Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Пронин, К. В. Степаньянц, Однопетлевое эффективное действие для произвольной теории, *ТМФ*, 1996, том 109, номер 2, 215–231

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:52:47

П. И. Пронин*, К. В. Степаньянц†

ОДНОПЕТЛЕВОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Диаграммным методом получена формула для расходящейся части однопетлевого эффективного действия для произвольного минимального оператора в четырехмерном искривленном пространстве и произвольного неминимального оператора в плоском пространстве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в квантовой теории калибровочных полей, гравитации и теории струн зависит существенным образом от развития ковариантных алгоритмов вычисления эффективного действия. На сегодняшний день построены и активно используются несколько подходов, тесно связанных друг с другом. Многие из них основаны на методе фонового поля, позволяющем избежать нековариантных вычислений в случае искривленного пространства. Данный метод сводит вычисление однопетлевого эффективного действия к нахождению детерминанта определенного эллиптического оператора, причем расходящаяся часть оказывается пропорциональной коэффициенту a_2 спектрального разложения [1–3]. Его явная форма для различных дифференциальных операторов может быть получена в рамках ряда методов. Наиболее известным из них является метод собственного времени, предложенный Швингером [4] и обобщенный на случай искривленного пространства Де Витом [5]. Несомненными достоинствами метода являются его ковариантность и достаточно тривиальная реформулировка в геометрических терминах [3]. Однако с его помощью оказалось возможным рассмотреть только простейший минимальный оператор второго порядка

$$D_{1\ i}{}^j = \nabla^\mu \nabla_\mu \delta_i{}^j + S^\mu{}_{i}{}^j \nabla_\mu + W_i{}^j. \quad (1)$$

В то же время эффективное действие есть сумма вкладов одночастично неприводимых диаграмм, в которых пропагаторы являются функционалами от фоновой метрики. Способ их вычисления при помощи метода Швингера–Де Витта был предложен в работе [6],

*Московский государственный университет, E-mail: pronin@theor.phys.msu.su

†Московский государственный университет, E-mail: stepan@theor.phys.msu.su

где также были получены явные выражения для однопетлевого эффективного действия в теориях с операторами

$$D_2 i^j = (\nabla^\mu \nabla_\mu)^2 \delta_i^j + S^{\mu\nu\alpha} i^j \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha + W^{\mu\nu} i^j \nabla_\mu \nabla_\nu + N^\mu i^j \nabla_\mu + M_i^j, \quad (2)$$

$$D_3 \alpha^\beta = \nabla^\mu \nabla_\mu \delta_\alpha^\beta - \lambda \nabla_\alpha \nabla^\beta + P_\alpha^\beta. \quad (3)$$

Дальнейшее развитие метода фонового поля было связано с обобщениями подхода на неримановы многообразия [7–11] и теории с фермионными полями [12, 13], а также разного рода изменениями в технике вычислений коэффициентов спектрального разложения [9–11]. В последнее время этот метод, изложенный в [6], был обобщен для вычисления нелокальных вкладов в эффективное действие на римановом многообразии [14].

С другой стороны, диаграммный метод, обобщенный на технику фонового поля в работах [15, 16], также может успешно применяться для конкретных вычислений. В частности, таким образом было получено выражение для эффективного действия в двухпетлевом приближении [17, 18].

Целью данной работы является построение явного выражения для однопетлевого эффективного действия для теории с произвольным дифференциальным оператором без каких-либо ограничений на его форму и порядок.

2. МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим теорию с действием $S[\varphi]$. В однопетлевом приближении эффективное действие записывается в виде

$$\Gamma^{(1)} = i\hbar \operatorname{tr} \ln D_i^j, \quad (4)$$

где $D_i^j \equiv \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi^{*i} \delta \varphi_j}$ представляет собой некоторый дифференциальный оператор, зависящий от “фонового” поля φ (при помощи латинских букв мы обозначаем весь набор индексов поля φ). В наиболее общем виде он записывается так:

$$\begin{aligned} D_i^j = & K^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_L} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} + S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-1}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} + \\ & + W^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-2}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} + N^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-3}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} + \\ & + M^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-4}} i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

При помощи коммутации ковариантных производных всегда можно добиться симметрии полей $K, S, W, N, M, \dots$ по греческим индексам. (Это условие в общем случае не является обязательным, однако оно оказывается чрезвычайно удобным при вычислениях. Поэтому далее мы всегда будем считать, что оно выполнено.)

