Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, М. Каненага, А. И. Кириллов, В. Ю. Мамакин, М. Намики, И. Охба, Е. В. Поляченко, О квантовании систем с действием, не ограниченным снизу, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 175–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:53:07

О.И. Завьялов*, М. Каненага†, А.И. Кириллов*,
В.Ю. Мамакин*, М. Намики†, И. Охба†, Е.В. Поляченко*

О КВАНТОВАНИИ СИСТЕМ С ДЕЙСТВИЕМ, НЕ ОГРАНИЧЕННЫМ СНИЗУ

Рассмотрены два возможных подхода к решению проблемы квантования систем с действием, не ограниченным снизу. В первом подходе используется метод суммирования по Борелю, примененный к расходящемуся ряду теории возмущений. В основу второго подхода положен метод стохастического квантования при помощи уравнения Ланжевена с ядром. Показано, что в простейшем случае одномерного ангармонического осциллятора первый метод дает некие функции Швингера, даже если континуальный интеграл расходится. Решения уравнения Ланжевена с ядром исследуются как аналитически, так и численно. Показано, что средние по времени имеют пределы, которые можно считать функциями Швингера. На примерах показано, что оба метода могут давать одинаковые результаты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим $G_1(x), G_2(x_1, x_2), \dots, G_n(x_1, \dots, x_n), \dots$ набор функций Швингера некоторого квантового поля. Обычно они определяются функциональными интегралами типа

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{N} \int \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-A[\varphi]} \mathcal{D}\varphi, \quad (1)$$

где $\mathcal{N}$ — константа нормировки и $A[\cdot]$ — евклидов функционал действия.

Например, для скалярного поля φ имеем

$$A[\varphi] = \frac{1}{2} \int [(\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2] d^d x + \frac{\lambda}{4} \int \varphi^4 d^d x. \quad (2)$$

Помимо общих математических проблем, связанных с вычислением функциональных интегралов, имеется одна специальная, которая возникает, если λ в (2) — отрицательная величина. В таком случае функционал действия $A[\cdot]$ не ограничен снизу и континуальный интеграл (1) заведомо расходится.

Как известно, в классической механике существует много систем, энергия которых может быть меньше любого отрицательного числа, но динамическая картина которых не имеет особенностей. Гейзенбергово описание таких систем в квантовой механике тоже не обладает принципиальными недостатками. Поэтому можно предположить, что

*Высший колледж математической физики, Независимый московский университет, Москва

†Физический факультет, Университет Васеда, Токио

для систем с действием, не ограниченным снизу, могут существовать функции Швингера. В этой работе рассматриваются следующие два возможных подхода к описанию таких систем:

1. Метод аналитического продолжения по λ .
2. Метод стохастического квантования.

Для аналитического продолжения по λ используются ряды теории возмущений. Разумеется, они расходятся. Поэтому мы применяем к ним метод Бореля суммирования асимптотических рядов.

Простейшая схема стохастического квантования неприменима в интересующем нас случае, т.к. решения соответствующего уравнения Ланжевена уходят на бесконечность. Поэтому мы используем уравнение Ланжевена с ядром.

В данной работе оба вышеупомянутых метода применяются для вычисления функций Швингера в случае матричной модели при $N = 1$, когда конфигурационное пространство одномерно. Тогда функциональный интеграл (1) становится обычным интегралом вида

$$G_n = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^n \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2} - \lambda \frac{\varphi^4}{4} \right) d\varphi. \quad (3)$$

В двух последующих разделах мы рассматриваем метод суммирования по Борелю и метод стохастического квантования. В разделе 4 приведены результаты компьютерного моделирования. Последний раздел содержит некоторые выводы.

2. СУММИРОВАНИЕ ПО БОРЕЛЮ

Впервые метод Бореля был применен для суммирования расходящихся рядов теории возмущений в [1]. В этой работе исследовался ангармонический осциллятор. Позже выяснилось, что некоторые асимптотические разложения в модели $P(\varphi)_2$ суммируемы по Борелю [2]. Суммирование по Борелю использовалось и в теории эффекта Зеемана [3]. В этом разделе исследуется применение метода Бореля в случае неограниченности снизу функционала действия.

