Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Никитин, Частные классы движений струны, квантуемые без аномалий,
ТМФ, 1996, том 109, номер 2, 202–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:56:47

И. Н. Никитин*

ЧАСТНЫЕ КЛАССЫ ДВИЖЕНИЙ СТРУНЫ, КВАНТУЕМЫЕ БЕЗ АНОМАЛИЙ

Исследованы конечномерные подмногообразия фазового пространства открытой бозонной струны, квантование которых свободно от аномалий при $d = 4$.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] отмечалась принципиальная возможность построения квантовой теории струн без аномалий в пространстве Минковского произвольной размерности, в частности в 4 измерениях. Для построения этой теории предлагается использовать следующие ключевые идеи.

1. Воспользуемся нековариантным гамильтоновым формализмом: репараметризационную симметрию теории зафиксируем наложением калибровок, на мировых листах струн введем определенную параметризацию.

2. Эта параметризация должна быть лоренц-инвариантной. В теории струн обычно используется лоренц-неинвариантная параметризация мирового листа “световыми” координатами, называемая калибровкой светового конуса. В этом подходе преобразования Лоренца изменяют положение мирового листа относительно неподвижной оси калибровки, они сопровождаются репараметризациями, вследствие чего квантовая аномалия в группе репараметризаций приводит к аномалии в группе Лоренца и потере лоренц-ковариантности теории. Лоренц-инвариантную параметризацию мирового листа нетрудно построить, связав ось калибровки с сохраняющимся вектором в теории струны, например с полным импульсом (калибровка Рорлиха в [1]) или спином (“динамическая калибровка светового конуса” в [2]). В этом случае преобразования Лоренца одновременно воздействуют на мировой лист и ось калибровки, при этом параметризация мирового листа сохраняется.

3. Для того чтобы получить явно лоренц-ковариантную теорию, при квантовании следует использовать набор независимых канонических переменных, явно содержащий генераторы преобразований Лоренца. В этом случае коммутационные соотношения для генераторов будут постулированы непосредственно из скобок Пуассона, и аномалий не

* Институт физики высоких энергий

возникнет. Как показывает более детальное исследование, достаточно, чтобы независимыми переменными были генераторы вращений в системе покоя (спин струны). Остальные независимые переменные должны обладать простыми скобками Пуассона. Такой набор переменных построен в [1], он состоит из конечного набора, содержащего генераторы вращений и трансляций, канонически сопряженные к ним переменные, определяющие ориентацию и общее положение струны, и независимого от него бесконечного набора лоренц-инвариантных переменных “действие–угол”. Единственная трудность, препятствующая квантованию теории в этом подходе, состоит в том, что переменные действие–угол имеют сложные области изменения, точная форма которых не изучена. Поскольку свойства квантовой теории существенно зависят от глобальной топологической структуры фазового пространства, эту структуру необходимо исследовать, а также использовать оставшийся произвол в выборе независимых канонических переменных так, чтобы сделать ее максимально простой.

В настоящее время данная программа не реализована полностью. Квантовая теория построена только для подмногообразий фазового пространства, представляющих определенные частные классы движения струн. Наиболее полно изучено 4-мерное многообразие, на котором струна имеет вид прямолинейного стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью в системе покоя. Квантовая теория прямолинейной струны [3] обладает спин-массовым спектром, состоящим из одной ведущей реджевской траектории. В работе [2] проведено квантование бесконечномерных многообразий, которым отвечают мировые листы, обладающие осевой симметрией. Спин-массовый спектр этой теории содержит бесконечный набор реджевских траекторий.

В данной работе исследуется класс конечномерных многообразий в фазовом пространстве струны, которые в общем случае не являются подмножествами осесимметричных и каждое из которых содержит прямолинейные струны. В работе используется гамильтонова механика струны в калибровке Рорлиха [1], описанная в разделе 1. В разделе 2 в фазовом пространстве струны выделены 6-мерные многообразия (ограниченные конфигурации) и показано, что эти многообразия локально изоморфны фазовому пространству системы “1-мерный осциллятор + 3-мерный ротатор”. В разделе 3 показано, что при определенных ограничениях топологического характера эти многообразия глобально изоморфны фазовому пространству системы “осциллятор+ротатор”. В разделе 4 проведено квантование этих многообразий, получены спин-массовые спектры и исследованы дискретные симметрии системы.

1. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО СТРУНЫ

Фазовым пространством открытой струны является множество $\mathcal{M}$ всевозможных замкнутых ориентированных кривых $\vec{Q}(\sigma)$ с отмеченной точкой $\vec{Q}(0)$. Эти кривые в дальнейшем именуется опорными. Параметрические инварианты опорных кривых являются сохраняющимися динамическими переменными в теории струны, например, длина кривой равна удвоенной массе струны $L = 2M$, ориентированная площадь поверхности, натянутой на кривую, не зависит от поверхности и равна удвоенному спину струны $\vec{A} = 2\vec{S}$. На опорных кривых введена натуральная параметризация: $\sigma = 2\pi l/L$, l – длина дуги кривой, отсчитываемая от отмеченной точки; $|\vec{Q}'| = M/\pi$. Опорные

кривые являются траекториями концов струны в системе покоя, причем $\vec{Q}(0)$ является положением конца в текущий момент времени. Форма струны определяется формулой (см. рис. 1)

$$\vec{x}(\sigma) = (\vec{Q}(\sigma) + \vec{Q}(-\sigma))/2, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi;$$

эволюция сводится к равномерному движению отмеченной точки по неподвижной опорной кривой: $\vec{Q}(\sigma) \rightarrow \vec{Q}(\sigma + \tau)$.

Рис. 1. Форма струны определяется следующим образом: отложим на опорной кривой две дуги равной длины, лежащие по разные стороны от точки $\vec{Q}(0)$; соединим концы дуг прямолинейным отрезком и отметим его середину. Множество таких середин описывает струну в момент времени, когда ее конец находится в точке $\vec{Q}(0)$.

Симплектическая структура фазового пространства определяется замкнутой 2-формой

$$\omega = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta \vec{Q}'(\sigma) \wedge \delta \vec{Q}(\sigma). \quad (1)$$

Факторизуем $\mathcal{M}$ по действию группы $\Gamma = SO(3) \times \mathbf{R}^3 \times S^1$ вращений, трансляций и сдвигов отмеченной точки. Произвольную опорную кривую представим в виде

$$\vec{Q}(\sigma) = \vec{e}_i Q_i(\sigma + \tau; u) + \vec{D}, \quad (2)$$

ортонормированный репер $\vec{e}_i$ и вектор $\vec{D}$ задают положение опорной кривой, τ определяет сдвиги отмеченной точки. Переменные $u \in \mathcal{M}/\Gamma$ определяют форму опорной кривой – среди всех кривых заданной формы, отличающихся на вращения, трансляции

и сдвиги отмеченной точки, выбран один представитель $Q_i(\sigma)$ (этот выбор будет конкретизирован ниже). Подставляя (2) в формулу (1), получим

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_M + \omega_S + \omega_u, \\ \omega_M &= d\tau \wedge d\mu, \quad \omega_S = \frac{1}{2} d\vec{e}_i \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}_i), \\ \omega_u &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta Q'_i(\sigma) \wedge \delta Q_i(\sigma), \quad \mu = \frac{M^2}{2\pi}, \\ \vec{S} &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \vec{Q}' \times \vec{Q}\end{aligned}\tag{3}$$

– спин струны.

Переменная $\vec{D}$ выпадает из формы и не участвует в механике. Положим $\vec{D} = 0$ (положение $Q_i(\sigma)$ зафиксируем условием $\int_0^{2\pi} d\sigma Q_i = 0$).

Форма ω_M определяет гамильтонову механику осциллятора. В подходе [1] гамильтониан струны $H = \mu$, отсюда видно, что эволюция сводится к сдвигу $\tau \rightarrow \tau + \Delta\tau$.

Форма ω_S определяет механику волчка. Направим $\vec{e}_3$ вдоль $\vec{S}$: $\vec{e}_3 = \vec{S}/S$, $\vec{e}_1 = \vec{e}$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ (ориентацию $Q_i(\sigma)$ зафиксируем условием $\int_0^{2\pi} d\sigma Q'_3 Q_i = 0$, $i = 1, 2$). В этом случае ω_S превращается в симплектическую форму ротатора:

$$\omega_S = d\vec{e} \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}), \quad \vec{e}^2 = 1, \quad \vec{S}\vec{e} = 0.$$

