $S^\mu S_\mu$ [5]. Зафиксируем некоторую последовательность положительных чисел $\{\mu_i^2, i = \overline{1, \infty}\}$.

Введем пространство

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{i, s} (\mathfrak{G}_b \otimes \mathfrak{G}_{\mu_i^2, s}).$$

Пусть A – произвольная динамическая переменная теории, в нашем случае $A = A[f(\xi); P_\mu, M_{\mu\nu}; j_0]$. Квантование Υ рассматриваемой классической модели – это отображение

$$A \rightarrow \Upsilon(A) \equiv [\sqrt{\hbar} F(\xi); \hbar P_\mu, \hbar M_{\mu\nu}; j_0].$$

Здесь P_μ и $M_{\mu\nu}$ – соответствующие (не зависящие от $\hbar$) операторы, действующие тождественно в пространстве $\mathfrak{G}_b$, а функция операторных аргументов $A[\dots]$ строится согласно следующим правилам упорядочения:

1) произведения $F(\xi)F^+(\xi)$ определены равенством

$$F(\xi)F^+(\xi) =: F(\xi)F^+(\xi) : + \Delta,$$

где Δ – некоторая конечная фиксированная константа. Произведения более чем двух функций определены аналогично;

2) все операторы P_μ стоят слева от операторов $M_{\mu\nu}$;

3) произведения $M_{\mu_1\nu_1}M_{\mu_2\nu_2}\dots$ упорядочены по правилу $\mu_i < \nu_i$; $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$.

Таким образом, все “наблюдаемые” теории – корректно определенные в пространстве $\mathfrak{G}$ операторы (при этом, конечно, оператор b_n понимается как $\bigoplus_{i, s} (b_n \otimes 1)$ и т.д.).

Для сделанной редукции в гамильтоновой формулировке теории остается единственная связь (1.25), которая здесь принимает вид

$$\begin{aligned} & -4(\alpha' P_\nu P^\nu)^2 \left\{ \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi \left(i \int_0^{2\pi} \bar{f}(\xi) \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2\pi \left| \int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 \int^\xi f(\zeta) d\zeta d\xi - 4\pi \left(\frac{R^2}{\alpha'} \right)^{3/2} e^{-6j_0} \right|^2 \right\} = S_\mu S^\mu \left(\int_0^{2\pi} |f(\xi)|^2 d\xi \right)^3, \end{aligned}$$

где $\int^\xi f(\xi) d\xi \equiv \mathcal{F}(\xi)$ – первообразная, такая что $\int_0^{2\pi} \mathcal{F}(\xi) d\xi = 0$. Согласно общей схеме Дирака данная связь после квантования приводит к уравнению на физические векторы состояния $|\psi_{\text{phys}}\rangle$. Исследуем подробно предельный случай $\alpha' \rightarrow 0$, $R = \text{const}$. В таком пределе $j_0 \rightarrow \infty$, так что все фермионные степени подавлены. Далее, перед тем как выполнить квантование по указанным выше правилам, полученную в пределе связь

необходимо записать в квадратичной по полям $F(\xi)$ и $F^+(\xi)$ форме. В итоге получаем такое уравнение на физические векторы состояния:

$$\left[2\pi \left(\frac{P_\mu P^\mu}{c^2} \right)^{2/3} + \mu_0^{4/3} (S_\nu S^\nu)^{1/3} \int_0^{2\pi} F(\xi) F^+(\xi) d\xi \right] |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0, \quad (3)$$

где P, S – соответствующие операторы и $\mu_0 = \hbar/2cR$.

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В определении пространства $\mathfrak{G}$ существует выбор последовательности $\{\mu_i^2\}$, такой что уравнение (3) имеет нетривиальные решения с конечной нормой.*

Будем искать частные решения уравнения (3) в виде

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = |\mu_\phi^2, s\rangle |\phi\rangle,$$

где $|\mu_\phi^2, s\rangle \in \mathfrak{G}_{\mu^2, s}$, $|\phi\rangle \in \mathfrak{G}_b$, причем, вообще говоря, $\mu^2 = \mu^2(|\phi\rangle)$. Подставив $|\psi_{\text{phys}}\rangle$ в такой форме в уравнение (3), находим

$$\left[(\mu)^{4/3} - (\mu_0)^{4/3} (s(s+1))^{1/3} \left(\Delta + \sum_n |n| b_n^+ b_n \right) \right] |\phi\rangle = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим (4) как спектральную задачу в (бозонном) пространстве Фока $\mathfrak{G}_b$. Соответствующий оператор является диагональным, так что в качестве собственных мы имеем векторы $|\phi_n\rangle = |l_1, \dots, l_n\rangle$ – произвольные “ n -частичные” векторы пространства $\mathfrak{G}_b$, а соответствующие собственные числа $\mu_{(n)}^2 \equiv \mu^2(l_1, \dots, l_n)$ таковы:

$$\mu_{(n)}^4 = \mu_0^4 s(s+1) \left(\Delta + \sum_{i=1}^n |l_i| \right)^3. \quad (5)$$

