Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Погребков, Т. И. Гарагаш, Решение задачи Коши для уравнения Бойти–Леона–Пемпинелли, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 163–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 12:51:09

Т. И. Гарагаш*, А. К. Погребков†

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БОЙТИ–ЛЕОНА–ПЕМПИНЕЛЛИ

Рассмотрена задача Коши для $2 + 1$ -мерного нелинейного уравнения Бойти–Леона–Пемпинелли (БЛП) в рамках метода обратной задачи. Получены уравнения эволюции резольвенты, решений Йоста и данных рассеяния двумерного дифференциального оператора Клейна–Гордона с переменными коэффициентами, порождаемые рассматриваемой системой уравнений БЛП. Выявлены дополнительные условия на данные рассеяния, обеспечивающие устойчивость решений задачи Коши. Указаны рекуррентная процедура построения полиномиальных интегралов движения и производящая функция интегралов движения в терминах спектральных данных.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей предыдущей работе [1] (см. также её предварительную версию [2]) была рассмотрена задача рассеяния для двумерного дифференциального оператора Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

$$L = \partial_x \partial_y + a(x, y) \partial_y + b(x, y) + 1, \quad (1.1)$$

задающего вспомогательную линейную задачу для $(2 + 1)$ -мерного уравнения БЛП [3]

$$\begin{cases} a_{ty} = (a^2 - a_x)_{yx} + 2b_{xx}, \\ b_t = b_{xx} + 2\alpha_x + 2(ab)_x \end{cases} \quad (1.2)$$

на две вещественные функции $a(t, x, y)$ и $b(t, x, y)$. При этом мы полагали, что при всех t эти функции принадлежат пространству Шварца $\mathcal{S}$ по переменным x и y . Были получены решения Йоста и данные рассеяния вспомогательной линейной задачи уравнения БЛП, и установлена связь между ними. Была также сформулирована обратная задача рассеяния.

В настоящей работе мы рассмотрим применение спектральной задачи (1.1) к исследованию нелинейной динамики (1.2). Наше построение основано на резольвентном подходе. Общая схема этого метода исследования спектральных линейных задач изложена в [4–7].

* Центр нелинейных исследований, tamar@class.mi.ras.ru

† Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, pogreb@class.mi.ras.ru

В разделе 2 мы приводим основные определения и результаты работы [1], где резольвентный подход был применен к исследованию линейной задачи (1.1). В разделе 3 мы выводим эволюционные уравнения для резольвенты, функций Йоста и данных рассеяния. В разделе 4 получена производящая функция для интегралов движения.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА (1.1)

Рассмотрим множество обобщенных функций $A(p; \mathbf{q}) \in \mathcal{S}'$ медленного роста по переменным $p = \{p_1, p_2\} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\} \in \mathbb{C}^2$. (В дальнейшем мы будем выделять полужирным шрифтом переменные, принадлежащие комплексной плоскости $\mathbb{C}$.) Введем на множестве этих обобщенных функций следующие операции: **сопряжение** $A^*(p; \mathbf{q}) = A(-p; -\bar{\mathbf{q}})$ и **композицию** $(AB)(p; \mathbf{q}) = \int dl A(p - l; \mathbf{q} + l) B(l; \mathbf{q})$ таких A и B из $\mathcal{S}'$, для которых интеграл в правой части определен в смысле обобщенных функций. Обобщенная функция, заданная равенством $I(p; \mathbf{q}) = \delta(p) \equiv \delta(p_1)\delta(p_2)$, как легко видеть, является единицей относительно этой композиции: для любого A выполнено $IA = AI = A$.

Множество дифференциальных операторов A , заданных конечной суммой $A = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \partial_{x_1}^{n_1} \partial_{x_2}^{n_2}$ с коэффициентными функциями $a_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$, вкладывается в рассматриваемое множество обобщенных функций от p и $\mathbf{q}$ следующим образом:

$$A(p; \mathbf{q}) = \sum_{n_1, n_2} \tilde{a}_{n_1, n_2}(p) (i\mathbf{q}_1)^{n_1} (i\mathbf{q}_2)^{n_2},$$

где $\tilde{a}_{n_1, n_2}(p)$ суть фурье-образы коэффициентных функций $a_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$. Построенные таким образом величины мы будем называть образами дифференциальных операторов. При этом I оказывается образом обычной единицы.

Основные определения. Пусть $-L(p; \mathbf{q})$ — образ рассматриваемого оператора Лакса: $L = L_0 - v$, $v = i\alpha Q_2 + \beta$, где $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ — фурье-образы потенциалов $a(x, y)$ и $b(x, y)$ и $L_0 = Q_1 Q_2 - 1$ — образ оператора $-L$, соответствующий нулевым потенциалам α и β ; Q_1, Q_2 — образы операторов $i\partial_x$ и $i\partial_y$, а v — образ оставшейся части оператора L .