Форма ω_u определяет симплектическую структуру фактор-пространства $\mathcal{M}/\Gamma$. Формы ω_M , ω_S и ω_u не являются независимыми, поскольку в набор u входят переменные μ и S . Добавление ω_u к $\omega_M + \omega_S$ меняет некоторые скобки Пуассона в механике $\omega_M + \omega_S$ (в частности, $\{\tau, \vec{e}\}$). Форма ω_u не содержит переменных τ и $\vec{e}_i$, она сохраняется при преобразованиях, генерируемых μ и $\vec{S}$ в механике $\omega_M + \omega_S$ (при сдвигах τ и вращениях $\vec{e}_i$). Поэтому в механике $\omega_M + \omega_S + \omega_u$ переменные μ и $\vec{S}$ генерируют те же преобразования:

$$\{\mu, \tau\} = 1, \quad \{S^i, S^j\} = -\epsilon_{ijk} S^k, \quad \{S^i, e^j\} = -\epsilon_{ijk} e^k,$$

остальные скобки Пуассона $\{\mu, \dots\}$, $\{\vec{S}, \dots\}$ равны нулю.

Канонические преобразования фазового пространства $\delta u = \alpha X$ с гамильтонианом H : $i_X \omega = dH$ сохраняют симплектическую форму: $\delta\omega = 0$. Преобразования с динамическим параметром $\delta u = \alpha(u)X$ меняют ω на полный дифференциал: $\delta\omega = \mathcal{L}_{\alpha X} \omega = d(\alpha i_X \omega) = d\alpha \wedge dH$ (использованы соотношения $\mathcal{L}_X = i_X d + di_X$ и $d\omega = 0$). При добавлении к ω слагаемого $\Delta\omega$, сохраняющегося при преобразованиях $\delta u = \alpha(u)X$: $\forall \alpha(u) \delta\Delta\omega = 0$, генератор H этих преобразований не меняется.

Восстановление механики до 4-мерной проводится следующим образом. Вводятся канонические переменные Z_μ , P_μ – средняя координата и полный 4-импульс струны, в симплектическую форму добавляется слагаемое $dP_\mu \wedge dZ_\mu$. Опорная кривая в пространстве Минковского определяется выражением

$$Q_\mu(\sigma) = X_\mu + P_\mu \left(\frac{\sigma}{\pi} - 1 \right) - \vec{N}_\mu \vec{Q}(\sigma),\tag{4}$$

где $N_\mu^i = N_\mu^i(P)$: $N_\mu^i P_\mu = 0$, $N_\mu^i N_\mu^j = -\delta^{ij}$; $X_\mu = Z_\mu - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma_\mu^{ij}S^k$, $\Gamma_\mu^{ij} = N_\nu^i \partial N_\nu^j / \partial P_\mu$. Опорная кривая является мировой линией конца струны. Она светоподобна: $Q'^2 = 0$. Мировой лист струны определяется выражением $x_\mu(\sigma_1, \sigma_2) = (Q_\mu(\sigma_1) + Q_\mu(\sigma_2))/2$ (геометрическое место середин отрезков, соединяющих всевозможные пары точек на опорной кривой), сечение мирового листа плоскостью $x_0 = \text{const}$ дает струну в этот момент времени. Гамильтонианом системы является связь $H = (P^2 - M^2)/2\pi \approx 0$, генерирующая сдвиги $Q_\mu(\sigma) \rightarrow Q_\mu(\sigma + \tau)$.

Генераторы группы Лоренца определяются выражением

$$M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + \epsilon_{ijk} N_\mu^i N_\nu^j S^k.$$

Эти переменные генерируют преобразования Лоренца вектора X_μ и системы координат $(P_\mu/\sqrt{P^2}, \vec{N}_\mu, \vec{e}_i)$. Вектор $Q_\mu(\sigma)$ разложен по этой системе координат с коэффициентами $(M(\frac{\sigma}{\pi} - 1), Q_i(\sigma + \tau))$, сохраняющимися при преобразованиях Лоренца. В нашем подходе Z_μ , P_μ и $\vec{S}$ являются независимыми каноническими переменными, квантовые коммутационные соотношения для которых постулируются из скобок Пуассона. Нетрудно проверить, что в квантовой механике алгебра Лоренца $M_{\mu\nu}$ замкнута и Q_μ преобразуется как 4-вектор.

Переменные u параметризуют симплектическое многообразие $\mathcal{M}/\Gamma$. В работах [1] на картах этого многообразия введены симплектические координаты и исследована структура полноразмерной окрестности прямолинейной струны. Глобальная структура этого многообразия не изучена. Мы будем рассматривать в $\mathcal{M}$ подмногообразия вида $u = u(\mu, S)$.

2. ОГРАНИЧЕННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Рассмотрим семейство $\mathcal{M}_2$ опорных кривых, форма которых однозначно определяется двумя параметрами – массой и спином струны (длиной и площадью опорной кривой). Примером является семейство эллипсов. В $\mathcal{M}_2$ включаются опорные кривые заданной формы со всевозможными значениями τ и $\vec{e}_i$. Поэтому выделенные подмногообразия фазового пространства сохраняются при эволюции и при поворотах. Фактически мы рассматриваем теорию частного класса движений струны, в которой имеется вращательная инвариантность.

С учетом переменных, определяющих ориентацию и выбор отмеченной точки, такое семейство обладает шестью степенями свободы. Подстановка выражения $Q_i = Q_i(\sigma; \mu, S)$ в третье слагаемое формы (3) приводит это слагаемое к виду $g(\mu, S) dS \wedge d\mu$, где

$$g(\mu, S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial Q'_i}{\partial \mu} \frac{\partial Q_i}{\partial S}.$$

ω_u можно записать в виде $dF \wedge d\mu + dG \wedge dS$, где

$$F = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma Q'_i \frac{\partial Q_i}{\partial \mu} + \frac{\partial K}{\partial \mu}, \quad G = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma Q'_i \frac{\partial Q_i}{\partial S} + \frac{\partial K}{\partial S}. \quad (5)$$

Эти два слагаемых можно включить в ω_M и ω_S , при этом в формах переопределятся τ и $\vec{e}$.¹⁾

$$\tau^* = \tau + F, \quad \vec{e}^* = R(G)\vec{e}.$$

Таким образом, на рассматриваемых подмногообразиях фазового пространства симплектическая форма имеет вид “осциллятор + ротатор”:

$$\omega = d\tau^* \wedge d\mu + d\vec{e}^* \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}^*). \quad (6)$$

Этот результат не зависит от выбора семейства опорных кривых.

Произвольная функция K в (5) определяет канонические преобразования переменных τ^* и $\vec{e}^*$. При преобразовании

$$\tau \rightarrow \tau + \delta\tau, \quad \vec{e} \rightarrow R(\delta\alpha)\vec{e}, \quad Q_i(\sigma) \rightarrow R_{ij}(-\delta\alpha)Q_j(\sigma - \delta\tau)$$

($\delta\tau, \delta\alpha$ зависят от μ, S) меняется представитель $Q_i(\sigma)$ в классе эквивалентности $\mathcal{M}_2/\Gamma$ и не меняется $\vec{Q}(\sigma) \in \mathcal{M}_2$. Нетрудно убедиться, что изменение переменных ($\tau^*, \vec{e}^*$) при этом преобразовании можно скомпенсировать каноническим преобразованием с $K = -\mu\delta\tau - S\delta\alpha$. Поэтому канонические переменные ($\tau^*, \vec{e}^*$) не зависят от выбора представителя $Q_i(\sigma)$, вектор $\vec{e}^*$ и точка $\vec{Q}(0)|_{\tau^*=0}$ связаны с кривой $\vec{Q}(\sigma)$ инвариантным образом. Мы выберем $\vec{e} = \vec{e}^*$, $\tau = \tau^*$ и не будем делать различия между этими переменными.

3. ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В теории струн масса и спин удовлетворяют неравенству $\mu \geq S$ (условие Редже). Геометрически это условие означает, что среди всех замкнутых кривых заданной длины максимальная ориентированная площадь достигается на окружности. Таким образом, $\mathcal{M}_2$ занимает область в прямом произведении фазовых пространств осциллятора и ротатора. Имеется еще одно важное отличие $\mathcal{M}_2$ от

$$\mathbf{R}^2(\mu, \tau) \times TM(S^2)(\vec{e}, \vec{S}). \quad (7)$$

Пусть опорная кривая является (k раз сложенной) окружностью. В этом случае струна является прямолинейной (k раз сложенной). Преобразование $\tau \rightarrow \tau + C$, $\vec{e} \rightarrow R(-kC)\vec{e}$ сохраняет такие опорные кривые (см. рис. 2). Для прямолинейных струн точки фазового пространства, связанные этим преобразованием, необходимо отождествить. Прямолинейные струны выполняют роль склеек в фазовом пространстве. Если семейство опорных кривых содержит окружности, то $\mathcal{M}_2$ обладает топологической структурой, отличной от (7).