Рассмотрим формальное разложение в ряд по λ интеграла

$$S_{2k}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{2k} \exp \left(-\frac{\varphi^2}{2} - \lambda \frac{\varphi^4}{4} \right) d\varphi.$$

Нетрудно проверить, что

$$S_{2k}(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n(k) \lambda^n, \quad (4)$$

где

$$a_n(k) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{n!} \frac{(4n + 2k - 1)!!}{2^{2n}}.$$

Следуя Борелю, мы должны определить вспомогательную функцию

$$h_k(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(k)}{n!} u^n \quad (5)$$

и затем найти

$$S_{2k}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-v} h_k(-\lambda v) dv. \quad (6)$$

Ряд для функции $h_k(u)$ сходится в круге $|u| < \frac{1}{4}$. Однако для вычисления S_{2k} по формуле (6) нам необходимо знать функцию $h_k(u)$ для всех вещественных $u > 0$ при $\lambda < 0$ и для всех $u < 0$ при $\lambda > 0$. Это значит, что нам нужно аналитически продолжить функцию $h_k(u)$ за границу круга сходимости ряда.

Внутри круга $|u| < \frac{1}{4}$ ряд (4) сходится к функции

$$h_k(u) = \sqrt{2\pi}(2k-1)!! F\left(\frac{2k+1}{4}, \frac{2k+3}{4}; 1; 4u\right), \quad (7)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ – гипергеометрическая функция [4, п. 2.1.1]. Она аналитична по z во всей комплексной плоскости с разрезом $\operatorname{Re} z > 1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Для получения $S_{2k}(\lambda)$ необходимо вычислить интеграл

$$S_{2k}(\lambda) = \sqrt{2\pi}(2k-1)!! \int_0^\infty e^{-v} F\left(\frac{2k+1}{4}, \frac{2k+3}{4}; 1; -4\lambda v\right) dv. \quad (8)$$

Если $\lambda > 0$, то здесь все хорошо определено. Иначе обстоит дело в интересующем нас случае $\lambda < 0$. Тогда $-4\lambda v$ попадает на разрез функции F . Мы, следовательно, должны каким-то образом выбрать, по какому из берегов разреза проходит путь интегрирования в (8). Возможно также, что следует взять в качестве $S_{2k}(\lambda)$ некоторую линейную комбинацию интегралов по различным берегам разреза.

В рассматриваемой нами упрощенной модели процедура аналитического продолжения по λ может быть выполнена и без применения метода Бореля. Дело в том, что в данном случае

$$S_{2k}(\lambda) = \sqrt{2\pi}(2k-1)!! \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{2-\frac{2k+1}{4}} \left\{ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right)} \Phi\left(\frac{2k+1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4\lambda}\right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{4}\right)} \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{2k+3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{1}{4\lambda}\right) \right\}. \quad (9)$$

Здесь $\Phi(a, c; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Она является целой по z и по a [4, гл. 6.7.1]. Формулой (9) можно воспользоваться для аналитического продолжения функции $S_{2k}(\lambda)$ в область $\lambda < 0$. Однако при этом возникает неоднозначность, обусловленная множителями $\lambda^{(2k+1)/4}$ и $\lambda^{-1/2}$, связанная с неоднозначностью корня четвертой степени. Нетрудно проверить, что граничные значения $S_{2k}(\lambda)$ на берегах разреза имеют ненулевые мнимые части. Поэтому *необходимо определять функции Швингера как линейные комбинации граничных значений*. Таким образом, мы заключаем, что необходим некоторый руководящий принцип, который бы сделал однозначным выбор коэффициентов в этой линейной комбинации.

3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

При стохастическом квантовании функции Швингера определяются как пределы

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \varphi_t(x_1) \varphi_t(x_2) \dots \varphi_t(x_n), \quad (10)$$

где t – так называемое “фиктивное” или “компьютерное” время, E – символ математического ожидания и $\varphi_t(x)$ – решение стохастического уравнения Ланжевена

$$d\varphi_t(x) = -\frac{\delta A[\varphi_t]}{\delta \varphi_t(x)} dt + \sqrt{2} dw_t(x). \quad (11)$$

Здесь w_t – стандартный винеровский процесс в конфигурационном пространстве квантуемой системы.