Резольвента M с ядром $M(p; \mathbf{q})$ определяется как обращение образа оператора L : $M = L^{-1}$, т.е.

$$LM = I, \quad ML = I. \quad (2.1)$$

Точнее, мы задаем резольвенту как решение одного из следующих интегральных уравнений:

$$M = M_0 + M_0 v M, \quad M = M_0 + M v M_0, \quad (2.2)$$

где $M_0 = L_0^{-1}$, или явно

$$M_0(p; \mathbf{q}) = \frac{\delta(p)}{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 - 1}.$$

Мы полагаем, что сингулярности M определяются лишь сингулярностями M_0 в интегральных уравнениях (2.2). Понятно, что данное условие есть некоторое условие малости v по сравнению с L_0 . Оно также означает отсутствие у оператора M дискретного спектра.

Ввиду вещественности потенциалов введенные выше величины удовлетворяют условиям

$$v^* = v, \quad L_0^* = L_0, \quad M_0^* = M_0, \quad L^* = L, \quad M^* = M, \quad (2.3)$$

где последнее равенство выполнено в силу сделанных выше предположений.

В силу (2.1) резольвента M имеет справа и слева сингулярные множители M_0 . Введем дополнительные функции, получаемые посредством транкирования, т.е. умножения на L_0 :

$$\nu = M L_0, \quad \omega = L_0 M, \quad \rho = L_0 M L_0 - L_0. \quad (2.4)$$

Как было показано в [1], исследование аналитических свойств резольвенты M требует введения специальных редуцированных значений этих величин:

$$|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) = \nu(p; \ell(\mathbf{q})), \quad \langle\omega|(p; \mathbf{q}) = \omega(p; \ell(p + \mathbf{q}) - p). \quad (2.5)$$

Здесь для любого $\mathbf{q}_2 \in \mathbb{C} \setminus 0$ мы ввели обозначение

$$\ell(\mathbf{q}) = (\mathbf{q}_2^{-1}, \mathbf{q}_2), \quad (2.6)$$

так что $\mathbf{q} = \ell(\mathbf{q})$ означает решение уравнения $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 - 1 = 0$. Образы Фурье функций $|\nu\rangle$ и $\langle\omega|$ по переменным p (после умножения на соответствующие экспоненты) суть решения Йоста оператора (1.1) и дуального ему. При этом единственный комплексный параметр $\mathbf{q}_2$, остающийся после редукции, играет роль спектрального параметра в стандартном подходе. В дальнейшем мы для простоты называем $|\nu\rangle$ и $\langle\omega|$ решениями Йоста. Они самосопряжены,

$$|\nu\rangle = [|\nu\rangle]^*, \quad \langle\omega| = [\langle\omega|]^*, \quad |\rho\rangle = [|\rho\rangle]^*, \quad (2.7)$$

и удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\langle\omega|Q_2|\nu\rangle = Q_2 \quad (2.8)$$

и полноты

$$|\nu\rangle Q_2^{-1} \langle\omega| = Q_2^{-1}. \quad (2.9)$$

Для любого $A \in \mathcal{S}'$ мы обозначили через $A^{(\mathbf{z})}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$, элемент $\mathcal{S}'$, полученный посредством сдвига $A^{(\mathbf{z})}(p; \mathbf{q}) = A(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + \mathbf{z})$. Тогда уравнения обратной задачи для решений Йоста имеют вид

$$\begin{aligned} |\nu\rangle &= I + \int \frac{d\mathbf{z} \wedge d\bar{\mathbf{z}}}{2i\mathbf{z}} [|\nu\rangle B]^{(\mathbf{z})} Q_2, \\ \langle\omega| &= I - Q_2 \int \frac{d\mathbf{z} \wedge d\bar{\mathbf{z}}}{2i\mathbf{z}} [\tilde{B}\langle\omega|]^{(\mathbf{z})}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где введены спектральные данные

$$B(p; \mathbf{q}) = B_1(p; \mathbf{q}) + B_2(p; \mathbf{q}), \quad \tilde{B}(p; \mathbf{q}) = B_1(p; \mathbf{q}) + \tilde{B}_2(p; \mathbf{q}). \quad (2.11)$$

