Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Петров, Г. С. Шаров, Классификация движений релятивистской струны с массивными концами, допускающих линеаризацию краевых условий, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 187–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:36:50

В. П. Петров*, Г. С. Шаров*

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ КОНЦАМИ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Классифицированы движения (мировые поверхности) релятивистской струны с массами на концах, допускающие параметризацию, в которой уравнения движения и краевые условия являются линейными вследствие пропорциональности параметра на траекториях концов струны натуральному параметру. Данные движения могут быть представлены в виде рядов Фурье по собственным функциям некоторого обобщения задачи Штурма–Лиувилля. Доказана полнота семейства этих собственных функций в классе C . Показано, что в пространствах Минковского размерностей $2 + 1$ и $3 + 1$ исследуемые движения сводятся к равномерному вращению прямолинейной струны или нескольких таких пространственно совмещенных струн (мировая поверхность – геликоид). В пространствах более высоких размерностей возможны иные нетривиальные движения рассматриваемого класса.

ВВЕДЕНИЕ

Теория струн сегодня представляет собой весьма обширную и разветвленную область математической физики [1, 2]. В настоящей работе в центре внимания находится модель релятивистской струны с массивными концами [1, 3–5], которая была предложена для описания связанной сильным взаимодействием системы из двух кварков. Теоретический анализ движения такой струны сталкивается с рядом проблем. В частности, процедуру квантования [1, 2], разработанную для других струнных моделей и основанную на использовании ряда Фурье, здесь применять нельзя из-за существенно нелинейных краевых условий, приводящих к, вообще говоря, непериодическому движению струны с массами на концах.

Одна из возможностей продвинуться в квантовании данной модели струны была реализована в работе [6], где рассматривались только те движения струны с массивными концами, которые допускают при определенном выборе координат на мировой поверхности линеаризацию краевых условий (при сохранении линейными уравнений движения). Это означает фактически введение координат, натурально параметризующих траектории концов струны.

К настоящему моменту окончательно не выяснено, насколько широк класс таких движений. Целью данной работы является точное определение его границ и внутренняя

---

*Тверской государственный университет

классификация – исчерпывающее описание всех мировых поверхностей, допускающих упомянутую линеаризацию.

В первом разделе приведены основные уравнения, описывающие модель струны с массивными концами. Интересующий нас класс движений исследуется с помощью метода Фурье. Во втором разделе те же результаты получены и интерпретируются с помощью несколько иного подхода. В разделе 3 на основании строгих доказательств сделаны выводы о полноте семейства функций, используемого для разложения в ряд Фурье, а также классифицированы физические мировые поверхности с натурально параметризованными траекториями концов струны.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С МАССИВНЫМИ КОНЦАМИ. МЕТОД ФУРЬЕ

Движение релятивистской струны с натяжением γ и массами m_1, m_2 на концах описывается действием [1, 3–6]

$$S = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \gamma \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} \left[(\dot{X} X')^2 - \dot{X}^2 X'^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma + \sum_{a=1}^2 m_a \sqrt{\left[\frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau, \sigma_a(\tau)) \right]^2} \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь $X^\mu(\tau, \sigma)$ – координаты точки струны в D -мерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$; $\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$ – внутренние координаты концов струны; $\dot{X}^\mu = \partial X^\mu / \partial \tau$, $X'^\mu = \partial X^\mu / \partial \sigma$; $(ab) = a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$ – (псевдо)скалярное произведение в $\mathbb{R}^{1,D-1}$; скорость света $c = 1$.

Варьирование действия (1.1) дает уравнения движения струны и граничные условия, которые принимают простейший вид, если выбором координат τ и σ сделать индуцированную метрику на мировой поверхности струны конформно-плоской, т.е. удовлетворяющей условиям ортонормальной калибровки

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad (\dot{X} X') = 0. \quad (1.2)$$

При выполнении этих условий уравнения движения становятся линейными:

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0, \quad (1.3)$$

а краевые условия на концах струны, нумеруемых индексом a , принимают вид

$$\left\{ m_a \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu + \sigma'_a(\tau) X'^\mu}{\sqrt{\dot{X}^2 \cdot (1 - \sigma_a'^2)}} + (-1)^a \gamma [X'^\mu + \sigma'_a(\tau) \dot{X}^\mu] \right\} \Big|_{\sigma=\sigma_a(\tau)} = 0. \quad (1.4)$$

Зафиксируем внутренние уравнения траекторий концов струны в виде

$$\sigma_1(\tau) = 0, \quad \sigma_2(\tau) = \pi, \quad (1.5)$$

что всегда можно сделать [1, 4], используя инвариантность выражений (1.2) и (1.3) относительно преобразований

$$\tilde{\tau} \pm \tilde{\sigma} = f_\pm(\tau \pm \sigma). \quad (1.6)$$

Отметим, что условия (1.5) фиксируют свободу выбора функций $f_{\pm}(\xi)$ не окончательно. Если $\phi(\xi)$ — произвольная 2π -периодическая гладкая функция с ограниченной производной, то замены переменных класса (1.6) с

$$f_+(\xi) = f_-(\xi) = \xi + \phi(\xi), \quad \phi(\xi + 2\pi) = \phi(\xi), \quad |\phi'(\xi)| < 1 \quad (1.7)$$

сохраняют вид (1.5) уравнений концов струны: $\tilde{\sigma}_1 = 0$ и $\tilde{\sigma}_2 = \pi$. Произвол в выборе координат (1.6)–(1.7) на мировой поверхности можно интерпретировать как физическую несущественность “продольных колебаний” внутренних точек струны (в рамках действия (1.1) эти точки неразличимы).

Сосредоточим внимание на движениях рассматриваемой струны, допускающих параметризацию, которая, удовлетворяя условиям (1.2), обеспечивает на траекториях концов (1.5) пропорциональность параметра τ натуральному параметру $s = \int (\dot{X}^2)^{1/2} d\tau$ (собственному времени):

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{\dot{X}^2} \Big|_{\sigma=\sigma_a} = C_a = \text{const}, \quad a = 1, 2. \quad (1.8)$$

Заметим, что к данному классу относятся движения с параметризацией, в которой $\chi_1(\tau) = \dot{X}^2(\tau, 0) - 2\pi$ -периодическая функция, а $\chi_2(\tau) = \dot{X}^2(\tau, \pi)$ удовлетворяет условию $\chi_2(\tau) = \text{const} \cdot \chi_1(\tau + \pi)$. Они сводятся к виду (1.8) с помощью замены (1.6)–(1.7).

Ограничение (1.8) приводит для исследуемого класса движений к линеаризации краевых условий (1.4):

$$(\ddot{X}^\mu - Q_1 X'^\mu) \Big|_{\sigma=0} = 0, \quad (\ddot{X}^\mu + Q_2 X'^\mu) \Big|_{\sigma=\pi} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь введены обозначения

$$Q_a = C_a k_a = C_a \gamma / m_a, \quad a = 1, 2; \quad Q_a > 0. \quad (1.10)$$

Константы Q_a связаны с постоянными кривизнами траекторий $k_a = \gamma / m_a$ [5].