Мы будем называть дифференциальный оператор минимальным, если $L = 2l$ и

$$K^{\mu\nu\dots\alpha} i^j = K_0^{\mu\nu\dots\alpha} \delta_i^j, \quad (6)$$

где K_0 — полностью симметричный тензор, построенный из $g_{\mu\nu}$:

$$K_0^{\mu\nu\alpha\beta\cdots} = \frac{1}{(2l-1)!!} (g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\cdots + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\cdots + \cdots) \quad (7)$$

(здесь суммирование понимается по всевозможным расстановкам индексов). Если какой-либо оператор невозможно привести к данному виду, то будем его называть неминимальным.

При помощи коммутации ковариантных производных минимальный оператор можно переписать в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} D_i^j &= \delta_i^j \square^l + S^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-1}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-1}} + \\ &+ W^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-2}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-2}} + N^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-3}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-3}} + \\ &+ M^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-4}}{}_i^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \cdots, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$, а ∇_μ — ковариантная производная:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^\beta{}_i{}^j &= \partial_\alpha T^\beta{}_i{}^j + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} T^\gamma{}_i{}^j + \omega_{\alpha i}{}^k T^\beta{}_k{}^j - T^\beta{}_i{}^k \omega_{\alpha k}{}^j, \\ \nabla_\mu \Phi_i &= \partial_\mu \Phi_i + \omega_{\mu i}{}^j \Phi_j, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ — символы Кристоффеля, а $\omega_{\mu i}{}^j$ — связность в главном расслоении над пространством-временем.

3. ПОСТРОЕНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ДИАГРАММ

Мы ставим своей задачей вычисление расходящейся части однопетлевого эффективного действия (4) как для произвольного минимального, так и неминимального операторов (поля далее будем считать вещественными). Для вычисления используем фейнмановскую диаграммную технику. Чтобы представить (4) в виде суммы однопетлевых диаграмм, выделим в дифференциальном операторе член с наибольшим количеством производных, который далее мы будем называть кинетическим. Представляя метрический тензор в виде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, его можно записать как

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\mu)^l \delta_i^j &+ O(h, \omega) && \text{(для минимального оператора),} \\ K^{\mu_1\cdots\mu_L}{}_i^j \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_L} &+ O(h, \omega) && \text{(для неминимального оператора).} \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда в случае минимального оператора выражение для однопетлевого эффективного действия (4) в матричных обозначениях можно переписать следующим образом (далее $\hbar = 1$):

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{tr} \ln D_i^j = \frac{i}{2} \text{tr} \ln \partial^{2l} + \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{1}{\partial^{2l}} V \right), \quad (11)$$

где через V обозначены все оставшиеся слагаемые:

$$V = S^{\mu_1 \dots \mu_{L-1}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-1}} + W^{\mu_1 \dots \mu_{L-2}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-2}} + \\ + N^{\mu_1 \dots \mu_{L-3}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-3}} + M^{\mu_1 \dots \mu_{L-4}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{L-4}} + \dots + O(h, \omega) \quad (12)$$

(члены с $O(h, \omega)$ получаются при разложении оператора по слабым полям $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ и $\omega_{\mu i}^j$).

Первое слагаемое в формуле (11) является некоторой численной постоянной (бесконечной), которая может быть отброшена. Разлагая логарифм во втором слагаемом в ряд Тейлора, получаем

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \text{tr} \ln \left(1 + \frac{1}{\partial^{2l}} V \right) = \frac{i}{2} \text{tr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(-\frac{1}{\partial^{2l}} V \right)^k, \quad (13)$$

что может быть графически представлено как сумма однопетлевых диаграмм с k вершинами. Очевидно, что в данном случае пропагатор в импульсном представлении имеет вид δ_i^j / k^{2l} .

В данной части мы рассмотрим построение диаграммной техники в плоском пространстве, поэтому пока положим $h_{\mu\nu} = 0$ и $\omega_{\mu i}^j = 0$. Обобщение на случай риманова многообразия будет сделано далее.

Рис. 1. Вершины в случае плоского пространства-времени.

В плоском пространстве члены с классическими полями приводят к возникновению вершин, показанных на рис. 1, выражения для которых в импульсном представлении достаточно очевидны, например S -вершина записывается в виде

$$S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{L-1}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{L-1}} \equiv (Sk). \quad (14)$$

Аналогичные обозначения будем применять и для других величин, например

$$(Sk)^{\alpha\beta} \equiv S^{\mu\nu \dots \gamma\alpha\beta} k_{\mu} k_{\nu} \dots k_{\gamma}, \\ (W(k+p))^{\alpha} \equiv W^{\mu\nu \dots \beta\alpha} (k+p)_{\mu} (k+p)_{\nu} \dots (k+p)_{\beta}. \quad (15)$$

Численные коэффициенты перед диаграммами могут быть легко определены при помощи (13).