Эти спектральные данные выражаются через “дважды редуцированные” значения транкированной резольвенты ρ (см. (2.4)) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_1(p; \mathbf{q}) &= \frac{\theta\left(\frac{4}{p_1 p_2} - 1\right)}{p_1 p_2 K(p)} \sum_{\sigma'=\pm} \sigma' \delta\left(\Im \mathbf{q}_2 + \frac{p_2}{2} \sigma' K(p)\right) \times \\
 &\quad \times \delta\left(\Re \mathbf{q}_2 + \frac{p_2}{2}\right) \rho\left(p; \ell\left(\frac{p_2}{2}(1 - i \sigma' K(p))\right) - p\right), \\
 B_2(p; \mathbf{q}) &= \frac{\theta\left(1 - \frac{4}{p_1 p_2}\right)}{2 p_1 p_2 K(p)} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\sigma'=\pm} \sigma' \delta\left(\Re \mathbf{q}_2 + \frac{p_2}{2}(1 + \sigma' K(p))\right) \times \\
 &\quad \times \delta(\Im \mathbf{q}_2 - \sigma 0) \rho\left(p; \ell\left(\frac{p_2}{2}(1 - \sigma' K(p)) + i \sigma 0\right) - p\right), \\
 \tilde{B}_2(p; \mathbf{q}) &= \frac{\theta\left(1 - \frac{4}{p_1 p_2}\right)}{2 p_1 p_2 K(p)} \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\sigma'=\pm} \sigma' \delta\left(\Re \mathbf{q}_2 + \frac{p_2}{2}(1 + \sigma' K(p))\right) \times \\
 &\quad \times \delta(\Im \mathbf{q}_2 - \sigma 0) \rho\left(p; \ell\left(\frac{p_2}{2}(1 + \sigma' K(p)) + i \sigma 0\right)\right), \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

где

$$K(p) = \sqrt{\left|1 - \frac{4}{p_1 p_2}\right|}. \tag{2.13}$$

Как показано в [1], B_1 описывает ненулевую $\bar{\partial}$ -производную решений $\tilde{Y}$ Оста в комплексной области, а B_2

$(\tilde{B}_2)$ – разрывы решений $\tilde{Y}$ Оста на вещественной оси. В [1] получены характеристические уравнения на эти спектральные данные, которые вместе с условиями сопряжения показывают, что все спектральные данные параметризуются одной комплекснозначной функцией.

Решения интегральных уравнений обратной задачи задают потенциалы α и β исходной прямой задачи по следующим формулам восстановления:

$$\begin{aligned}
 \alpha(p) &= - \int \frac{d\mathbf{q}_2 \wedge d\bar{\mathbf{q}}_2}{2\mathbf{q}_2} [|\nu\rangle B - \tilde{B}\langle\omega|](p; \mathbf{q}), \\
 \beta(p) &= \int \frac{d\mathbf{q}_2 \wedge d\bar{\mathbf{q}}_2}{2i\mathbf{q}_2} p_2 [|\nu\rangle B](p; \mathbf{q}).
 \end{aligned}$$

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ, ФУНКЦИЙ $\tilde{Y}$ ОСТА И ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

Для вывода эволюционных уравнений мы воспользуемся следующим тождеством. Пусть помимо L задан некоторый другой оператор $\tilde{L} = \tilde{L}_0 - \tilde{v}$ и соответственно его резольвента $\tilde{M} = \tilde{L}^{-1}$. Тогда в силу определения резольвенты мы имеем $\tilde{M} - M = -\tilde{M}(\tilde{L} - L)M$. Нам потребуется частный случай этого тождества, отвечающий выбору $\tilde{L}_0 = L_0$, т.е.

$$\tilde{M} = M + M(\tilde{v} - v)\tilde{M}. \tag{3.1}$$

В случае, когда потенциал v в (1.1) зависит от параметра, формула (3.1) позволяет выразить производную резольвенты по этому параметру. В частности, для производной резольвенты по времени получаем

$$M_t = M v_t M, \quad (3.2)$$

где в силу (1.2):

$$\begin{aligned} v_t(p; \mathbf{q}) = & -p_1^2 \beta(p) + 2ip_1 \int d^2 l \beta(p-l) \alpha(p) + i\mathbf{q}_2 p_1^2 \alpha - \\ & - \mathbf{q}_2 p_1 \int d^2 l \alpha(p-l) \alpha(l) - \mathbf{q}_2 p_1^2 \beta(p) p_2^{-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

p_2^{-1} в правой части мы понимаем как обобщенную функцию, например, в смысле главного значения или $(p_2 \pm i0)^{-1}$. Ниже мы показываем, что условие устойчивости динамики, задаваемой (3.3), требует наложения жестких условий на потенциалы α и β . При выполнении этих условий конкретная реализация обобщенной функции p_2^{-1} не существенна.