В рассматриваемом нами случае уравнение Ланжевена (11) записывается в виде

$$d\varphi_t = -(\varphi_t + \lambda \varphi_t^3) dt + \sqrt{2} dw_t. \quad (12)$$

При $\lambda < 0$ существует отличная от нуля вероятность, что решение уравнения (12) уходит на бесконечность за конечное время. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим время жизни T решения φ_t .

Обозначим $\tau^{s,x}$ время, за которое решение уравнения (12), удовлетворяющее условию $\varphi_s = x$, покидает любую ограниченную область. Величина $\tau^{s,x}$ случайная, причем возможно, что $\tau^{s,x} = \infty$. Очевидно, что $\tau^{s,x}$ есть время жизни T . Если существует положительная ограниченная гладкая функция $V(s, x)$, для которой при некотором $c > 0$ выполняется неравенство

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (x + \lambda x^3) \frac{\partial}{\partial x} \right\} V \geq cV, \quad (13)$$

то по теореме 3.4.2 из [5] для $\tau^{s,x}$ справедлива оценка

$$\text{Prob} \left\{ \tau^{s,x} - s < \frac{1}{c} \ln \frac{\sup V}{V(s, x)} + \varepsilon \right\} > 0, \quad (14)$$

где ε – любое положительное число.

Положим $V(s, x) = \exp[-p(x^2 + 1)^{-1}]$, где p – некоторое положительное число. Тогда (13) эквивалентно неравенству

$$(-\lambda - \gamma)x^8 + (-2\lambda - 1 - 4\gamma)x^6 + (-\lambda - 5 - 6\gamma)x^4 - (3 + 4\gamma)x^2 + (1 - \gamma) + 2px^2 > 0,$$

где $\gamma = c/(2p)$. Следовательно, неравенство (13) выполняется, если $\gamma < \min\{-\lambda, 1\}$ и p – достаточно большое положительное число. При этом из (14) получаем, что

$$\text{Prob} \left\{ T < -\frac{1}{2\gamma} (\varphi_s^2 + 1)^{-1} + s + \varepsilon \right\} > 0.$$

Иными словами, при любых начальных условиях некоторые из выборочных траекторий решения (12) за конечное время уходят на бесконечность. Косвенно это проявляется в поведении моментов $E\varphi_t^n$, т.к. по формуле Ито

$$E \frac{d\varphi_t^n}{dt} = n E \varphi_t^{n-2} (-\lambda \varphi_t^4 - \varphi_t^2 + n - 1).$$

Таким образом, для всех n , для которых $(n+1)^2 < -4\lambda n^2(n-1)$, выполнено неравенство $dE\varphi_t^n/dt \geq E\varphi_t^n$, т.е. $E\varphi_t^n \geq e^t E\varphi_0^n$. Это неравенство доказывает, что не существует пределов типа (10).

Мы видим, что стандартный метод стохастического квантования не пригоден в интересующем нас случае. Нам нужно иметь решения φ_t , определенные при всех $t > 0$ и позволяющие каким-то образом вычислить функции Швингера. Чтобы получить случайный процесс φ_t при всех $t > 0$, в работе [6] было предложено использовать так называемое уравнение Ланжевена с ядром [7] (kerneled Langevin equation), которое имеет вид

$$d\varphi_t(x) = \int d^d x' \left\{ \left[-K(x, x'; \varphi_t) \frac{\delta A[\varphi_t]}{\delta \varphi_t(x')} + \frac{\delta K(x, x'; \varphi_t)}{\delta \varphi_t(x')} \right] dt + \sqrt{2} K^{1/2}(x, x'; \varphi_t) dw_t(x') \right\}. \quad (15)$$

Следуя [8], положим

$$K(x, x'; \varphi) = \delta(x - x') \exp[\lambda \varphi^4/4].$$

Тогда (15) примет вид следующего уравнения, которое мы будем использовать вместо (12):

$$d\varphi_t = -\varphi_t \exp[\lambda \varphi_t^4/4] dt + \sqrt{2} \exp[\lambda \varphi_t^4/8] dw_t. \quad (16)$$