Несмотря на то что количество диаграмм в (13) бесконечно, в плоском пространстве расходится только конечное число графов. Чтобы убедиться в этом, вычислим индекс расходимости произвольной диаграммы с s S -вершинами, w W -вершинами, n N -вершинами, m M -вершинами и т.д. ($k = s + w + n + m + \dots$).

Очевидно, что для однопетлевой диаграммы количество вершин равно количеству пропагаторов. Поэтому каждую вершину будем рассматривать вместе с одним из соседних с ней пропагаторов. Как мы ранее видели, каждая S -вершина содержит $2l - 1$ степень петлевого импульса, в то время как пропагатор дает $-2l$ степень. Поэтому каждая вершина с S -внешней линией уменьшает степень импульса на 1. Аналогично W -вершина уменьшает степень на 2, N -вершина – на 3 и т. д. Интегрирование по петлевому импульсу приводит к 4-й степени расходимости для диаграммы без внешних линий, в силу чего индекс расходимости произвольной однопетлевой диаграммы есть

$$I = 4 - s - 2w - 3n - 4m - \dots \quad (16)$$

Отсюда немедленно заключаем, что расходящимися являются только следующие диаграммы, показанные на рис. 2.

Рис. 2. Расходящиеся диаграммы в плоском пространстве: (2.A)–(2.E) – логарифмически расходящиеся; (2.F) и (2.G) – линейно расходящиеся; (2.H) – квадратично расходящаяся.

Все сказанное является справедливым и для неминимального оператора за исключением выражения для пропагатора, который в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{K^{\mu_1 \dots \mu_L} i^j \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_L}} \quad (17)$$

в координатном представлении или $(Kk)^{-1}_i{}^j$ в импульсном $((Kk)^{-1}_i{}^m (Kk)_m{}^j = \delta_i^j)$. Далее мы всегда будем предполагать, что $(Kk)^{-1}_i{}^j$ существует, это обычно достигается при помощи фиксации калибровки для всех имеющихся инвариантностей.

4. ОДНОПЕТЛЕВОЙ ВКЛАД В ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ТЕОРИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ МИНИМАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

4.1. Минимальный оператор на фоне плоского пространства. Теперь необходимо произвести вычисления расходящейся части для всех диаграмм, показанных на рис. 2. Для этого мы будем использовать размерную регуляризацию. Следовательно, как показано в [19], для того чтобы получить расходящуюся часть интеграла

$$\int d^d k f(k, p), \quad (18)$$

необходимо удерживать только логарифмически расходящиеся члены и проинтегрировать оставшийся

$$\int d^d k \frac{1}{k^{M+4}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_M}$$

согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{1}{k^{2m+5}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2m+1}} &= 0, \\ \int d^d k \frac{1}{k^{2m+4}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2l}} &= -\frac{2i\pi^2}{d-4} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle &= \frac{1}{2^m (m+1)!} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + \\ &+ g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + \dots) \end{aligned} \quad (20)$$

— результат интегрирования по угловым переменным. (Суммирование в (20) производится по всевозможным способам расстановки индексов.)

Рассмотрим сначала диаграммы с логарифмической степенью расходимости (2.A)–(2.E) (см. рис. 2). В этом случае необходимо сохранить только ведущие слагаемые в разложении по петлевому импульсу. Например, диаграмма (2.D), которая записывается как

$$\frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk)(N(k-p))}{k^{2l}(k-p)^{2l}}, \quad (21)$$

после этого принимает вид

$$(2.D)_\infty = \frac{i}{2(2\pi)^4} \int d^d k \frac{1}{k^4} \text{tr} \langle \hat{S} \hat{N} \rangle = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \hat{S} \hat{N} \rangle, \quad (22)$$

где при помощи величин со шляпками мы обозначили свертки с единичным вектором $n_\mu = k_\mu / \sqrt{k^\alpha k_\alpha}$:

$$\begin{aligned}\widehat{S} &\equiv (Sn) \equiv S^{\mu\nu\dots\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\alpha, \\ \widehat{W}^\alpha &\equiv (Wn) \equiv W^{\mu\nu\dots\beta\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\beta.\end{aligned}\quad (23)$$

Оставшиеся логарифмические диаграммы вычисляются аналогично. Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}(2. A)_\infty &= \frac{1}{64\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{S}^4 \rangle, \\ (2. B)_\infty &= -\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{W} \widehat{S}^2 \rangle, \\ (2. C)_\infty &= \frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{W}^2 \rangle, \\ (2. E)_\infty &= -\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{M} \rangle.\end{aligned}\quad (24)$$

Несколько сложнее вычисление линейно расходящихся диаграмм:

$$(2. F) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk)(W(k-p))}{k^{2l}(k-p)^{2l}} \quad (25)$$

(здесь и далее мы используем соглашение, что производные действуют на выходящую линию, импульс которой положителен, см. также рис. 2).