Подставляя (3.3) в (3.2) и опуская простые, но громоздкие выкладки, получаем

$$M_t = M \tilde{A} - A M, \quad (3.4)$$

где операторы A и $\tilde{A}$ равны

$$\begin{aligned} A(p; \mathbf{q}) = & -\delta(p) \mathbf{q}_1^2 + 2p_1 p_2^{-1} \beta(p), \\ \tilde{A}(p; \mathbf{q}) = & -\delta(p) \mathbf{q}_1^2 + 2p_1 p_2^{-1} (\beta(p) + ip_2 \alpha(p)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя определения (2.4), мы получаем из формулы (3.4) эволюционные уравнения для функций ν , ω и ρ :

$$\begin{aligned} \partial_t \nu = & \nu M_0 \tilde{A} L_0 - A \nu, \quad \partial_t \omega = \omega \tilde{A} - L_0 A M_0 \omega, \\ \partial_t \rho = & \rho M_0 \tilde{A} L_0 - L_0 A M_0 \rho + \tilde{A} L_0 - L_0 A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Однако непосредственной редукцией этих равенств невозможно получить динамические уравнения для решений Йоста. В этом можно убедиться, дифференцируя по времени коэффициенты разложения решения Йоста по положительным степеням комплексного параметра. Рекуррентные формулы для таких коэффициентов разложения были получены в работе [1]. Мы их приводим тут для наглядности:

$$\nu_0(p) = \delta(p), \quad \nu_1(p) = \frac{v(p; 0)}{p_2 + i0\varepsilon}, \quad (3.7a)$$

$$\nu_2(p) = \frac{\int dq v(p-q; q) \nu_1(q) + i\alpha(p)}{p_2 + i0\varepsilon} - p_1 \nu_1(p), \quad (3.7b)$$

$$\nu_{n+1}(p) = \frac{\int dq (v(p-q; q) \nu_n(q) + i\alpha(p-q) \nu_{n-1}(q)) - p_1 \nu_{n-1}(p)}{p_2 + i0\varepsilon} - p_1 \nu_n(p), \quad (3.8)$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \left(p_1 \lim_{\mathbf{q}_2 \rightarrow 0} \Im \mathbf{q}_2 [2\Re \mathbf{q}_2 + p_1 |\mathbf{q}_2|^2] \right). \quad (3.9)$$

Из этих формул видно, что уже ν_2 содержит произведение обобщенных функций $\frac{1}{p_2 + i0\varepsilon} p_2^{-1} \beta(p)$, и, какую бы конкретную реализацию обобщенной функции p_2^{-1} мы ни выбрали, всегда найдется направление подхода $\mathbf{q}_2$ к нулю, а следовательно, такое значение ε , при котором произведение $\frac{1}{p_2 + i0\varepsilon} p_2^{-1} \beta(p)$ не определено. Единственный способ избавиться от этой неопределенности – наложить условие

$$\beta(p_1, 0, t) = 0, \quad (3.10)$$

так что $p_2^{-1} \beta(p) \in \mathcal{S}$. Однако величина $\beta(p_1, 0, t)$ не является интегралом движения, и, следовательно, чтобы требование (3.10) выполнялось в динамике, необходимо и достаточно потребовать выполнения бесконечного набора условий

$$\lim_{p_2 \rightarrow 0} \partial_t^n \beta(p, t)|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.11)$$

Используя динамическое уравнение для потенциала (3.3), мы можем переписать (3.11) как бесконечную серию условий на начальные значения потенциалов $\beta(p)$ и $\alpha(p)$. Приведем несколько первых условий из этого ряда:

$$\begin{aligned} \beta|_{p_2=0} = 0, \quad & \left[\alpha(p) + \int d^2 \tilde{p} \alpha(p - \tilde{p}) \beta(\tilde{p}) \right]_{p_2=0} = 0, \\ & \left[p_1 \partial_{p_2} \beta(p) + \int d^2 \tilde{p} \left(\beta(p - \tilde{p}) \frac{\tilde{p}_1 \beta(\tilde{p})}{\tilde{p}_2} + i \alpha(p - \tilde{p}) \tilde{p}_1 \beta(\tilde{p}) \right) + \right. \\ & \left. + (\alpha^2)(p) + (\alpha^2 \beta)(p) - \frac{i p_1}{2} (\alpha \beta)(p) \right]_{p_2=0} = 0, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Итак, наложение условий (3.11) на класс потенциалов позволяет рассмотреть редукции (2.5) формул (3.6) и получить в силу (3.5) эволюционные уравнения для решений Йоста:

$$\begin{aligned} \partial_t |\nu\rangle(p, \mathbf{q}) &= -|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) \mathbf{q}_2^{-2} + |A|\nu\rangle(p; \mathbf{q}), \\ \partial_t \langle \omega | (p, \mathbf{q}) &= -(p_1 + \mathbf{q}_2^{-1})^2 \langle \omega | (p; \mathbf{q}) + \langle \omega | B | (p; \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Эволюционное уравнение для $|\nu\rangle$ является фурье-образом второго уравнения пары Лакса, предложенной в [3].