Множество решений уравнения (1.3), удовлетворяющих краевым условиям (1.9), ищем с помощью метода разделения переменных (метода Фурье) [6, 7], т.е. в виде линейной комбинации выражений $X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha^\mu u(\sigma) T(\tau)$, где α^μ — произвольный постоянный вектор. Подстановка этого выражения в (1.3) приводит к уравнениям $T''(\tau) + \lambda T = 0$ и

$$u''(\sigma) + \lambda u = 0. \quad (1.11)$$

При этом условия (1.9) преобразуются к виду

$$\lambda u(0) + Q_1 u'(0) = 0, \quad \lambda u(\pi) - Q_2 u'(\pi) = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.11) с краевыми условиями (1.12) представляет некоторое обобщение задачи Штурма–Лиувилля, отличающееся от классической задачи [7, 8] наличием зависимости условий (1.12) от λ .

Определим стандартным образом собственные функции $u_n(\tau)$ и собственные значения λ_n задачи (1.11)–(1.12). Введем в $C_{[0,\pi]}$ скалярное произведение [6]

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi f(\sigma) \overline{g(\sigma)} d\sigma + \frac{f(0) \overline{g(0)}}{Q_1} + \frac{f(\pi) \overline{g(\pi)}}{Q_2}, \quad (1.13)$$

удовлетворяющее наряду с прочими обычными свойствами условию положительной определенности скалярного квадрата.

Покажем, что все собственные значения задачи (1.11)–(1.12) вещественны. Запишем с учетом (1.11) скалярный квадрат собственной функции:

$$\lambda_n \langle u_n, u_n \rangle = - \int_0^\pi u_n''(\sigma) \overline{u_n(\sigma)} d\sigma + \lambda_n \frac{|u_n(0)|^2}{Q_1} + \lambda_n \frac{|u_n(\pi)|^2}{Q_2}. \quad (1.14)$$

Выполняя дважды интегрирование по частям и реализуя условия (1.12), придем к равенству $\lambda_n \langle u_n, u_n \rangle = \overline{\lambda_n} \langle u_n, u_n \rangle$, что вследствие положительной определенности квадратичной формы $\langle u, u \rangle$ влечет $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$. Очевидно, что все собственные функции данной задачи можно выбрать вещественными.

Убедившись с помощью непосредственной проверки, что отрицательных собственных значений задачи (1.11)–(1.12) не существует, введем для $\lambda_n \geq 0$ обозначение $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ и запишем соответствующие λ_n нетривиальные решения (1.11)–(1.12) (собственные функции) u_n в виде

$$u_n(\sigma) = \cos \omega_n \sigma - \frac{\omega_n}{Q_1} \sin \omega_n \sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n}. \quad (1.15)$$

Числа ω_n являются корнями трансцендентного уравнения, следующего из условий (1.12) [6]:

$$(Q_1 + Q_2) \omega \cos \pi \omega = (\omega^2 - Q_1 Q_2) \sin \pi \omega. \quad (1.16)$$

Каждому ω_n соответствует единственная с точностью до множителя функция u_n , а также две функции $T_n(\tau) = e^{\pm i \omega_n \tau}$, $n \geq 1$; $T_0(\tau) = c_1 + c_2 \tau$.

Собственные функции (1.15) взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения (1.13):

$$\langle u_n, u_p \rangle = 0, \quad n \neq p. \quad (1.17)$$

Для доказательства достаточно записать $\lambda_n \langle u_n, u_p \rangle$ в виде, подобном (1.14), и, проделав те же операции, получить равенство $\lambda_n \langle u_n, u_p \rangle = \lambda_p \langle u_n, u_p \rangle$.

Из изложенного следует, что всякий сходящийся дважды дифференцируемый ряд Фурье

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu u_n(\sigma) e^{-i \omega_n \tau} + p_0^\mu \tau, \quad \alpha_{-n}^\mu = \overline{\alpha_n^\mu}, \quad (1.18)$$

является решением задачи (1.3)–(1.9) (ограничимся вещественными X^μ).

Рассматриваемый подход можно обобщить на предельные случаи нулевой и бесконечно большой массы m_a на конце струны. При $m_a = 0$ условия (1.9) и (1.12) приобретут соответственно вид $X'^\mu(\tau, \sigma_a) = 0$ и $u'(\sigma_a) = 0$. Случай $m_a \rightarrow \infty$ будет рассмотрен ниже – он не сводится к равенству $Q_a = 0$.

Любопытно отметить, что задача (1.3)–(1.9) с $Q_1 = 0$ и $0 < Q_2 < \infty$ для каждой из координат X^μ полностью совпадает с описанной в [8] задачей о крутильных колебаниях упругого массивного цилиндрического стержня с закрепленным концом и с массивным диском на втором конце. При этом в роли $X^\mu(\tau, \sigma)$ выступает угол поворота стержня в сечении σ в момент τ . Случаю $Q_1 > 0$ соответствует подобный стержень с двумя дисками на концах.

Задача (1.3)–(1.9) для релятивистской струны отличается от ее механического аналога, в частности, тем, что ряд (1.18) имеет физический смысл только в том случае, когда его сумма удовлетворяет условиям ортонормальности (1.2), а также условиям (1.8). Чтобы лучше понять, насколько широк класс удовлетворяющих этим условиям мировых поверхностей, поставим предварительно вопрос о полном описании всех движений релятивистской струны. Например, для акустической струны с заданными краевыми условиями любое движение можно получить, задав начальное положение и начальную скорость ее точек [7, 8]. Это утверждение справедливо и для струны с действием (1.1), т.е. для описания мировой поверхности достаточно задать на отрезке $[0, \pi]$ две функции $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$, связанные с $X^\mu(\tau, \sigma)$ условиями

$$X^\mu(0, \sigma) = \rho^\mu(\sigma), \quad \dot{X}^\mu(0, \sigma) = v^\mu(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (1.19)$$

Условия (1.2) накладывают на функции $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$ ограничение $\rho'^2 + v^2 = 0$, $(\rho'v) = 0$. Если оно выполнено, то мировая поверхность струны с начальными данными (1.19) и краевыми условиями (1.4) определяется однозначно [9]. Если же имеет место ряд (1.18), то коэффициенты α_n^μ можно найти, подставив (1.18) в (1.19) и разложив $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$ в ряды Фурье по функциям (1.15) с помощью скалярного произведения (1.13) с учетом (1.17):

$$\alpha_0^\mu = \frac{\langle \rho^\mu, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle}, \quad p_0^\mu = \frac{\langle v^\mu, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle}, \quad \alpha_n^\mu = \frac{\langle \rho^\mu, u_n \rangle + i\omega_n^{-1} \langle v^\mu, u_n \rangle}{2\langle u_n, u_n \rangle}, \quad n \neq 0. \quad (1.20)$$

Следует отметить, что (в отличие от ситуации с акустической струной) заданной мировой поверхности релятивистской струны соответствует не единственная пара функций $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$, а целое семейство. Это обусловлено произволом (1.6)–(1.7) в выборе параметров на мировой поверхности. Преобразование ρ^μ и v^μ при заменах (1.6)–(1.7) имеет довольно сложный вид, так как уравнения $\tau = 0$ в старых и $\tilde{\tau} = 0$ в новых координатах задают, вообще говоря, разные начальные кривые.