По теореме 3.4.1 из [5] решения данного уравнения имеют бесконечное время жизни в обоих случаях – как при $\lambda \geq 0$, так и при $\lambda < 0$. Более того, эти решения являются *возвратными*, т.е. они принимают значения в любом интервале на действительной оси бесконечное число раз. Этот факт позволяет нам определить время $T_{a,b}(\tau)$, которое данный процесс пребывал в интервале $[a, b]$, в течение промежутка времени от 0 до момента τ . Очевидно, что $T_{a,b}(\tau) < \tau$ и $T_{-\infty,+\infty}(\tau) = \tau$.

Из (16) следует, что существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{T_{a,b}(\tau)}{T_{c,d}(\tau)} = \frac{\int_a^b \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) d\varphi}{\int_c^d \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) d\varphi}. \quad (17)$$

Это свойство обеспечивает связь между уравнением Ланжевена и нашей задачей. Однако, хотя соотношение (17) и свидетельствует о том, что распределение значений φ_t становится стационарным при $t \rightarrow \infty$, очевидно, что такое стационарное распределение не является нормализуемым при $\lambda < 0$.

Принципиальное различие между случаями $\lambda \geq 0$ и $\lambda < 0$ проявляется в поведении среднего времени $T_{a,b}(\tau)/\tau$ пребывания процесса в $[a, b]$, когда τ стремится к ∞ . В случае $\lambda \geq 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{T_{a,b}(\tau)}{\tau} = \frac{\int_a^b \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) d\varphi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\varphi^4 - \frac{1}{2}\varphi^2\right) d\varphi} > 0.$$

Если $\lambda < 0$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{T_{a,b}(\tau)}{\tau} = 0. \quad (18)$$

В соответствии с этим различием решения в случае $\lambda \geq 0$ называются “*положительными*”, в то время как если выполняется соотношение (18), – “*нулевыми*”. “Нулевые”

решения обладают некоторыми специфическими эргодическими свойствами, которые мы сейчас рассмотрим.

Обозначим μ стационарное распределение значений φ_t , устанавливающееся при $t \rightarrow \infty$. Поскольку оно не является вероятностным распределением, μ -интегрируемые функции, грубо говоря, быстро убывают. С другой стороны, из уравнения (16) следует, что процесс φ_t находится слишком много времени вдалеке от начала координат, т.к. подавляющий фактор у коэффициента сноса $-\varphi_t \exp(\lambda\varphi_t^4/4)$ в (16) мал при больших $|\varphi_t|$ (напомним, что $\lambda < 0$). Поэтому, если функция f является μ -интегрируемой, то с существенной вероятностью мы получим, что $f(\varphi_t) = 0$. Точнее, справедливо следующее равенство [5]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t) dt = 0 \quad \text{почти наверное.} \quad (19)$$

Это соотношение означает, что при $\lambda < 0$ эргодическое равенство

$$\int f(\varphi) d\mu(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t) dt$$

не выполняется. Для некоторых функций не существует математического ожидания, но средние по времени могут существовать. Поэтому можно обобщить метод стохастического квантования, дополнив его использованием *средних по времени* вместо *математических ожиданий*. В этом случае функции Швингера будут вычисляться по формуле

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E} \varphi_t(x_1) \varphi_t(x_2) \dots \varphi_t(x_n) dt,$$

а не по формуле (10). Очевидно, что в эргодическом случае эта формула эквивалентна формуле (10).

При изучении средних по времени нужно принимать во внимание так называемые “экскурсии за высокий барьер”, когда траектория процесса φ_t удаляется на значительное расстояние от начала координат. Такие экскурсии могут происходить только по окончании интервалов времени $[\tau, \tau']$, для которых

$$\left| \int_{\tau}^{\tau'} e^{\lambda\varphi_t^4/8} dw_t \right| \gg 1. \quad (20)$$

Такие интервалы маловероятны при $\lambda < 0$ и довольно часты при $\lambda \geq 0$.