Далее мы рассмотрим многообразия $\mathcal{M}_2$, которые можно взаимно однозначно канонически отобразить в фазовое пространство системы “осциллятор + ротатор” (без ограничений на энергию осциллятора и спин ротатора).

¹⁾В данной работе $R(\alpha)$ обозначает вращение вокруг направления $\vec{S}$ на угол α .

Рис. 2. Эволюция и поворот сохраняют окружности.

Рассмотрим семейство опорных кривых, для которого область изменения переменных (μ, S) имеет вид $\mu \geq kS$ (рис. 3). Отображение в фазовое пространство “осциллятор+ротатор” $\mathcal{F}$ имеет вид

$$(\mu, \tau, \vec{S}, \vec{e}) \rightarrow (I, \tau, \vec{S}, \vec{n}),$$

$(I \geq 0, \tau \in S^1)$ – переменные действие–угол для осциллятора,

$$\mu = kS + I, \quad \vec{n} = R(k\tau)\vec{e}.$$

Отображение взаимно однозначно, только если $k \in \mathbb{N}$. При этом на верхней границе области струна должна быть прямолинейной (k раз сложенной).

Рис. 3. Область Редже для конфигураций типа “осциллятор+ротатор”.

Положим $\mu = f(I, S)$. Подставляя это выражение в форму (6), получим

$$\omega = d\tilde{\tau} \wedge dI + d\vec{n} \wedge d(\vec{S} \times \vec{n}), \quad \tilde{\tau} = f'_I \tau, \quad \vec{n} = R(f'_S \tau) \vec{e}.$$

Форма определяет скобки Пуассона²⁾:

$$\{I, \tilde{\tau}\} = 1, \quad \{S^i, S^j\} = -\epsilon_{ijk} S^k, \quad \{S^i, n^j\} = -\epsilon_{ijk} n^k.$$

Изменение τ на 2π не меняет конфигурацию. Это преобразование должно быть тождественным в $\mathcal{F}$. Отсюда следует, что $f'_I, f'_S \in \mathbf{Z}$. Обратное отображение $\tau = \tilde{\tau}/f'_I$, $\vec{e} = R(-f'_S/f'_I \cdot \tilde{\tau})\vec{n}$ однозначно при $1/f'_I, f'_S/f'_I \in \mathbf{Z}$. Отображение фазовых пространств взаимно однозначно при $f'_I = \pm 1$, $f'_S = k \in \mathbf{Z}$, т.е. при $\mu = kS \pm I$. Условие Редже выполняется во всем фазовом пространстве только при $\mu = kS + I$, $k \in \mathbf{N}$.

Области другого вида невозможно взаимно однозначно отобразить в $\mathcal{F}$, если требовать, чтобы μ зависел только от I и S . Мы также требуем, чтобы в спиновой части отображение было тождественным (спин ротатора равен спину струны). Эти требования сужают класс рассматриваемых отображений. Заметим в связи с этим, что при сужении канонических преобразований осциллятора (произвольных сохраняющих площадь диффеоморфизмов фазовой плоскости) на класс $\tilde{I} = f(I)$ ($\tilde{I}$ не зависит от τ) учет сохранения глобальной топологии фазовой плоскости оставляет только преобразования вида $\tilde{I} = I$, $\tilde{\tau} = \tau + F(I)$. Аналогичное явление происходит в рассматриваемой задаче. Локально канонические преобразования фазового пространства существуют в классе $\mu = f(I, S) \forall f$. Требование сохранения глобальной топологии отбирает в этом классе дискретный набор преобразований.

Покажем, что на верхней границе области Редже струна должна быть прямолинейной. В фазовом пространстве осциллятора множество $\{I = 0, \tau \in [0, 2\pi]\}$ представляет одну точку. Поэтому $(0, \tau, \vec{S}, \vec{n}) \rightarrow (\mu = kS, \tau, \vec{S}, \vec{e} = R(-k\tau)\vec{n}) \forall \tau$ должно представлять одну конфигурацию. Эволюция и вращение действуют на такую конфигурацию одинаково. Это возможно только в случае прямолинейной (k раз сложенной) струны.