Имея в виду анализ этой проблемы и включение в рассмотрение случая $m_a \rightarrow \infty$ (на одном из концов), прибегнем к подходу, изложенному в следующем разделе.

2. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ВЕКТОРА СКОРОСТИ КОНЦА СТРУНЫ

Рассмотрим общее решение уравнения (1.3)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [\Psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \Psi_-^\mu(\tau - \sigma)]. \quad (2.1)$$

Производные введенных здесь функций вследствие условий (1.2) изотропны:

$$\Psi_-'^2(\xi) = \Psi_+'^2(\xi) = 0. \quad (2.2)$$

Преобразуем краевые условия (1.4) (в соответствии с (1.5) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$), подставив в них (2.1) с учетом (2.2):

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\Psi'_+{}^\mu(\tau + \sigma_a) + \Psi'_-{}^\mu(\tau - \sigma_a)}{\sqrt{2(\Psi'_+(\tau + \sigma_a)\Psi'_-(\tau - \sigma_a))}} + \frac{(-1)^a \gamma}{2m_a} [\Psi'_+{}^\mu(\tau + \sigma_a) - \Psi'_-{}^\mu(\tau - \sigma_a)] = 0. \quad (2.3)$$

Первое из условий (2.3) связывает $\Psi'_-{}^\mu(\xi)$ с $\Psi'_+{}^\mu(\xi)$, второе — $\Psi'_+{}^\mu(\xi + 2\pi)$ с $\Psi'_-{}^\mu(\xi)$. Эта связь весьма проста в предельных случаях $m_a = 0$ и $m_a \rightarrow \infty$ [9]:

$$m_a = 0 \Rightarrow \Psi'_+{}^\mu(\xi + 2\sigma_a) = \Psi'_-{}^\mu(\xi), \quad (2.4)$$

$$m_a \rightarrow \infty \Rightarrow \Psi'_\pm{}^\mu(\xi \pm 2\sigma_a) = (2W_a^\mu W_{a\nu} - \delta_\nu^\mu) \Psi'_\mp{}^\nu(\xi). \quad (2.5)$$

Здесь $\delta_\nu^\mu = \text{diag}(1; 1; 1; \dots)$, $W_a^\mu = \text{const}$ — единичный вектор скорости бесконечно тяжелого конца струны (такой конец движется прямолинейно с постоянной скоростью).

В случае конечных ненулевых масс удобно в качестве новых переменных ввести единичные векторы скорости концов струны:

$$U_a^\mu(\tau) = \frac{\dot{X}^\mu(\tau, \sigma_a)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau, \sigma_a)}} = \frac{\Psi'_+{}^\mu(\tau + \sigma_a) + \Psi'_-{}^\mu(\tau - \sigma_a)}{\sqrt{2(\Psi'_+(\tau + \sigma_a)\Psi'_-(\tau - \sigma_a))}}, \quad U_a^2(\tau) = 1. \quad (2.6)$$

В работе [9] показано, что краевые условия (2.3) с учетом (2.6) можно свести к следующей системе уравнений ($k_a = \gamma/m_a$):

$$U_1'^\mu(\tau) = k_1(\delta_\nu^\mu - U_1^\mu U_{1\nu}) \Psi'_+{}^\nu(\tau), \quad (2.7)$$

$$U_1^\mu(\tau) = W_1^\mu + \frac{k_1}{2} [\Psi_+^\mu(\tau) - \Psi_-^\mu(\tau)]; \quad (2.8)$$

$$U_2'^\mu(\tau) = k_2[\delta_\nu^\mu - U_2^\mu(\tau)U_{2\nu}(\tau)] \Psi'_-{}^\nu(\tau - \pi), \quad (2.9)$$

$$U_2^\mu(\tau) = \tilde{W}_2^\mu - \frac{k_2}{2} [\Psi_+^\mu(\tau + \pi) - \Psi_-^\mu(\tau - \pi)]. \quad (2.10)$$

Интегрируя системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) и (2.9) и пользуясь соотношениями (2.8), (2.10) (W_a^μ — постоянные интегрирования), мы можем продолжить на всю числовую ось функции $\Psi_-^\mu(\tau)$ и $\Psi_+^\mu(\tau)$, определенные на конечных отрезках с помощью начальных условий вида (1.19) [9].

Возводя в скалярный квадрат левую и правую части (2.7) или (2.9), учитывая при этом (2.2) и (2.6), получим соотношения

$$(U_a(\tau) \Psi'_\pm(\tau \pm \sigma_a)) = k_a^{-1} \sqrt{-U_a'^2(\tau)}. \quad (2.11)$$

Подставляя их в (2.7), (2.9) и используя (2.8) и (2.10), мы придем к следующим выражениям, позволяющим определить $X^\mu(\tau, \sigma)$ по заданным k_a и $U_a^\mu(\tau)$ [10]:

$$\Psi'_\pm{}^\mu(\tau \pm \sigma_a) = k_a^{-1} [\mp(-1)^a U_a'^\mu(\tau) + \sqrt{-U_a'^2(\tau)} U_a^\mu(\tau)]. \quad (2.12)$$

Покажем, что формулы (2.7)–(2.12) при известных m_a дают возможность восстановить с точностью до трансляций мировую поверхность струны, если вектор-функция

$U_1^\mu(\tau)$ или $U_2^\mu(\tau)$ задана на отрезке с длиной 2π (при выполнении условий (1.5)). Пусть $0 < m_a < \infty$ и функция $U_1^\mu(\tau)$ задана на отрезке $[0, 2\pi]$. Найдя с помощью (2.12) на том же отрезке $\Psi_\pm^\mu(\tau)$ и подставив Ψ_-^μ в систему (2.9), получим $U_2^\mu(\tau)$ на отрезке $[\pi, 3\pi]$ (начальное условие для системы $U_2^\mu(\pi) = W_2^\mu$ для движений без разрывов $\dot{X}^\mu$ определяется выражением (2.6)). После этого с помощью соотношения (2.10) находим $\Psi_+^\mu(\tau)$ на отрезке $[2\pi, 4\pi]$ и, подставив Ψ_+^μ в (2.7), продолжаем на этот отрезок $U_1^\mu(\tau)$. Процедура продолжения U_1^μ и U_2^μ может повторяться рекуррентно. В случаях $m_a = 0$ и $m_a \rightarrow \infty$ использование (2.4) или (2.5) упрощает описанный механизм.

Итак, мы видим, что для полного описания движения струны достаточно задать одну из вектор-функций $U_1^\mu(\tau)$, $U_2^\mu(\tau)$, $\Psi_+^\mu(\tau)$ или $\Psi_-^\mu(\tau)$ на отрезке с длиной 2π . На этом отрезке допустима замена параметра τ , приводящая на мировой поверхности к репараметризации (1.6)–(1.7). Такой способ представления движения струны эквивалентен заданию функций $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$ (1.19), но характеризуется более простой интерпретацией замен (1.6)–(1.7).