При $\lambda < 0$ коэффициент сноса мал в области, где $|\varphi_t| \gg 1$, и процесс φ_t может вернуться в окрестность начала координат только по истечении другого интервала $[\tau, \tau']$, на котором условие (20) выполнено, что маловероятно. Поэтому экскурсии весьма продолжительны при $\lambda < 0$. Из (16) следует, что если $|\varphi_t| \gg 1$, то $d\varphi_t/dt \approx 0$, при условии, что $\left| \frac{dw_t}{dt} \right|$ невелико, т.е. $\varphi_t \approx \text{const}$ во время экскурсии.

При $\lambda \geq 0$ вероятность выполнения условия (20) существенно выше, чем при $\lambda < 0$. Поэтому процесс чаще уходит от начала координат и быстрее возвращается. Математическое ожидание времени возвращения конечно при $\lambda \geq 0$ и бесконечно при $\lambda < 0$ [5].

В случае $\lambda < 0$ введем уровень L (некоторое положительное число) и обозначим через s_k , e_k случайные времена, в которые начинается и кончается k -я экскурсия с

Рис. 1. Типичная траектория процесса φ_t .

$|\varphi_t| > L$. Тогда вклад экскурсий в средние по времени может быть выделен следующим образом:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e_k} \int_0^{T_k} f(\psi_t) dt + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e_k} \sum_{j=1}^k f(a_j)(e_j - s_j). \quad (21)$$

Здесь ψ_t — процесс, полученный из φ_t заменой значений, лежащих вне интервала $[-L, L]$, на значения на концах интервала, $T_k = e_k - \sum_{j=1}^k (e_j - s_j)$ — полное время, в течение которого $|\varphi_t| < L$ за период $[0, e_k]$; a_j — случайное число, равное значению, принимаемому φ_t во время экскурсии с номером j . Первый предел в правой части (21) существует, поскольку случайный процесс ψ_t имеет хорошие эргодические свойства. Существование второго предела и, таким образом, существование предела по времени в (21) зависит от стохастических свойств случайных чисел a_j , s_j и e_j . Необходимо отметить, что, поскольку экскурсии встречаются крайне редко, их трудно наблюдать в компьютерных экспериментах. Поэтому есть риск получить неправильные значения средних по времени вследствие неточного вычисления второго предела в правой части (21).

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Первые данные, полученные в компьютерном эксперименте по исследованию систем с действием, не ограниченным снизу, были представлены в [8], где уравнение (16) изучалось при $\lambda < 0$. В этой работе сообщалось о существовании пределов средних по времени (при $t \rightarrow \infty$). Компьютерные эксперименты были продолжены с целью получения данных, необходимых для анализа сущности этих пределов.

Мы решали уравнение (16) при $\lambda = -0.06$ с помощью стандартного алгоритма решения стохастических уравнений с шагом $\Delta t = 0.01$ и числом шагов $3 \cdot 10^8$. Пример траектории процесса φ_t показан на рис. 1.

Для оценки уровня экскурсий заметим, что если $\Delta t = 0.01$, $\lambda = -0.06$, то величина

$$|\Delta \varphi_t| \approx |\varphi_t| \exp\left(\frac{\lambda \varphi_t^4}{4}\right) \Delta t + \exp\left(\frac{\lambda \varphi_t^8}{8}\right) \sqrt{2\Delta t}$$

Рис. 2. Фрагмент рис. 1, содержащий экскурсию.

равна $1.3 \cdot 10^{-3}$ при $|\varphi_t| = 5$, $8.47 \cdot 10^{-6}$ при $|\varphi_t| = 6$ и $2.13 \cdot 10^{-9}$ при $|\varphi_t| = 7$. Следовательно, при $|\varphi_t| \geq 6$ решение практически не меняется. Это значит, что в данном случае уровень экскурсий примерно равен 6.

Компьютерное моделирование действительно выявило экскурсии. Это видно на рис. 2, где в увеличенной форме представлен фрагмент рис. 1.