Внутри области Редже (при $I \neq 0$) струна не должна быть прямолинейной, поскольку в этом случае в $\mathcal{F}$ возникают лишние отождествления. По той же причине внутри области опорная кривая не должна быть кратной и не должна обладать осевой симметрией, поскольку в этих случаях в $\mathcal{F}$ существуют дискретные преобразования, сохраняющие конфигурацию. Однако в частном случае, когда все опорные кривые в M_2 являются кратными и/или осесимметричными, т.е. когда эти симметрии имеются не при исключительных значениях μ и S , а во всем фазовом пространстве, такое семейство можно взаимно однозначно отобразить в $\mathcal{F}$.

Осевая симметрия. Пусть все конфигурации (может быть, за исключением граничных) являются d -кратными и обладают осевой симметрией порядка p . Осевая симметрия разбивает опорную кривую на pd симметричных участков. Сдвиг $T: \tau \rightarrow \tau +$

²⁾ Для получения этих соотношений необходимо обратить коэффициентную матрицу симплектической формы и вычислить скобки Дирака на поверхности связей $\vec{n}^2 = 1$, $\vec{S}\vec{n} = 0$.

$2\pi/pd$ эквивалентен повороту $\vec{Q}(\sigma)$ вокруг $\vec{S}$ на угол $\alpha = 2\pi\nu/pd$, где ν — число зацепления $\vec{Q}(\sigma)$ за ось симметрии $\vec{S}$ (см. рис. 4). Запишем $\alpha = 2\pi r/p$, $r = (\nu/d) \bmod p \in \mathbf{Z}_p$. При $p \neq 1$ $1 \leq r < p$, r и p взаимно просты (в противном случае $r = n\tilde{r}$, $p = n\tilde{p}$, $\tilde{p}\Delta\tau = 2\pi/nd$, $\tilde{p}\alpha = 2\pi\tilde{r}$, т.е. опорная кривая является nd -кратной). При $p = 1$ (нет осевой симметрии) $r = 0$. Для опорных кривых, пересекающих ось симметрии, ν не определено. Однако при непрерывной деформации кривой, сохраняющей осевую симметрию, pd симметричных участков одновременно пересекают ось симметрии. При этом ν меняется на pd , а r не меняется. Таким образом, в классе осесимметричных кривых r является топологическим инвариантом, все кривые в $\mathcal{M}_2$ обладают одним и тем же r . В частности, для граничной k -кратной окружности $\nu = k = d(r + pn)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Рис. 4. Осесимметричные опорные кривые, $p = 5$, $d = 1$.

Конфигурация сохраняется при преобразовании

$$U = T(2\pi/pd)R(-2\pi r/p).$$

На верхней границе области Редже могут происходить дополнительные вырождения, k может не совпадать с d . Для k -кратной окружности дискретная симметрия U является частным случаем непрерывной симметрии этой конфигурации: $T(C)R(-kC)$.

Вектор $\vec{n} = R(k\tau)\vec{e}$ сохраняется при преобразовании U : $\vec{n} \rightarrow R(2\pi(k - rd)/pd)\vec{n} = \vec{n}$. Таким образом, в $\mathcal{F}$ преобразование U является сдвигом $\tau \rightarrow \tau + 2\pi/pd$. Перейдем к новым каноническим переменным $\tau = \tilde{\tau}/pd$, $I = \tilde{I} \cdot pd$. В новых переменных U : $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau} + 2\pi$, поэтому в новом фазовом пространстве нет избыточных отождествлений, оно находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathcal{M}_2$. В следующем разделе будет показано, что при переходе к переменным $(\tilde{I}, \tilde{\tau})$ изменяется спин-массовый спектр системы.

P -отражение. Для плоских опорных кривых ($Q_3 = 0$) P -отражение является поворотом $R(\vec{S}, \pi)$. Для неплоских кривых P -отражение действует в $\mathcal{M}_2$ только при специальном выборе опорных кривых.