Обратимся теперь к тем движениям релятивистской струны, исследование которых является целью настоящей работы, т.е. к движениям с параметризацией, удовлетворяющей условиям (1.8). Используя обозначения (2.1), (2.6) и выражение (2.11), эти условия можно переписать в ином виде:

$$\sqrt{\dot{X}^2(\tau, \sigma_a)} = \sqrt{(\Psi'_+ \Psi'_-)/2} = (U_a(\tau) \Psi'_\pm) = k_a^{-1} \sqrt{-U_a'^2(\tau)} = C_a \quad (2.13)$$

(здесь $\Psi'_\pm = \Psi'_\pm(\tau \pm \sigma_a)$), или, учитывая (1.10):

$$U_1'^2(\tau) = -Q_1^2 = \text{const}, \quad U_2'^2(\tau) = -Q_2^2 = \text{const}. \quad (2.14)$$

Последние соотношения можно получить, используя определение кривизны k_a как модуля вектора $dU_a^\mu/ds = U_a'^\mu(\tau) d\tau/ds$ и условие (1.8).

При выполнении эквивалентных (1.8) условий (2.13) или (2.14) уравнения (2.7), (2.9) и (2.12) приобретают линейный вид (здесь $(\pm)$ означает $(\tau \pm \pi)$, аргумент (τ) опущен):

$$U_1'^\mu = k_1 \Psi_+^\mu - Q_1 U_1^\mu, \quad \Psi_\pm^\mu = k_1^{-1} [\pm U_1'^\mu + Q_1 U_1^\mu]; \quad (2.15)$$

$$U_2'^\mu = k_2 \Psi_-^\mu - Q_2 U_2^\mu, \quad \Psi_\pm^\mu(\pm) = k_2^{-1} [\mp U_2'^\mu + Q_2 U_2^\mu]. \quad (2.16)$$

Будем искать решения этих уравнений, имеющие на всей числовой оси вид гармоник. Зададим, например, вектор скорости 1-го конца $U_1^\mu(\tau) = \beta^\mu e^{-i\omega\tau}$. Из второго уравнения (2.15) следует $\Psi_\pm^\mu(\tau) = \beta^\mu k_1^{-1} (Q_1 \mp i\omega) e^{-i\omega\tau}$. Проинтегрировав это выражение и воспользовавшись (2.10), найдем для $\omega \neq 0$: $U_2^\mu(\tau) = -\beta^\mu k_1^{-1} k_2 [\cos \pi\omega + (Q_1/\omega) \sin \pi\omega] e^{-i\omega\tau}$. Подстановка $U_2^\mu(\tau)$ в любое из уравнений (2.16) приводит к условию, которому должна удовлетворять частота ω . Это условие, как и следовало ожидать, совпадает с (1.16).

Вследствие линейности уравнений (2.15)–(2.16) их решения – вектор-функции (2.6), удовлетворяющие условиям (2.14), – можно искать в виде рядов

$$U_1^\mu(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n^\mu e^{-i\omega_n \tau}, \quad U_2^\mu(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta_n \beta_n^\mu e^{-i\omega_n \tau}, \quad \beta_{-n}^\mu = \overline{\beta_n^\mu}, \quad (2.17)$$

где

$$\Theta_n = (C_1/C_2)u_n(\pi) = (-1)^n(k_2/k_1)[(\omega_n^2 + Q_1^2)/(\omega_n^2 + Q_2^2)]^{1/2}$$

получены с помощью (1.16) и (1.10), ω_n – корни (1.16). Коэффициенты β_n^μ позволяют найти как U_1^μ и U_2^μ , так и

$$\Psi_\pm^\mu(\tau) = k_1^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_n^\mu (Q_1 \mp i\omega_n) e^{-i\omega_n \tau}.$$

С другой стороны, дифференцируя ряд (1.18), мы получим

$$\Psi_\pm^{\prime\mu}(\tau \pm \sigma) = \dot{X}^\mu \pm X^{\prime\mu} = p_0^\mu - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu \omega_n \left(i \pm \frac{\omega_n}{Q_1} \right) e^{-i\omega_n(\tau \pm \sigma)}. \quad (2.18)$$

Сравнивая эти выражения, найдем взаимно однозначную с точностью до констант α_0^μ и C_1 связь α_n^μ с β_n^μ (то же следует из (1.18), (1.8) и (2.6)):

$$p_0^\mu = C_1 \beta_0^\mu, \quad \alpha_n^\mu = iC_1 \omega_n^{-1} \beta_n^\mu \quad (n \neq 0), \quad C_1 = Q_1/k_1. \quad (2.19)$$

С помощью (2.19) можно найти $X^\mu(\tau, \sigma)$ по известному ряду (2.17) для U_1^μ .

Обратим внимание на особенности интересующего нас класса движений, характерные для случаев $m_a = 0$ и $m_a \rightarrow \infty$. Например, при $m_2 \rightarrow \infty$ вектор U_2^μ – постоянная величина: $U_2^\mu(\tau) = W_2^\mu$. Рассмотрим движения, удовлетворяющие условиям (2.14), причем $Q_2 = 0$. Используя соотношения (2.15), а также (2.5) вместо теряющих смысл уравнений (2.16), мы придем к выводу, что единственная функция $U_1^\mu(\tau)$, определяющая такое движение струны, подчиняется условию

$$U_1^{\prime\mu}(\tau + 2\pi) + Q_1 U_1^\mu(\tau + 2\pi) = A_\nu^\mu [-U_1^{\prime\nu}(\tau) + Q_1 U_1^\nu(\tau)], \quad (2.20)$$

где $A_\nu^\mu = 2W_2^\mu W_{2\nu} - \delta_\nu^\mu$. Подстановка гармоник $U_1^\mu(\tau) = \beta^\mu e^{-i\omega\tau}$ в (2.20) приводит к соотношению

$$A_\nu^\mu \beta^\nu = \frac{Q_1 - i\omega}{Q_1 + i\omega} e^{-2\pi i\omega} \beta^\mu \equiv \Lambda(\omega) \beta^\mu,$$

которое означает, что β^μ должен быть собственным вектором матрицы A_ν^μ . Эта матрица имеет два собственных значения: $\Lambda = 1$ с собственным вектором W_2^μ и частотами ω , определяемыми уравнением $\Lambda(\omega) = 1$, т.е.

$$\omega/Q_1 = -\operatorname{tg} \pi\omega, \quad (2.21)$$

и $\Lambda = -1$, которому соответствуют $D - 1$ линейно независимых собственных векторов β^μ , ортогональных W_2^μ , с частотами, удовлетворяющими уравнению

$$\omega/Q_1 = \operatorname{ctg} \pi\omega \quad ((W_2\beta) = 0). \quad (2.22)$$

Обозначив через $\tilde{\omega}_n$ корни уравнения (2.21) и через ω_n корни уравнения (2.22), получим решение (2.20) в виде ряда

$$U_1^\mu(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n W_2^\mu e^{-i\tilde{\omega}_n \tau} + \beta_n^\mu e^{-i\omega_n \tau}), \quad (W_2\beta_n) = 0. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.22) совпадает с (1.16), если в последнем положить $Q_2 = 0$ (что соответствует $m_2 \rightarrow \infty$). В то же время наличие уравнения (2.21) и условия $(W_2\beta) = 0$ кажется парадоксальным.