Из эволюционного уравнения для ρ (3.6) и определения данных рассеяния (2.12) мы, опустив простые выкладки, получаем уравнения для спектральных данных

$$\partial_t B = [B, Q_1^2] \quad (3.14)$$

и аналогично

$$\partial_t \tilde{B} = [\tilde{B}, Q_1^2]. \quad (3.15)$$

Выпишем теперь явно динамические уравнения для редуцированных значений ρ , входящих в определение B и $\tilde{B}$ (2.12):

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - i\sigma K(p)) \right) - p \right) = \\ = -i\sigma p_1^2 K(p) \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - i\sigma K(p)) \right) - p \right), \quad \frac{4}{p_1 p_2} > 1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - \sigma K(p)) \pm i0 \right) - p \right) = \\ = -\sigma p_1^2 K(p) \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - \sigma K(p)) \pm i0 \right) - p \right), \quad \frac{4}{p_1 p_2} < 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - \sigma K(p)) \pm i0 \right) \right) = \\ = \sigma p_1^2 K(p) \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - \sigma K(p)) \pm i0 \right) \right), \quad \frac{4}{p_1 p_2} < 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из этих формул видно, что эволюция части данных рассеяния, а именно $\rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - K(p)) \pm i0 \right) - p; t \right)$ и $\rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 + K(p)) \pm i0 \right); t \right)$, неустойчива в окрестности точек $p_2 = 0$ и $p_1 \rightarrow \pm\infty$. Неустойчивость в окрестности точки $p_2 = 0$ устраняется теми же условиями на потенциалы (3.12), что и в случае решений Йоста. Действительно, для того чтобы эволюция не выводила данные рассеяния из класса начальных данных в окрестности точки $p_2 = 0$, достаточно потребовать выполнения равенств

$$\rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - K(p)) \pm i0 \right) - p; t \right)_{p_2=0} = 0$$

и

$$\rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 + K(p)) \pm i0 \right); t \right)_{p_2=0} = 0.$$

А поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{p_2 \rightarrow 0} \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 - K(p)) \pm i0 \right) - p; t \right) = \\ = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 + K(p)) \pm i0 \right); t \right) = \beta(p_1, 0; t), \end{aligned}$$

то условия устойчивости динамики данных рассеяния в окрестности точки $p_2 = 0$ совпадают с условиями (3.11). С другой стороны, устойчивость динамики данных рассеяния в окрестности точки $p_2 = 0$ означает, что данные рассеяния убывают быстрее любой степени $\sqrt{|p_2|}$ при $p_2 \rightarrow 0$. Такая формулировка условий устойчивости в окрестности точки $p_2 = 0$ позволяет сформулировать их в терминах коэффициентов разложения решений Йоста по степеням спектрального параметра. Для этого используем равенство

$$\rho \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 + K(p)) \pm i0 \right) \right) = (v|\nu) \left(p; \ell \left(\frac{p_2}{2} (1 + K(p)) \pm i0 \right) \right). \quad (3.19)$$

Это представление позволяет разложить данные рассеяния в ряд по неотрицательным степеням $\sqrt{|p_2|}$ в окрестности точки $p_2 = 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho\left(p; \ell\left(\frac{p_2}{2}(1 + K(p)) \pm i0\right)\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int d^2 q v(p - q; q) \nu_n^{\pm}(q) \times \\ &\times \left(\frac{p_2}{2}(1 + K(p))\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} i \int d^2 q \alpha(p - q) \nu_{n-1}^{\pm}(q) \left(\frac{p_2}{2}(1 + K(p))\right)^n, \end{aligned}$$

где, в свою очередь, $K(p)$ разлагается по положительным степеням $\sqrt{|p_2|}$, а произведения $\int d^2 q v(p - q; q) \nu_n^{\pm}(q)$ и $\int d^2 q \alpha(p - q) \nu_{n-1}^{\pm}(q)$ являются функциями из пространства Шварца и разлагаются в ряд Тейлора по неотрицательным степеням p_2 . Объединяя все эти разложения, получаем разложение данных рассеяния по неотрицательным степеням $\sqrt{|p_2|}$. Равенство нулю всех коэффициентных функций получившегося разложения эквивалентно (3.11) и сохраняется в динамике.