Поскольку $P\vec{Q}$ обладает теми же μ и $\vec{S}$, что и $\vec{Q}$, эти кривые имеют одинаковую форму и их можно совместить вращением вокруг $\vec{S}$ на некоторый угол. Таким образом, P действует в $\mathcal{M}_2$ только в том случае, если опорные кривые обладают зеркально-поворотной симметрией S_{2p} . Эта симметрия разбивает опорную кривую на

$2pd$ симметричных участков. Сдвиг $T(\Delta\tau)$, $\Delta\tau = \pi/pd$, для такой кривой эквивалентен отражению Π относительно плоскости, ортогональной $\vec{S}$, и повороту вокруг $\vec{S}$ на угол $\alpha = \pi\nu/pd$. (Плоские опорные кривые включаются сюда как частный случай $\Delta\tau = \alpha = 0$.) При непрерывной деформации кривой ν/d может измениться на $2pn$, при этом $r_2 = (\nu/d) \bmod 2p$ не меняется и $\alpha = \pi r_2/p$. Для граничной k -кратной окружности $\nu = k = d(r_2 + 2pn)$. Заметим, что $(S_{2p})^2 = C_p$, S_{2p} -симметричная кривая при $p \neq 1$ является также C_p -симметричной. При $p = 1$ кривая является P -симметричной для нечетных ν/d ($r_2 = 1$) и Π -симметричной для четных ν/d ($r_2 = 0$), см. рис. 5.

Преобразование Π действует на данные конфигурации как $R(-\alpha)T(\Delta\tau)$, поэтому $P = \Pi R(\pi) = R(\pi - \alpha)T(\Delta\tau)$. Для вектора $\vec{n} = R(k\tau)\vec{e}$: $P\vec{n} = R(\pi + \pi(k - r_2d)/pd)\vec{n} = R(\pi)\vec{n}$. Таким образом, в $\mathcal{F}$ для S_{2p} -симметричных конфигураций $P = R(\pi)T(\pi/pd)$.

Рис. 5. Опорные кривые с зеркально-поворотной симметрией, а: $p = 1$, $\nu = 1$, $r_2 = 1$; б: $p = 1$, $\nu = 2$, $r_2 = 0$; в: $p = 2$, $\nu = 1$, $r_2 = 1$ ($d = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Точки фазового пространства $S = 0$ являются особыми. В разделе 1 мы выбрали $\vec{e}_3 = \vec{S}/S$. Кроме того, при канонических отображениях производились вращения векторов вокруг направления $\vec{S}$, гамильтониан также генерирует такие вращения. Эти вращения определены только при $S \neq 0$. В квантовой механике эту особенность можно устранить при соответствующем выборе квантовых аналогов S и $\vec{n}_i$.

4. КВАНТОВАНИЕ

В предыдущем разделе мы рассмотрели 6-мерные подмногообразия фазового пространства струны, изоморфные фазовому пространству системы “осциллятор+ротатор”. Воспользуемся квантовой теорией этой системы для квантования исследуемых многообразий.

Пространство состояний: прямое произведение фоковского пространства $\alpha|0\rangle = 0$, $|I\rangle = (\alpha^+)^I|0\rangle$, $[\alpha, \alpha^+] = 1$ (α – квантовый аналог $\sqrt{T}e^{-i\tau}$) на пространство (квадратично интегрируемых) функций от вектора $\vec{n}$ на единичной сфере. При этом $\vec{S} = -i\vec{n} \times \partial/\partial\vec{n}$. Выполнены соотношения

$$\vec{S}\vec{n} = 0, \quad [S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k, \quad [S^i, n^j] = i\epsilon_{ijk}n^k.$$

Рис. 6. Спектр масс для конфигураций типа “осциллятор+ротатор”, $k = 1$.

Базис пространства состояний: $|ISS^3\rangle = |I\rangle \cdot Y_{SS^3}(\vec{n})$.

Оператор квадрата массы: $\mu = kS + I + c_0$, $I = \alpha^+ \alpha$, c_0 — произвольная c -числовая константа. Оператор S определяется соотношением [4] $S = \sqrt{\vec{S}^2 + 1/4} - 1/2$, так что $\vec{S}^2 = S(S + 1)$. Оператор S генерирует вращения $\vec{n}$ вокруг $\vec{S}$. В теории ротатора собственные значения $S = 0, 1, 2, \dots$. Спин-массовый спектр приведен на рис. 6. Спектр состоит из линейных реджевских траекторий, I является номером траектории. Состояния спектра невырождены (без учета $(2S + 1)$ -кратного вырождения по S^3).