Объясняет ситуацию тот факт, что выполнение условия (2.14) $Q_2 = 0$ обусловлено равенством $k_2 = \gamma/m_2 = 0$ и не требует выполнения для этого конца условия (1.8) (см. (1.10)). Следовательно, для движений (2.23) изначально не предполагалась пропорциональность параметра на траектории 2-го конца натуральному, поэтому для них нельзя считать справедливыми выражения (1.9) и (1.16) (имеет место “частичная” справедливость – не для всех β^μ).

В противоположном предельном случае $m_2 = 0$, используя (2.4), можно получить уравнение, отличающееся от (2.20) заменой матрицы A_ν^μ на единичную δ_ν^μ . Для всех β^μ частоты гармоник определяются уравнением (2.21), которое может быть получено при использовании $X'^\mu(\tau, \pi) = 0$ в качестве краевого условия (1.9) или просто предельным переходом $Q_2 \rightarrow \infty$ в (1.16).

Как было сказано выше, всякую мировую поверхность струны вида (1.1) можно определить, задав, например, единичную вектор-функцию $U_1^\mu(\tau)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. С помощью замены параметра τ , эквивалентной замене (1.6)–(1.7), всегда можно добиться *на этом же отрезке* выполнения первого из условий (2.14). При этом оба условия (2.14) на всей числовой оси, вообще говоря, выполнены не будут. Другими словами, для произвольного движения струны в калибровке (1.2) можно ввести параметр, пропорциональный натуральному лишь на конечном отрезке траектории одного конца (с длиной $\Delta\tau = 2\pi$ при выполнении условий (1.5)).

Вясним, насколько ограничивает класс движений требование выполнения условий (2.14) или (1.8) на всей числовой оси.

3. ПОЛНОТА СЕМЕЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И КЛАССИФИКАЦИЯ МИРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Покажем, что любое движение релятивистской струны (1.1), которое в параметризации с ортонормальной калибровкой (1.2) удовлетворяет условию (1.8), представимо в виде ряда Фурье (1.18), сходящегося к X^μ . Для каждого такого движения условиями (1.19) определены функции $\rho^\mu(\sigma)$ и $v^\mu(\sigma)$ (для разных движений разные [9]), и с помощью (1.20) можно найти коэффициенты ряда Фурье. Следовательно, необходимо доказать полноту семейства функций (1.15), например, в классе непрерывных функций.

ТЕОРЕМА 1. Система собственных функций (1.15) краевой задачи (1.11)–(1.12) (где $Q_1, Q_2 > 0$) полна в классе $C_{[0, \pi]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поставим в соответствие краевой задаче (1.11)–(1.12) “дуальную” задачу

$$w'' + \lambda w = 0, \quad Q_1 w(0) - w'(0) = 0, \quad Q_2 w(\pi) + w'(\pi) = 0, \quad (3.1)$$

которая является классической задачей Штурма–Лиувилля [7]. Собственные значения задач (1.11)–(1.12) и (3.1) $\lambda_n = \omega_n^2$, $n \geq 1$, совпадают (у последней отсутствует значение $\lambda_0 = 0$), частоты ω_n определяются одним и тем же уравнением (1.16).

Собственные функции задачи (3.1) (ими могут служить производные функций (1.15)) выберем в виде

$$w_n(\sigma) = \sin \omega_n \sigma + Q_1^{-1} \omega_n \cos \omega_n \sigma, \quad w_n = -\omega_n^{-1} u'_n(\sigma), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Покажем, что всякую непрерывную функцию $f(\sigma)$ можно приблизить в норме C функцией $\tilde{f}(\sigma)$ более высокого класса гладкости, удовлетворяющей определенным краевым условиям $-\forall \varepsilon > 0, \forall f \in C_{[0, \pi]} \exists \tilde{f} \in C_{[0, \pi]}^3$:

$$Q_1 \tilde{f}'(0) - \tilde{f}''(0) = 0, \quad Q_2 \tilde{f}'(\pi) + \tilde{f}''(\pi) = 0, \quad \|f - \tilde{f}\|_C < \varepsilon/2. \quad (3.3)$$

Для этого достаточно, используя теорему Вейерштрасса, приблизить f многочленом $P(\sigma)$ так, что $\|f - P\|_C < \varepsilon/4$, и положить $\tilde{f} = P(\sigma) + \Delta_0(\sigma) + \Delta_\pi(\sigma)$. Здесь $\Delta_0(\sigma)$ и $\Delta_\pi(\sigma)$ — малые поправки, обеспечивающие выполнение краевых условий (3.3) (если $P(\sigma)$ им не удовлетворяет). Можно взять, например, $\Delta_0(\sigma) = \tilde{\varepsilon} e^{-A\sigma^2/(\pi-\sigma)}$, где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon/4) \operatorname{sign} \Pi$, $A = 2\pi|\Pi|/\varepsilon$, $\Pi = P''(0) - Q_1 P'(0)$; $\Delta_\pi(\sigma)$ строится аналогично.

Функция $\tilde{f}' \in C_{[0, \pi]}^2$ удовлетворяет краевым условиям (3.1) и вследствие теоремы Стеклова [7, 11] разложима в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям (3.2) задачи Штурма–Лиувилля (3.1):

$$\tilde{f}'(\sigma) = \sum_{n=1}^N \phi_n w_n(\sigma) + \delta_{f'}(\sigma), \quad \|\delta_{f'}\|_C < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad \phi_n = \frac{(\tilde{f}', w_n)}{(w_n, w_n)}, \quad (3.4)$$

где $(f, g) = \int_0^\pi f \bar{g} d\sigma$. В силу равномерной сходимости этот ряд можно почленно интегрировать. С учетом (3.2) получим

$$\tilde{f}(\sigma) = \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n u_n(\sigma) + \delta_f(\sigma), \quad \|\delta_f\|_C < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \tilde{f}_n = -\frac{\phi_n}{\omega_n}. \quad (3.5)$$

Постоянная интегрирования равна $\tilde{f}_0$. Из неравенств в (3.3) и (3.5) следует завершающая доказательство оценка:

$$\left\| f(\sigma) - \sum_{n=0}^N \tilde{f}_n u_n(\sigma) \right\|_C < \varepsilon. \quad \square$$

К гладкой функции $\tilde{f}(\sigma) \in C_{[0, \pi]}^3$, удовлетворяющей краевым условиям (3.3), ее ряд Фурье (3.5) сходится в норме C , т.е. равномерно, и коэффициенты этого ряда $\tilde{f}_n$ можно находить как с помощью скалярного произведения (1.13) по типу (1.20), так и посредством предварительного определения ϕ_n . Эти способы эквивалентны, так как $(f', w_n) = -\omega_n \langle f, u_n \rangle$ и $(w_n, w_n) = \langle u_n, u_n \rangle$.