Для устранения неустойчивости в окрестности точки $p_1 \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы указанные данные рассеяния убывали при $p_1 \rightarrow \infty$ быстрее чем $e^{-a|p_1|^2}$ для любого $a > 0$.

Класс таких функций можно описать как обратное преобразование Лапласа аналитических функций. Остановимся на этом подробнее. Пусть

$$f_{\pm}(s) = \rho\left(p; \ell\left(\frac{p_2}{2}(1 - \sigma K(p)) + i0\right) - p\right)_{p_1 = \pm\sqrt{s}}.$$

Рассмотрим преобразование Лапласа

$$F_{\pm}(l) = \int_0^{\infty} f_{\pm}(s) e^{-sl} ds.$$

Из того, что оригиналы $f_{\pm}(s)$ убывают быстрее экспоненты от $-\lambda|p_1|^2$, где λ – произвольное число больше 0, следует, что изображения $F_{\pm}(l)$ существуют при любом действительном значении l и аналитически продолжимы в комплексную плоскость. С другой стороны, аналитичность $F_{\pm}(l)$ является достаточным условием существования обратного преобразования Лапласа. Таким образом, для выбора удовлетворяющих нас начальных значений данных рассеяния достаточно взять функции $F_{\pm}(l, p_2)$ из пространства Шварца по p_2 , убывающие быстрее любой степени p_2 при $p_2 \rightarrow 0$, являющиеся аналитическими функциями от первой переменной и такие, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F_{+}(s) s^n ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{a-iR}^{a+iR} F_{-}(s) s^n ds, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

где a – произвольное действительное число. Тогда функция $f(p) = f_{+}(|p_1|^{1/2}, p_2)\theta(p_1) + f_{-}(|p_1|^{1/2}, p_2)\theta(-p_1)$, составленная из обратных преобразований Лапласа функций $F_{\pm}(l, p_2)$, относится к интересующему нас классу функций. Равенство моментов F_{+} и F_{-} (3.20) обеспечивает бесконечную дифференцируемость $f(p)$ по p_1 в окрестности точки $p_1 = 0$.

Итак, мы рассмотрели динамику данных рассеяния, порождающую эволюционные уравнения (1.2). Решения этой системы устойчивы только при специальном выборе класса начальных данных. Ничего не меняет в этой ситуации и замена $t \rightarrow it$. Однако со спектральной задачей, рассмотренной в работе [1], можно связать и устойчивые динамики. Такими являются эволюции данных рассеяния, задаваемые нечетными степенями Q_1 (ср. (3.14), (3.15)), при замене $t \rightarrow it$. Рассмотрим простейшую такую динамику

$$i\partial_t B = [B, Q_1^3] \quad (3.21)$$

и аналогично

$$i\partial_t \tilde{B} = [\tilde{B}, Q_1^3]. \quad (3.22)$$

Легко проверить, что такой выбор динамики устраняет неустойчивость как в окрестности $p_1 = \infty$, так и в окрестности точки $p_2 = 0$. Приведем явный вид эволюционных уравнений для потенциалов a и b , соответствующий такой динамике данных рассеяния:

$$\begin{cases} a_t = -(a_{xx} - 3C_x - 3aD^2 - 3a^2D - 3aD_x)_x + \\ \quad + 3(a_{xx}D + a_{xx}a), \\ b_t = b_{xxx} + 3b_xD_x - 3bD_{xx} + \\ \quad + 3(a^2b + a^2 - ab_x - D_x + bD^2 - 2abD)_x, \\ C_y = a, \quad D_y = b. \end{cases} \quad (3.23)$$

4. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Из последней формулы в (3.6) следует, что производная по времени предела $\lim_{p_1^2 + p_2^2 \rightarrow 0} \rho(p; \ell(\mathbf{q}_2))$ при выполнении условий (3.12) определена и равна нулю. Таким образом, функция

$$\rho(0; \ell(\mathbf{q})) \equiv |\rho\rangle(0; \mathbf{q}) = (v|\nu)\rangle(0; \mathbf{q}) \quad (4.1)$$

является производящей функцией интегралов движения.