Таким образом, выбрав в качестве искомой последовательности $\{\mu_i^2\}$ занумерованное тем или иным способом спектральное подмножество $\{\mu_{(n)}^2\} \cap \mathbf{R}_+$, мы находим “физические” векторы состояния – решения уравнения (4) – в виде

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = \sum_{(n)} c_{(n)} |\mu_{(n)}^2, s\rangle |\phi_n\rangle,$$

где (n) – определенный выше мультииндекс и выполнено условие

$$\sum_{(n)} |c_{(n)}|^2 < \infty.$$

Обсудим кратко особенности спектра теории, задаваемого формулой (5).

Траектории Редже $s = s(\mu^2)$ линейны лишь асимптотически при $(\mu^2/s) \rightarrow \infty$. При этом наклон соответствующих асимптотик различен и определяется “внутренним” состоянием $|\phi_n\rangle$ струны, а интерсепт всегда фиксирован и равен -0.5 . Здесь интересно отметить, что подобное поведение траекторий Редже (т.е. пересечение их бесконечного числа в точке $l = -0.5$ плоскости углового момента) было давно обнаружено в некоторых моделях потенциального рассеяния и известно как явление Грибова–Померанчука. Обсуждение этого вопроса можно найти в книге [6].

Теория не содержит тахионов, поскольку по определению в пространство состояний модели включены пространства представления алгебры Пуанкаре, отвечающие только положительным собственным значениям μ^2 соответствующего оператора Казимира. Предложенными методами может быть построена более широкая теория, содержащая тахионную ветвь спектра: действительно, формула (5) инвариантна при замене $\mu^2 \rightarrow -\mu^2$, а алгебра Пуанкаре имеет, как известно, представления, отвечающие $\mu^2 < 0$. Далее, отметим, что при $\Delta < 0$ возможны состояния с $\mu^4 < 0$, которые могут быть исключены введением соответствующих правил отбора. По-видимому, они могут быть использованы для описания нестабильных частиц с массой $\mu_1 \propto \text{Re } \sqrt[4]{\mu^4}$ и шириной распада $\Gamma \propto \text{Im } \sqrt[4]{\mu^4}$.

Что же касается слабой нелинейности траекторий Редже, это отнюдь не противоречит экспериментальным фактам. Это показано, например, в модели [7], где рассмотрена струна с массами на концах.

3. КВАНТОВАНИЕ ФЕРМИОННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Как обсуждалось вначале, классические степени свободы $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$ взаимосвязаны со спинорными переменными исходного струнного действия (1). В настоящем разделе будет выполнено их квантование в терминах двумерного фермионного поля с использованием процедуры бозонизации. Введем для этого (не зависящие от $\hbar$) фермионные операторы рождения и уничтожения $a_{\alpha n}^+$ и $a_{\alpha n}$, определенные в соответствующем пространстве Фока $\mathcal{G}_f$ и удовлетворяющие каноническим антикоммутиационным соотношениям

$$[a_{\alpha n}, a_{\beta m}^+]_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn}, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad n, m = 0, \pm 1, \dots$$

Определим, далее, пару операторнозначных функций

$$\begin{aligned} \omega_1(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n}^+ e^{-in\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n}^+ e^{in\xi}, \\ \omega_2(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,-n}^+ e^{-in\xi} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,-n}^+ e^{in\xi}, \end{aligned}$$

По данным функциям и произвольной матрице $A \in SL(2, C)$ построим следующие операторные “токи”:

$$J(A; \xi) = \sum_{\alpha, \beta} : \omega_{\alpha}^+(\xi) A_{\alpha\beta} \omega_{\beta}(\xi) :,$$

где: $a(\xi)b(\xi) := \lim_{\eta \rightarrow \xi} [a(\eta)b(\xi) - \langle 0|a(\eta)b(\xi)|0 \rangle]$. Стандартным образом проверяются коммутаторы

$$[J(A; \xi), J(B; \eta)] = -i \operatorname{Tr} AB \delta'(\xi - \eta) - J([A, B]; \xi) \delta(\xi - \eta). \quad (6)$$