В случае $f \in C_{[0, \pi]}$ для равномерной сходимости ее ряда Фурье требуется выполнение дополнительных условий гладкости [12]. Естественно предполагать, что эти условия выполнены для определяющих движение струны функций (1.19) и их первых и вторых производных, что обеспечивает сходимость и дифференцируемость соответствующих рядов на $(0, \pi)$.

Отметим, что система, объединяющая u_n и w_n (равно как и система их линейных комбинаций $e^{-i\omega_n\tau}$, $n \in \mathbb{Z}$), полна в классе $C_{[-\pi, \pi]}$. Отсюда следует полнота этих систем в C_I , где I – произвольный отрезок с длиной 2π .

Доказательство этих утверждений мы не приводим ввиду ограниченности места, а также потому, что справедливость их фактически доказана в разделе 2. Действительно, зададим, например, произвольную функцию $U_1^\mu(\tau)$, $\tau \in [-\pi, \pi]$ (можно для единственного значения μ). Определив однозначно с помощью (2.15) на том же отрезке $\Psi_\pm^\mu(\tau)$, мы найдем функцию $X^\mu(\tau, \sigma)$ – решение задачи (1.3)–(1.9) (с точностью до константы интегрирования α_0^μ) в треугольнике: $\sigma \geq 0$, $\tau + \sigma \leq -\pi$, $\tau - \sigma \geq -\pi$. Это позволяет определить функции (1.19), коэффициенты ряда α_n^μ (1.20) и с помощью (2.19) – коэффициенты β_n^μ разложения в ряд (2.17) заданной функции $U_1^\mu(\tau)$.

Сходящийся ряд (1.18) порождает физическое движение струны только в том случае, если выполнены условия ортонормальной калибровки в виде (1.2) или (2.2), а также требование (натуральности параметра) (1.8) или (2.13). Им должны удовлетворять ряд (1.18) и порождаемые им ряды (2.18). Можно также воспользоваться рядами (2.17), которые равенствами (2.19) взаимно однозначно связаны с (1.18). В силу соотношений (2.6), (2.11)–(2.13) условия (2.2) и (1.8) эквивалентны условиям $U_a^2(\tau) = 1$ и (2.14). Подставим в эти условия ряды (2.17), считая их абсолютно сходящимися:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} R_a^{mn}(\beta_m\beta_n)e^{-i(\omega_m+\omega_n)\tau} &= 1, \\ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} T_a^{mn}(\beta_m\beta_n)e^{-i(\omega_m+\omega_n)\tau} &= Q_a^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь $R_1^{mn} = 1$, $R_2^{mn} = \Theta_m\Theta_n$, $T_a^{mn} = \omega_m\omega_n R_a^{mn}$. Ниже мы установим, что лишь три из четырех условий (3.6) независимы (как и в системе (1.8)–(2.2)).

Покажем, что равенства (3.6) возможны только в случае

$$(\beta_m\beta_n) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad m+n \neq 0. \quad (3.7)$$

В силу (2.19) условия $(\beta_m\beta_n) \equiv \eta_{\mu\nu}\beta_m^\mu\beta_n^\nu = 0$ эквивалентны $(\alpha_m\alpha_n) = 0$.

Предварительно исследуем свойства сумм $\omega_m + \omega_n$ корней уравнения (1.16).

ЛЕММА. *Расстояния $\Delta_n = \omega_{n+1} - \omega_n$ между соседними неотрицательными корнями уравнения (1.16) ($Q_a > 0$) строго монотонно возрастают с ростом n :*

$$\Delta_n > \Delta_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем (1.16) к виду

$$(Q_1 + Q_2)^{-1}(\omega - Q_1Q_2/\omega) = \operatorname{ctg} \pi\omega, \quad (3.8)$$

пополнив при этом множество корней (3.8) значением $\omega_0 = 0$. Положительные корни (3.8) ω_n определяются точками пересечения графика функции $F(\omega) = (Q_1 + Q_2)^{-1} \times (\omega - Q_1Q_2/\omega)$ с n -й ветвью котангенса, поэтому

$$n-1 < \omega_n < n \quad \forall n \geq 1. \quad (3.9)$$

Взяв равенство (3.8) для значений $\omega = \omega_n$ и $\omega = \omega_{n+1}$, вычтем первое из второго. Реализовав тождество $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = (1 + \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y) / \operatorname{ctg}(y - x)$, получим для $\Delta_n = \omega_{n+1} - \omega_n$ выражение

$$\Delta_n = \frac{(Q_1 + Q_2)\omega_n\omega_{n+1}}{Q_1Q_2 + \omega_n\omega_{n+1}} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg} \pi\omega_{n+1} \cdot \operatorname{ctg} \pi\omega_n}{-\operatorname{ctg} \pi\Delta_n}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим функцию $\Phi(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^2 - (Q_1 + Q_2)\Delta \operatorname{ctg} \pi\Delta$, строго монотонно возрастающую на интервале $(0, 1)$. Так как $\Delta_n > 0$, а неравенство $\Delta_n < 1$ следует из строгой монотонности $F(\omega)$ и свойств котангенса, то для доказательства леммы достаточно доказать, что $\forall n \geq 1: \Phi(\Delta_n) > \Phi(\Delta_{n-1})$.

С помощью (3.8) преобразуем (3.10) к виду (здесь $\Omega_n = Q_1Q_2 + \omega_n\omega_{n+1}$)

$$\Phi(\Delta_n) = \Delta_n^2 + \Omega_n + [(Q_1^2 + Q_2^2)\omega_n\omega_{n+1} - Q_1Q_2(\omega_n^2 + \omega_{n+1}^2)]/\Omega_n.$$

Отметим, что данное выражение справедливо и для $n = 0$, так как из (3.8) следует $\Phi(\Delta_0) = \Phi(\omega_1) = Q_1Q_2$.

Вычитая $\Phi(\Delta_{n-1})$ из $\Phi(\Delta_n)$, получим после преобразований

$$\Phi(\Delta_n) - \Phi(\Delta_{n-1}) = (\omega_{n+1} - \omega_{n-1})\omega_n [Q_1Q_2(Q_1^2 + Q_2^2 - Q_1Q_2 + G_n) + H_n] \Omega_n^{-1} \Omega_{n-1}^{-1},$$

где $G_n = (\omega_{n+1} - \omega_n)(\omega_{n+1} + \omega_{n-1}) + \omega_n^2 + \omega_{n-1}^2$, $H_n = \omega_{n+1}\omega_n\omega_{n-1}(\omega_{n+1} - \omega_n + \omega_{n-1})$. Для всех $n \geq 1$ очевидна положительность этой разности, так как по определению $\omega_n > \omega_{n-1} \geq 0$, кроме того $Q_1^2 + Q_2^2 \geq 2Q_1Q_2$. $\square$

Перейдем к доказательству утверждения (3.7) и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Регулярно сходящиеся ряды (2.17) удовлетворяют условиям (3.6) только при выполнении равенств (3.7). Эти ряды представляют собой конечные суммы, содержащие не более D слагаемых (D – размерность $\mathbb{R}^{1,D-1}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряды (3.6) сходятся регулярно, если слагаемые перенумерованы в порядке возрастания $\omega_m + \omega_n$ (обозначим эти величины χ_l). Перенеся постоянные в левую часть, каждое из уравнений (3.6) представим в виде $\sum_l \zeta_l e^{-i\chi_l \tau} = 0$. Проведя преобразование Фурье обеих частей этого равенства (ряд допускает почленное интегрирование), мы убедимся, что оно возможно только при $\zeta_l = 0$ ($\forall l$).