Интегралы движения в терминах потенциалов получаются непосредственно разложением этой функции в ряд по степеням спектрального параметра. Таким образом, плотности интегралов движения могут быть вычислены в терминах потенциала v с помощью рекуррентной процедуры в окрестности тех значений спектрального параметра $\mathbf{q}_2$, при которых функция Грина интегрального уравнения для решения Йоста $|\nu\rangle(p; \mathbf{q})$ обращается в ноль. В данном случае таких точек две (см. [1]): $\mathbf{q}_2 = \infty$ и $\mathbf{q}_2 = 0$. Рассмотрим точку $\mathbf{q}_2 = 0$. Рекуррентные формулы для коэффициентов разложения $|\nu\rangle$ имеют вид (3.7) и (3.8). Из определения ρ (2.4) следует, что

$$\rho_n(p) = (v\nu_n)(p; 0) + i(\alpha\nu_{n-1})(p), \quad (4.2)$$

где $\rho_n(p)$ – коэффициентные функции разложения $|\rho\rangle(p; \mathbf{q})$ по степеням $\mathbf{q}_2$ в окрестности точки $\mathbf{q}_2 = 0$. Из формулы (2.4) и формул (3.7) и (3.8) следует

$$\rho_n(0) = \lim_{p_2 \rightarrow 0} p_2 \nu_{n+1}(0, p_2). \quad (4.3)$$

Мы приведем здесь несколько первых плотностей интегралов движения:

$$I_1 = b, \quad I_2 = ab, \quad I_3 = b(a^2 - a_x + \partial_y^{-1} b_x), \dots$$

Плотности этой серии интегралов движения, возникающей при разложении производящей функции в окрестности нуля спектрального параметра, содержат только положительные степени ∂_x . Другая часть интегралов движения, плотности которых содержат отрицательные степени ∂_x , получается при разложении производящей функции $\rho(0, \ell(\mathbf{q}))$ в ряд по $\mathbf{q}_2$ при $|\mathbf{q}_2| \rightarrow \infty$. Явные формулы для интегралов движения в терминах потенциалов получаются из (4.1). Рекуррентные формулы для коэффициентных функций разложения $|\nu\rangle$ при больших значениях спектрального параметра были получены в работе [1]. Мы выпишем их здесь в удобных для нас обозначениях:

$$|\nu\rangle(p, \mathbf{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\epsilon, n}(p) Q_2^{-n},$$

где

$$\epsilon = \operatorname{sgn} \left(p_2 \lim_{\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty} \Im \mathbf{q}_2 [2\Re \mathbf{q}_2 + p_2] \right).$$

Коэффициентная функция $\Phi_{\epsilon, 0}(p)$ есть решение уравнения

$$\Phi_{\epsilon, 0}(p) = \delta^2(p) + \frac{i}{p_1 - i0\epsilon} (\alpha\Phi)(p).$$

Из этой формулы видно, что коэффициентные функции зависят от направления, по которому $\mathbf{q}_2$ уходит на бесконечность. Поскольку нас интересуют в данном случае только интегралы движения, то мы можем, не теряя общности, выбрать какое-то одно направление $\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$ (например, такое, что $\epsilon = +1$) и опустить зависимость коэффициентных функций от $\mathbf{q}_2$. Итак, мы имеем следующие рекуррентные соотношения для коэффициентных функций разложения $\Phi_n(p)$:

$$\begin{aligned} \Phi_0(p) &= \delta^2(p) + \frac{i}{p_1 - i0} (\alpha\Phi)(p), \\ \Phi_n &= \phi_n \Phi_0, \\ \phi_n(p) &= \int d^2 l \frac{(p_1 - l_1) \phi_1(p - l) \phi_n(l) - (p_2 - l_2) \Phi_{n-1} \tilde{\Phi}_0(l)}{p_1 - i0} - \\ &\quad - i \int d^2 m d^2 l \frac{(p_2 - l_2) (p_1 - m_1) \phi_n(p - m) \Phi_0(m - l) \tilde{\Phi}_0(l)}{p_1 - i0}, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_0 \tilde{\Phi}_0 = 1.$$

Пусть теперь r_n — коэффициентные функции разложения $\rho(0; \ell(\mathbf{q}))$ при $\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$. Тогда в силу (4.1)

$$r_n(p) = \lim_{p_1 \rightarrow 0} p_1 \Phi_n.$$

Вычислив этот предел, мы находим

$$r_n = \int dl_2 (\delta(l_2) + 2\pi i(\alpha\Phi_0)(0, -l_2)) \lim_{p_1 \rightarrow 0} p_1 \phi_n(p_1, l_2).$$

Но, как легко заметить, $(\alpha\Phi_0)(0, -l_2)$ является интегралом движения. Таким образом, получаем, что величины I_{-n}

$$I_{-n} = \lim_{p_1 \rightarrow 0} p_1 \phi_n(p_1, 0) \quad (4.4)$$

также являются интегралами движения. В отличие от r_n , содержащих экспоненту от $\frac{\alpha(p)}{p_1 - i0}$, интегралы I_{-n} зависят от потенциалов только полиномиально.