Квантование Υ фермионных степеней свободы рассматриваемой модели – это следующее отображение:

$$\begin{aligned} j_{a\hbar}(\xi) &\longrightarrow \Upsilon(j_{a\hbar}(\xi)) \equiv J(\sigma^a; \xi), \quad a = 1, 2, 3, \\ j_{0\hbar}(\xi) &\longrightarrow \Upsilon(j_{0\hbar}(\xi)) \equiv J(1; \xi), \end{aligned}$$

где

$$j_{0\hbar}(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{\hbar}}(j_0(\xi) - j_0),$$

а величины $j_{a\hbar}(\xi) = \mathfrak{F}_a^{-1}(\hbar; j_a(\xi))$, построение которых описано ниже, имеют такие скобки Пуассона:

$$\{j_{a\hbar}(\xi), j_{b\hbar}(\eta)\} = -\frac{2}{\hbar} \delta_{ab} \delta'(\xi - \eta) - \frac{2}{\hbar} \varepsilon_{abc} j_{c\hbar}(\xi) \delta(\xi - \eta). \quad (7)$$

При этом, очевидно, выполняется необходимое при квантовании условие

$$[\Upsilon(j_{a\hbar}(\xi)), \Upsilon(j_{b\hbar}(\eta))] = i\hbar \Upsilon(\{j_{a\hbar}(\xi), j_{b\hbar}(\eta)\}).$$

Правила упорядочения операторов $J(A; \xi)$ в теории следующие:

$$J(A_1; \xi_1) \dots J(A_n; \xi_n) =: \omega_{i_1}^+(\xi_1)(A_1)_{i_1 j_1} \omega_{j_1}(\xi_1) \dots \omega_{i_n}^+(\xi_n)(A_n)_{i_n j_n} \omega_{j_n}(\xi_n) : + \Theta,$$

где Θ – некоторая константа.

Докажем существование функций $j_{a\hbar}(\xi)$ с требуемыми свойствами. Рассмотрим для этого спектральную задачу

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\lambda; \xi)}{\partial \xi} + \frac{i\lambda}{2} \left(\sum j_a(\xi) \sigma_a \right) \mathcal{U}(\lambda; \xi) = 0. \quad (8)$$

Пусть $\mathcal{U}(\lambda; \xi, \xi_0)$ – матрица решений системы (8), фиксированная условием

$$\mathcal{U}(\lambda; \xi, \xi_0)|_{\xi=\xi_0} = 1,$$

а $M = M(\lambda, \xi_0)$ – матрица монодромии для выбранного базиса. Стандартным образом [8] определим квазиимпульс

$$p(\lambda) = \arccos \frac{1}{2} \operatorname{tr} M(\lambda),$$

а также точки основного (λ_i) и дополнительного (ζ_i) спектров согласно формулам

$$p(\lambda_i) = 0, \quad (M(\zeta_i))_{12} = 0.$$

Используя тот факт, что спектральная задача (8) может быть сведена калибровочным преобразованием к спектральной задаче модели, связанной с нелинейным уравнением Шредингера (НШ) [8], а также то, что скобка $\{j_a(\xi), j_b(\eta)\}$ есть вторая гамильтонова структура модели НШ [9], мы можем ввести канонические переменные, диагонализующие эту скобку. Как показывается в гамильтоновой теории нелинейных эволюционных уравнений, такими переменными являются величины

$$\zeta_i, \quad \rho_i \equiv \frac{p(\zeta_i)}{\zeta_i}.$$

Мы не будем здесь останавливаться на доказательстве этого; данный комплекс вопросов подробно освещен в литературе ([8], см. также [10]). Обратим внимание на следующее обстоятельство. Переменные ζ_i и ρ_i имеют сложную временную динамику, линеаризация которой в общем (бесконечнозонном) случае является, вообще говоря, проблемой. Однако здесь нам необходим лишь тот факт, что величины ζ_i и ρ_i однозначно определяют “потенциалы” $j_a(\xi)$:

$$j_a(\xi) = j_a[\xi; \zeta_1, \rho_1, \dots, \zeta_n, \rho_n, \dots]. \quad (9)$$

Определим переменные $j_{a\hbar}(\xi)$, сделав в (9) замену

$$\rho_i \longrightarrow e^{12j_0} \rho_i.$$

Поскольку скобки переменных ρ_i, ζ_j диагональны, равенство (7) будет выполнено.