Величина ζ_l равна сумме всех слагаемых вида $R_a^{mn}(\beta_m\beta_n)$ (или $T_a^{mn}(\beta_m\beta_n)$), отвечающих одной и той же сумме частот $\chi_l = \omega_m + \omega_n$. Если данное χ_l отвечает единственной паре m и n , то для этой пары из $\zeta_l = 0$ следует равенство (3.7). Исследуем все случаи совпадения сумм двух различных частот.

Покажем, что связывающее корни уравнения (1.16) равенство

$$\omega_m + \omega_n = \omega_i + \omega_j, \quad n \neq i, \quad n \neq j, \quad (3.11)$$

невозможно, если все частоты, входящие в (3.11), неотрицательны. Полагая без ограничения общности, что $m \geq n$, $i \geq j$, $n > j$, и обозначив $l = m - j$, $k = i - n$ (очевидно, что $l, k \geq 1$), перепишем (3.11) в виде

$$\omega_{j+l} - \omega_j = \omega_{n+k} - \omega_n \Leftrightarrow \Delta_j + \dots + \Delta_{j+l-1} = \Delta_n + \dots + \Delta_{n+k-1}. \quad (3.12)$$

Из леммы следует, что при $j < n$ имеют место неравенства $\Delta_j < \Delta_n, \Delta_{j+1} < \Delta_{n+1}, \dots$, поэтому при $l = k$ равенство (3.12) невозможно. Предположим, что $l \geq k+1$. Оценив левую часть (3.12) на основании (3.9): $\omega_{j+l} - \omega_j > j + l - 1 - j = l - 1 \geq k$, и заметив, что правая часть меньше k , так как все $\Delta_q < 1$, мы получаем противоречие.

Из изложенного следует, что равенство (3.11) возможно только в случае, если три из входящих в (3.11) частот положительны, а одна отрицательна (или наоборот). При этом коэффициент ζ_l при слагаемом ряда (3.6) с $e^{-i\chi_l \tau}$, где $\chi_l = \omega_m + \omega_n = \omega_i - \omega_j$, $m, n, i, j > 0$, будет содержать (вследствие доказанного выше) не более двух различных слагаемых, а равенства $\zeta_l = 0$ для U_1^μ будут иметь вид (при $m \neq n$)

$$2(\beta_m \beta_n) + 2(\beta_i \beta_{-j}) = 0, \quad 2\omega_m \omega_n (\beta_m \beta_n) - \omega_i \omega_j 2(\beta_i \beta_{-j}) = 0.$$

Мы учли, что $\omega_{-j} = -\omega_j$. Эти уравнения совместны только при $(\beta_m \beta_n) = (\beta_i \beta_{-j}) = 0$ (то же и в случае $m = n$), что доказывает утверждение (3.7).

Покажем, что условия (3.6) выполняются только в том случае, когда вещественный вектор β_0^μ отличен от нуля и времениподобен ($\beta_0^2 > 0$).

Разложим β_n^μ , $n \neq 0$, на вещественную и мнимую части: $\beta_n^\mu = \varrho_n^\mu + i\vartheta_n^\mu$. Условие (3.7) $(\beta_n \beta_n) = 0$ приводит к соотношениям: $\varrho_n^2 = \vartheta_n^2$, $(\varrho_n \vartheta_n) = 0$. Два ортогональных вещественных вектора в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$ не могут быть времениподобными. Следовательно, слагаемые в (3.6) с $m = -n$ (в силу (3.7) остальные не учитываем) при $n \neq 0$ отрицательны или равны нулю, так как $(\beta_n \beta_{-n}) = \varrho_n^2 + \vartheta_n^2 \leq 0$. Введя обозначение $b_n = 2\sqrt{-\varrho_n^2}$, $b_n \geq 0$, представим первое из уравнений (3.6) в виде $U_1^2 = \beta_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 1$. Отсюда следует времениподобность β_0^μ .

Из соотношений (3.7) $(\beta_n \beta_0) = 0$ ($\forall n \neq 0$) вытекает, что все ϱ_n^μ и ϑ_n^μ ортогональны β_0^μ . Следовательно, ненулевые ϱ_n^μ и ϑ_n^μ — пространственноподобные векторы, и справедливо представление

$$2\beta_n^\mu = b_n(e_n^\mu + ig_n^\mu), \quad e_n^2 = g_n^2 = -1, \quad (e_n g_n) = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.13)$$

Из (3.7) следует, что β_0^μ и все e_n^μ и g_n^μ ($n \geq 1$) взаимно ортогональны.

Осталось доказать, что всякое семейство векторов $\{\beta_n^\mu\}$ в $\mathbb{R}^{1,D-1}$, включающее β_0^μ ($\beta_0^2 > 0$) и $\overline{\beta_n^\mu}$ наряду с β_n^μ , удовлетворяющее условиям (3.7), содержит не более D ненулевых векторов. Предположив противное, мы построим, введя вместо $\beta_n^\mu, \overline{\beta_n^\mu}$ их линейные комбинации e_n^μ, g_n^μ , ортогональную систему из более чем D неизотропных векторов. Такая система будет линейно независимой, что невозможно в $\mathbb{R}^{1,D-1}$ (линейном пространстве размерности D). $\square$

Следствия и замечания. 1. Число различных частот $\omega_n > 0$ в рядах (2.17) не превосходит целой части $(D-1)/2$ (обозначим $N_D = [(D-1)/2]$).

2. Вследствие соотношений (2.18) вывод теоремы о конечности числа слагаемых полностью относится и к ряду (1.18), который для движений струны, удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.8), должен иметь вид

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha_0^\mu + p_0^\mu \tau + C_1 \sum_{j=1}^{N_D} \frac{b_{n_j}}{\omega_{n_j}} u_{n_j}(\sigma) [e_{n_j}^\mu \sin \omega_{n_j} \tau - g_{n_j}^\mu \cos \omega_{n_j} \tau], \quad (3.14)$$

векторы (3.13) $e_{n_j}^\mu, g_{n_j}^\mu$ и p_0^μ взаимно ортогональны, $\omega_{n_j} > 0$ — корни (1.16).