Осевая симметрия. При квантовании C_p -симметричных конфигураций получается спектр $\mu = kS + pd\tilde{I} + c_0$, $\tilde{I} = 0, 1, 2, \dots$, т.е. в спектре рис. 6 необходимо оставить траектории с номерами, кратными pd .³⁾

Этот результат можно получить также с помощью правила отбора по квантовому числу U . Преобразование $U = T(2\pi/pd) \Leftrightarrow \alpha^+ \rightarrow e^{i2\pi/pd} \alpha^+$ можно реализовать с помощью унитарного оператора $U = e^{i2\pi I/pd}$. Для U -симметричных конфигураций $[\vec{Q}(\sigma), U] = 0$, $\vec{Q}(\sigma)$ сохраняет U . Таким образом, пространство состояний разбивается на pd изолированных секторов с разными U : не существует операторов, построенных из конфигурации $\vec{Q}(\sigma)$, которые переводили бы друг в друга состояния из разных секторов. Спектры масс для этих секторов (рис. 7) отличаются друг от друга на сдвиг вдоль оси μ . Поскольку этот сдвиг также можно получить изменением константы c_0 , имеет смысл рассматривать только один сектор с $U = 1$.

P -отражение. Для плоских конфигураций $P = e^{i\pi S} = (-1)^S$. Для S_{2p} -симметричных конфигураций $P = e^{i\pi S + i\pi I/pd} = (-1)^{S+I/pd} = (-1)^{S+\tilde{I}}$.

³⁾Полученный спектр содержится в спектре для произвольных осесимметричных конфигураций, приведенном в работе [2].

Рис. 7. Спектр масс для осесимметричной конфигурации с $p = 2$, $d = 1$, $k = 1$. Пространство состояний разбито на 2 сектора с определенными значениями $U = (-1)^I$: $U = +1$ (сплошные линии), $U = -1$ (штриховые линии).

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [5] построен оператор конфигурации $\vec{Q}(\sigma)$, удовлетворяющий всем необходимым свойствам: он эрмитов и правильно преобразуется при вращениях и эволюции. В [5] также проведено квантование 6-мерных многообразий другого типа – многообразий, глобально изоморфных фазовому пространству волчка $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$.

Рис. 8. Спектр масс для конфигураций типа “волчок”.

Поскольку фундаментальная группа этого многообразия нетривиальна: $\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$, в квантовой теории возможны два представления $SO(3)$: однозначное и двузначное,

соответствующие целым и полупелым значениям спина (рис. 8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем полученные в работе результаты.

Показано, что 6-мерные вращательно и эволюционно-инвариантные подмногообразия фазового пространства струны при определенных ограничениях топологического характера на их вид допускают взаимно однозначное каноническое отображение на фазовое пространство системы “осциллятор+ротатор” и последующее квантование.

В построенной гамильтоновой теории спин струны является независимой канонической переменной, что обеспечивает явную лоренц-ковариантность квантовой теории.

Получены спин-массовые спектры состояний, и исследованы дискретные симметрии системы. Спектры состоят из бесконечного набора линейных реджевских траекторий. Интерсепт траекторий не фиксируется при квантовании и может быть выбран таким, чтобы в теории отсутствовал тахион.

Автор благодарит Э. А. Петросяна, Г. П. Пронько, А. В. Разумова и Л. Д. Соловьева за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международной соросовской программы.

Список литературы

- [1] *G. P. Pron'ko*. Rev. Math. Phys. 1990. V. 2. № 3. P. 355; *Г. П. Пронько*. ТМФ. 1984. Т. 59. № 2. С. 240.
- [2] *И. Н. Никитин*. ЯФ. 1993. Т. 56. № 9. С. 230.
- [3] *Г. П. Пронько, А. В. Разумов*. ТМФ. 1983. Т. 56. № 2. С. 192; *В. И. Бородулин и др.*. ТМФ. 1985. Т. 65. № 1. С. 119; *Е. Б. Бердников, Г. П. Пронько*. ЯФ. 1991. Т. 54. № 3. С. 763.
- [4] *Е. Б. Бердников, Г. Г. Нанобашивили, Г. П. Пронько*. ЯФ. 1992. Т. 55. № 1. С. 203.
- [5] *И. Н. Никитин*. Частные классы движений струны, квантуемые без аномалий: Препринт ИФВЭ 96-3. Протвино: ИФВЭ, 1996.

Поступила в редакцию 25.I.1996 г.

I. N. Nikitin

SPECIAL TYPES OF STRING MOTIONS WITH ANOMALY-FREE QUANTIZATION

In a phase space of the open bosonic string finite dimensional submanifolds are studied, whose quantization is free of anomalies at $d = 4$.