При построении квантовой теории удобно считать независимыми (классическими) переменными функции $j_{a\hbar}(\xi)$, а не функции $j_a(\xi)$. Это позволяет – в классической теории – разрушить имеющуюся там связь $\mathcal{M}(j_a) = \epsilon 1$, где $\mathcal{M}$ – матрица монодромии системы (8) при $\lambda = 1$. Действительно, поскольку

$$j_a(\xi) = \mathfrak{F}(j_0, j_{a\hbar}),$$

данную связь можно представить в виде

$$p(1) - \pi n \equiv \Phi_1(n; j_0, j_{a\hbar}(\xi)) = 0. \quad (10)$$

Равенство (10), взятое при каком-либо целом n , мы будем рассматривать как уравнение на константу j_0 . Разрешив его, мы можем подставлять найденную зависимость $j_0 = j_0(j_{a\hbar})$ в любые функционалы теории. При этом мы не получим какого-либо противоречия со скобками Пуассона. Действительно, матрица монодромии $\mathcal{M}$ является слабым аннулятором: ее скобки с произвольной динамической переменной обращаются

в ноль при выполнении (10). Поэтому найденный как решение уравнения (10) функционал $j_0 = j_0[j_{a\hbar}(\xi)]$ также является слабым аннулятором.

Итак, в общем случае квантовые динамические переменные рассматриваемой струнной теории становятся операторами в пространстве

$$\mathfrak{G} = \bigoplus_{\mu^2, s} (\mathfrak{G}_b \otimes \mathfrak{G}_f \otimes \mathfrak{G}_{\mu_i^2, s}).$$

Физические векторы состояния удовлетворяют уравнению

$$\Phi_1 |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0, \quad (11)$$

где, напомним, $\Phi_2 = 0$ есть связь (1.25), и уравнению

$$\left(\int_0^{2\pi} J(1; \xi) d\xi \right) |\psi_{\text{phys}}\rangle = 0. \quad (12)$$

Равенство (11) становится, так же как и в случае $j_a(\xi) \equiv 0$, спектральным уравнением в пространстве квантовых состояний струны. Его решение, требующее, по-видимому, развития определенных пертурбативных методов, позволяет в принципе определить физически допустимые состояния и спектр теории в общем случае. Можно показать, что равенства (11) и (12) совместны.

Предложенная схема имеет следующее нетривиальное обобщение. Вместо заданных констант z и j_0 при построении отображения

$$(X_\mu, \Psi_\pm; \kappa) \xrightarrow{z, j_0} \mathfrak{R}'_1$$

допустимо использовать произвольные функции аннуляторов

$$z = z(P^\mu P_\mu, S^\nu S_\nu), \quad j_0 = j_0(P^\mu P_\mu, S^\nu S_\nu).$$

При этом различным функциям $z(\cdot, \cdot)$, $j_0(\cdot, \cdot)$ будут соответствовать различные подмногожества (поверхности связей) полного фазового пространства $\mathfrak{R}'_1$. В квантовом случае спектр теории также будет содержать указанный функциональный произвол.

В заключение автору приятно поблагодарить А. П. Зубарева, А. К. Погребкова и Л. О. Чехова за плодотворные обсуждения и В. П. Павлова за ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 96-01-00299.

Список литературы

- [1] *С.В. Талалов*. ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 218–232.
- [2] *Л. Бринк, М. Энно*. Принципы теории струн. М.: Мир, 1991.
- [3] *Ф.А. Березин*. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [4] *E. Witten*. Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455–472.
- [5] *О. Барут, Р. Рончка*. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980.
- [6] *П. Коллинз*. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980.
- [7] *В.М. Barbashov*. Classical dynamics of rotating string with massive ends: the Regge trajectories and quark masses: Препринт Е2-94-444. Дубна: ОИЯИ, 1994.
- [8] *Л.Д. Фаддеев, Л.А. Таштадзян*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [9] *П.П. Кулиш, А. Рейман*. Записки научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 123. С. 67–76.
- [10] *Г.П. Пронько*. Теория релятивистской струны. 1. Вспомогательная спектральная задача: Препринт ИФВЭ 85-27. Серпухов, 1985.

Поступила в редакцию 19.II.1996 г.

S. V. Talalov

STRING DYNAMICS IN $D = 4$ SPACE-TIME.

II. QUANTUM THEORY

The general scheme of covariant quantization of the string theory in a non-standard Hamiltonian formulation is proposed. A particular case of bosonic string is studied in detail. The Regge spectrum is found.