3. Константы $p_0^\mu = C_1 \beta_0^\mu$ и b_{n_j} должны удовлетворять четырем условиям (3.6), из которых в качестве трех независимых можно взять

$$\beta_0^2 - \sum_{j=1}^{N_D} b_{n_j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{N_D} \omega_{n_j}^2 b_{n_j}^2 = Q_1^2, \quad \sum_{j=1}^{N_D} \omega_{n_j}^2 \frac{\omega_{n_j}^2 + Q_1^2}{\omega_{n_j}^2 + Q_2^2} b_{n_j}^2 = \frac{k_1^2}{k_2^2} Q_2^2. \quad (3.15)$$

Четвертое условие – линейная комбинация этих трех с коэффициентами соответственно Q_1^2 , (-1) и 1 .

4. Доказанные лемма и теоремы (следовательно, и выражение (3.14)) справедливы и в случаях, когда на одном из концов $m_a = 0$ или $m_a \rightarrow \infty$, а частоты ω_n определяются уравнениями (2.21) и (2.22). При этом сохраняются лишь два из условий (3.15), относящихся к другому концу. Из коэффициентов c_n в ряду (2.23) отличен от нуля лишь c_0 .

5. В пространствах Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ ($D = 4$) и $\mathbb{R}^{1,2}$ число $N_D = 1$, т.е. возможно движение изучаемого класса только с одной частотой ω_n :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha_0^\mu + p_0^\mu \tau + B_n u_n(\sigma) [e_n^\mu \sin \omega_n \tau - g_n^\mu \cos \omega_n \tau], \quad (3.16)$$

где $B_n = C_1 Q_1 / \omega_n^2$, $p_0^2 = C_1^2 (1 + Q_1^2 / \omega_n^2)$ определяются условиями (3.15). Всякую мировую поверхность (3.16) с точностью до преобразования Пуанкаре в $\mathbb{R}^{1,D-1}$ задают следующие произвольные параметры: Q_1, Q_2 (частота ω_n определяется ими с точностью до n) и масштабный фактор C_1 (или k_1).

Лишь одно движение струны вида (3.16), а именно движение с минимальной частотой $\omega_1 > 0$, не имеет на мировой поверхности особенностей вида $\dot{X}^2 = 0$. Определенная с помощью монотонной функции $u_1(\sigma)$ (1.15) мировая поверхность этой струны (3.16) представляет собой хорошо известный геликоид, заматаемый равномерно вращающейся струной, которая сохраняет форму отрезка прямой [1, 3, 5, 13]. При этом в системе координат (связанной с p_0^μ) неподвижна точка, соответствующая единственному нулю функции $u_1(\sigma)$.

Мировые поверхности вида (3.16) с частотами ω_n , $n \geq 2$, будут иметь особенности – при $\sigma \in [0, \pi]$ существуют $(n - 1)$ линий $\sigma = \text{const}$ (нули функции $u'_n(\sigma)$), на которых X'^μ обращается в нуль, что влечет обращение в нуль индуцированной метрики ($\dot{X}^2 = X'^2 = 0$). Соответствующие точки движутся со скоростью света. Физически это можно воспринимать как вращающуюся струну, сложенную n раз, или как n совмещенных в пространстве струн, участвующих в едином вращении. Концы струн, отвечающие $X'^\mu = 0$, безмассовы, первая из струн имеет массы на концах m_1 и 0 , последняя – 0 и m_2 .

Интересно отметить, что этих особенностей ($\dot{X}^2 = 0$) лишены движения струны в пространствах размерности $D \geq 5$, определяемые выражением (3.14) и содержащие $N_D = 2$ и более различных частот ω_n , например движение, определяемое вектором $U_1^\mu(\tau) = \beta_0^\mu + b_1(e_1^\mu \cos \omega_1 \tau + g_1^\mu \sin \omega_1 \tau) + b_2(e_2^\mu \cos \omega_2 \tau + g_2^\mu \sin \omega_2 \tau)$. Множество этих мировых поверхностей описывается с точностью до движения в $\mathbb{R}^{1,D-1}$ удовлетворяющими условиям (3.15) параметрами b_{n_j} , β_0^2 , C_a и Q_a – всего $(N_D + 2)$ независимыми параметрами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, нами классифицированы движения релятивистской струны (1.1) (включая случаи $m_a = 0$ и $m_a \rightarrow \infty$ на одном из концов), допускающие при выполнении условий (1.2)

линеаризацию краевых условий вследствие ограничения (1.8) на траекториях каждого из концов струны с ненулевой конечной массой. В 3+1-мерном пространстве Минковского все эти движения являются плоскими, периодическими, имеют вид (3.16) и сводятся к равномерному вращению прямолинейной струны или нескольких таких струн. Это подтверждает результат работы [13], в которой единственность геликоидального решения данной задачи была найдена в калибровке $\tau = t$. Таким образом, использование линейности задачи в целях квантования приводит к квантованию единственного движения.

В пространствах $\mathbb{R}^{1,D-1}$, $D \geq 5$, возможны более сложные неперiodические движения (3.14) рассматриваемого класса с $N_D = [(D-1)/2]$ несоизмеримыми частотами.

Список литературы

- [1] *В.М. Барбашов, В.В. Нестеренко.* Introduction to the relativistic string theory. Singapore: World Scientific, 1990; *В.М. Барбашов, В.В. Нестеренко.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т. 1, 2. М.: Мир, 1990.
- [3] *A. Chodos, C.B. Thorn.* Nucl. Phys. 1974. V. B72. № 3. P. 509–522.
- [4] *В.М. Барбашов.* Nucl. Phys. 1977. V. B129. № 1. P. 175–188.
- [5] *В.М. Барбашов, А.М. Червяков.* ТМФ. 1988. Т. 74. № 3. С. 430–439; 1991. Т. 89. № 1. С. 105–120.
- [6] *В.М. Барбашов, В.В. Нестеренко.* ТМФ. 1977. Т. 31. № 3. С. 291–299.
- [7] *В.С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1980.
- [8] *Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинэр, М.М. Смирнов.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
- [9] *В.М. Барбашов, Г.С. Шаров.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 253–271.
- [10] *Г.С. Шаров.* ТМФ. 1995. Т. 102. № 1. С. 150–159.
- [11] *В.А. Стеклов.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
- [12] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
- [13] *В.М. Барбашов.* Classical dynamics of rotating string with massive ends. In: Strong Interactions at Long Distances. Palm Harbor, FL USA: Hadronic Press, 1995. P. 257.

Поступила в редакцию 29.XI.1995 г.,
после доработки
13.V.1996 г.

V. P. Petrov, G. S. Sharov

CLASSIFICATION OF MOTIONS OF A RELATIVISTIC STRING WITH MASSIVE ENDS WITH LINEARIZABLE BOUNDARY CONDITIONS

We classified all motions (world surfaces) of a relativistic string with massive ends, for which equations of motion and boundary conditions can be linearized through a natural parametrization of the end's trajectories. These motions can be represented as Fourier series with eigenfunctions of some generalization of the Sturm–Liouville problem. Completeness of a set of these eigenfunctions in class C is proved. It is shown that in 2 + 1 and 3 + 1-dimensional Minkowski spaces all these motions reduce to an uniform rotation of a straight string or some such spatially coincident strings (world surface is helicoid). In spaces with higher dimensionality other non-trivial motions of the investigated type are possible.