Очевидно, что случайный импульс или последовательность случайных импульсов может увести траекторию на значительное расстояние от начала координат. Однако первое слагаемое в правой части уравнения (16) стремится вернуть траекторию в окрестность нуля. Поэтому представляют интерес две величины: пороговая амплитуда пика, выводящего систему на экскурсию, и время релаксации, за которое траектория возвращается в окрестность нуля.

Чтобы выяснить величину пороговой амплитуды пика, мы добавляли к w_t гауссов процесс со значениями, большими 20.0. В численном моделировании с такой добавкой система часто отправлялась на экскурсии, и мы смогли оценить пороговое значение величиной порядка 30.0. На рис. 3 сопоставлены решения уравнения (16) при $\lambda = -0.06$ и $\lambda = 0$. В обоих случаях к w_t добавлялся гауссов процесс с $\Delta w_t \approx 30$. При $\lambda = 0$ возвращающая сила в (16) играет значительную роль. Поэтому в этом случае экскурсия краткосрочна и представляет собой узкий пик (см. рис. 3, внизу). Напротив, при $\lambda = -0.06$ возвращающая сила относительно мала и экскурсия длится значительное время (см. рис. 3, сверху).

Понятно, что в моделировании уравнения без добавочного процесса такие значения $\Delta w_t \approx 30$ практически невероятны. Следовательно, экскурсии происходят в результате воздействия не одного, а нескольких последовательных импульсов.

Чтобы оценить время релаксации, мы добавляли к w_t вспомогательный гауссов процесс со значениями порядка 20.0, т.е. ниже пороговых, но включали его в течение трех последовательных интервалов. Изменяя время между такими интервалами от 100 до 1000 шагов, мы заметили, что экскурсия происходит, пока пауза не превосходит 500 шагов. Иными словами, возвращающая сила не справляется с импульсами, следующими с такой частотой. Если импульсы более редки, то экскурсии исчезают. Интересно, что при продолжительности паузы, большей 600, иногда экскурсии появляются вновь.

Рис. 3. Процесс φ_t с добавлением сильного шума.

На рис. 4 продемонстрирован процесс возникновения экскурсий, когда случайная последовательность больших возмущений уводит систему от начала координат. На верхней части рис. 4 можно увидеть, что процесс “пытается” вернуться назад, однако следующее большое возмущение не дает процессу уйти с экскурсии.

Рис. 4. Процесс φ_t с добавлением последовательности сильных шумов с интервалом 600 шагов.

Рассмотрим теперь математические ожидания $E\varphi_t^{2k}$. Для оценки их значений использовались разные участки траектории, представленной на рис. 1. Эти участки трактовались как выборочные траектории на одном и том же промежутке времени $[0, 150\text{с}]$. Полученные таким образом результаты представлены на рис. 5. Графики функций $t \rightarrow E\varphi_t^{2k}$ представлены на этом рисунке слева. Очевидно, что они весьма хаотичны, что

Рис. 5. Математические ожидания $E(\varphi_t^{2k})$ (слева) и их средние по времени (справа) при $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

согласуется с установленным выше отсутствием пределов этих функций при $t \rightarrow \infty$. Напротив, функции

$$t \rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t E\varphi_s^{2k} ds, \quad (22)$$

кажется, имеют пределы при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 5, справа).

На рис. 6 приведен график функции

$$t \rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_s^2 ds$$

для траектории φ_t , изображенной на рис. 1. Этот график свидетельствует в пользу нашего предположения о том, что предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_s^{2k} ds$$

Рис. 6. Среднее по времени процесса φ_t^2 для траектории, представленной на рис. 1.

существует с вероятностью 1, и, таким образом, нет необходимости в дополнительном вычислении математического ожидания, как в (22).

Для сравнения результатов, получаемых борелевским суммированием и стохастическим квантованием, мы вычислили зависимость от λ функции G_2 в интервале $-0.08 < \lambda < 0.00$. Соответствующий график, полученный стохастическим методом, представлен в [8]. Из четырех ветвей функции $G_2(\lambda)$ на разрезе мы выбрали ту, мнимая часть значений которой на разрезе положительна. Оказалось, что для этой ветви значения $\text{Re } G_2(\lambda) + \text{Im } G_2(\lambda)$ фактически совпадают со значениями, полученными при стохастическом моделировании.