Выведем интегральное представление для производящей функции интегралов движения в терминах спектральных данных. Для этого получим сначала представление транкированных решений Йоста $|\rho\rangle$ из уравнения обратной задачи (2.10). Из определения транкированной резольвенты (2.4) и редукции (2.5) получаем

$$\begin{aligned} |\rho\rangle = & L_0 \int \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{2iz_2} B^{(z_2)} Q_2 + \int \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{2iz_2} [|\rho\rangle B]^{(z_2)} Q_2 + \\ & + \left[Q_2, \int \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{2i} [|\nu\rangle B Q_2^{-1}]^{(z_2)} \right] - \\ & - \left[Q_1, \int \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{2i} [|\nu\rangle B]^{(z_2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим, что третье слагаемое правой части этой формулы пропорционально потенциалу β , т.е. асимптотическому значению $|\rho\rangle$ при $\mathbf{q}_2 \rightarrow 0$, а последнее – асимптотическому значению $|\rho\rangle Q_2^{-1}$ при $\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$.

Производная по времени от значения предела $\lim_{p_1^2 + p_2^2 \rightarrow 0} |\rho\rangle(p; \mathbf{q})$ определена и равна нулю независимо от способа стремления p к 0, хотя само значение данного предела, как это следует из интегрального представления (4.5), зависит от способа взятия предела. Мы используем такой порядок взятия этого предела, при котором сохраняется линейный рост $|\rho\rangle$ при $\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$. Этот порядок таков: сначала $p_1 \rightarrow 0$, а потом $p_2 \rightarrow 0$:

$$\rho(0; \ell(\mathbf{q})) = \lim_{p_2 \rightarrow 0} |\rho\rangle(0, p_2; \mathbf{q}). \quad (4.6)$$

Итак, интегральное представление для производящей функции интегралов движения имеет вид

$$\rho(0; \ell(\mathbf{q})) = \int \frac{dz_2 \wedge d\bar{z}_2}{2iz_2} \left[\left(\tilde{B} B Q_2^{-1} \right)^{(z_2)} Q_2^2 \right] (0; \mathbf{q}). \quad (4.7)$$

Ее разложение по степеням $\mathbf{q}_2$ в окрестности точки $\mathbf{q}_2 = 0$ порождает интегралы движения I_n , $n = 1, 2, \dots$, а разложение в окрестности точки $\mathbf{q}_2 = \infty$ порождает интегралы движения r_n , $n = 0, 1, 2, \dots$.

Проведенное построение завершает исследование системы Бойти–Леона–Пемпинелли в рамках метода обратной задачи. В заключение отметим, что система (1.2) является гамильтоновой с гамильтонианом I_3 и скобкой Пуассона

$$\{b(x, y; t), a(x', y'; t)\} = \delta(y - y') \delta'(x - x').$$

В дальнейшем мы предполагаем применить полученные в данной работе результаты к построению и изучению иерархии интегрируемых эволюционных уравнений, ассоциированных с дифференциальным оператором (1.1).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 94-01-00285), ISF (грант № MJJ300) и INTAS-01-0166.

Список литературы

- [1] *Т. И. Гарагаш, А. К. Погребков.* ТМФ. 1995. Т. 102. С. 163–182.
- [2] *T. I. Garagash, A. K. Pogrebkov.* Resolvent method for Two-dimensional Inverse Problems. In: Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Eds V. Makhankov, I. Puzynin, O. Pashaev. Singapore: World. Sci., 1992. P. 124–130.
- [3] *M. Boiti, J. Leon, F. Pempinelli.* Inverse Problems. 1987. V. 3. P. 37–49.
- [4] *M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov.* Resolvent approach for the nonstationary Schrödinger equation (standard case of rapidly decreasing potential). In: Proceedings of the seventh Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS'91). Singapore: World Scientific Pub. Co., 1992.
- [5] *М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов.* ТМФ. 1992. Т. 93. С. 181–210.
- [6] *М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков.* ТМФ. 1994. Т. 99. С. 185–200.
- [7] *M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov.* Inverse Problems. 1994. V. 10. P. 505–519.

Поступила в редакцию 14.IX.1996 г.

T. I. Garagash, A. K. Pogrebkov ON A SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BOITI–LEON–PEMPINELLI EQUATION

Cauchy problem for the $2 + 1$ -dimensional nonlinear Boiti–Leon–Pempinelli (BLP) equation in the framework of the Inverse Problem Method is considered. We derive evolution equations for the resolvent, Jost solutions and Spectral Data of the two-dimensional differential Klein–Gordon operator with variable coefficients that are generated by the considered BLP system of equations. Additional conditions on the Spectral Data that guarantee stability of the solutions of the Cauchy problem, are obtained. We present a recursion procedure for construction of polynomial integrals of motion and generating function of these integrals in terms of Spectral Data.