5. ВЫВОДЫ

Мы показали, что, используя методы суммирования по Борелю и стохастического квантования, можно получить некоторые результаты при вычислении интегралов типа (3) в случае систем с действием, не ограниченным снизу. Борелевский подход позволяет получить результаты для любых значений константы связи λ и функции Швингера любого порядка n . Однако метод не дает однозначного ответа, и поэтому приходится искать ответ в виде комбинации четырех значений на разных ветвях функции для каждого λ и n . На наш взгляд, сумма действительной и мнимой частей значения, которое функция G_n принимает на одной стороне разреза, может стать подходящим кандидатом на роль функции Швингера.

Стохастический подход, основанный на уравнении Ланжевена с ядром, воспроизводит распределение $\exp[-\varphi^2/2 - \lambda\varphi^4/4]$ для любого значения λ . Эргодические равенства математических ожиданий и средних по времени не выполняются в случае систем с действием, не ограниченным снизу. Средние по времени можно использовать в качестве функций Швингера.

Экспедиции за высокий барьер играют большую роль при $\lambda < 0$. Их влияние возрастает при росте $(-\lambda)$. Согласно формуле (21) пренебрежение экспедициями эквивалентно введению обрезания по значениям φ . Соотношение (17) может быть использовано при проверке точности вычислений.

Неоднозначность, возникающая в борелевском подходе, по всей видимости, связана с возможностью использования различных ядер в методе стохастического квантования. Представляется интересным найти соотношения, выражающие эту связь. После этого возможно исследование матричной модели при $N > 1$. Первые результаты стохастического моделирования приведены в [9]. Они подтверждают существование пределов средних по времени. Представляет интерес и исследование ангармонического осциллятора при различных значениях константы связи. Эта модель исследовалась с помощью метода Бореля. Поэтому ее рассмотрение методом стохастического квантования оказалось бы очень полезным для более глубокого понимания систем с действием, не ограниченным снизу.

В заключение отметим, что эта статья подготовлена в рамках программы сотрудничества между учеными Японии и бывшего Советского Союза, организованной фондом Japan Society for the Promotion of Science. Авторы благодарят этот фонд за финансовую поддержку данного исследования.

Список литературы

- [1] *S. Graffi, V. Grecchi, B. Simon.* Phys. Lett. 1970. V. 32B. P. 631–634.
- [2] *J.-P. Eckmann, J. Magnen, R. Seneor.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 39. P. 251–271.
- [3] *J. Avron, I. Herbst, B. Simon.* Schrödinger Operators with Magnetic Fields: Preprint. Princeton Univ., 1977.
- [4] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973.
- [5] *Р. З. Хасьминский.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. М.: Наука, 1969.
- [6] *M. Namiki.* Stochastic Quantization. Springer, 1992.
- [7] *J. D. Breit, S. Gupta, A. Zaks.* Nucl. Phys. 1984. V. B 233. P. 61.
- [8] *S. Tanaka, M. Namiki, I. Ohba, M. Mizutani, N. Komoike, M. Kanenaga.* Phys. Lett. 1992. V. B288. P. 129.
- [9] *M. Kanenaga, M. Mizutani, M. Namiki, I. Ohba, S. Tanaka.* Prog. Theor. Phys. 1994. V. 91. P. 599–610.

Поступила в редакцию 13.VI.1996 г.

**O. I. Zavialov, M. Kanenaga, A. I. Kirillov, V. Yu. Mamakin,
M. Namiki, I. Ohba, E. V. Polyachenko**

ON QUANTIZATION OF SYSTEMS WITH ACTIONS UNBOUNDED FROM BELOW

We consider two possible approaches to the problem of quantization of systems with actions unbounded from below. The first uses the Borel summation method applied to the perturbation expansion in coupling constant. The second is based on thekerneled Langevin equation of stochastic quantization. We show that in a simple model the first method gives some Schwinger functions even in the case where the standard path integrals diverge. The solutions of thekerneled Langevin equation for the model are studied in detail both analytically and numerically. The fictitious time averages are shown to have the limits which can be considered as the Schwinger functions. An evidence is presented that both methods may give the same results.