Данное выражение необходимо разложить в ряд по p и сохранить только логарифмически расходящиеся члены. В результате получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle 2l(pn) \widehat{S} \widehat{W} - (2l-2)p_\mu \widehat{W}^\mu \widehat{S} \rangle = \\ &= \frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle (2l-1)p_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{W} - (2l-2)p_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu \rangle\end{aligned}\quad (26)$$

(здесь было принято во внимание правило (64), сформулированное в приложении).

Заменяя $p_\mu \widehat{S} \rightarrow -\partial_\mu \widehat{S}$, мы находим окончательный ответ

$$(2. F)_\infty = \frac{1}{32\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle -(2l-1)\partial_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{W} + (2l-2)\partial_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu \rangle. \quad (27)$$

Вторая линейно расходящаяся диаграмма записывается в виде

$$(2. G) = -\frac{i}{6(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(S_{(-p)}(k))(S_{(-q)}(k+q))(S_{(p+q)}(k-p))}{k^{2l}(k-p)^{2l}(k+q)^{2l}} \quad (28)$$

(здесь индексы указывают аргумент S).

Аналогичные вычисления в данном случае приводят к результату

$$(2. G)_\infty = \frac{(2l-1)}{48\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \partial_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{S} \widehat{S} - \partial_\mu \widehat{S} \widehat{S} \widehat{S}^\mu \rangle. \quad (29)$$

Таким образом, остается вычислить только последнюю квадратично расходящуюся диаграмму

$$(2. \text{H}) = \frac{i}{4(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{(Sk)(S(k-p))}{k^{2l}(k-p)^{2l}}. \quad (30)$$

Удерживая члены, квадратичные по внешнему импульсу, немедленно получаем

$$(2. \text{H})_\infty = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \left\langle \frac{l^2}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S} \partial^\mu \hat{S} + \right. \\ \left. + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^\mu \partial_\nu \hat{S}^\nu - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{S} \right\rangle. \quad (31)$$

Собирая вместе результаты (22)–(31), находим требуемое выражение для расходящейся части однопетлевого эффективного действия оператора (8) в плоском пространстве-времени:

$$(\Gamma_\infty^{(1)})^{\text{flat}} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x \left\langle (l-1) \partial_\mu \hat{S} \widehat{W}^\mu - \frac{(2l-1)}{2} \partial_\mu \hat{S}^\mu \widehat{W} - \right. \\ - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^{\mu\nu} \partial_\nu \hat{S} + \frac{l^2}{2(2l+1)} \partial_\mu \hat{S} \partial^\mu \hat{S} + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \partial_\mu \hat{S}^\mu \partial_\nu \hat{S}^\nu + \\ \left. + \frac{(2l-1)}{3} \partial_\mu \hat{S}^\mu \hat{S} \hat{S} - \frac{(2l-1)}{3} \partial_\mu \hat{S} \hat{S} \hat{S}^\mu + \hat{S} \hat{N} + \frac{1}{2} \widehat{W}^2 + \frac{1}{4} \hat{S}^4 - \widehat{W} \hat{S}^2 - \widehat{M} \right\rangle. \quad (32)$$

4.2. Минимальный оператор на фоне искривленного пространства. Произведем обобщение полученных результатов на случай риманова многообразия. При этом мы немедленно сталкиваемся с тем, что число расходящихся диаграмм в искривленном пространстве бесконечно, т.к. вершины, содержащие $h_{\mu\nu}$, имеют $2l$ -степень импульса (а, следовательно, индекс расходимости не понижается с увеличением числа вершин), и, кроме того, число типов вершин также бесконечно.

Однако, если заметить, что окончательное выражение должно быть инвариантно относительно общекоординатных преобразований, то результат может быть найден при помощи вычисления только некоторого конечного числа расходящихся диаграмм. Действительно, мы должны, очевидно, произвести замену обычных производных в (32) ковариантными и добавить слагаемые, содержащие тензор кривизны $R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu}$. Наиболее общая форма дополнительных слагаемых имеет вид

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4 x \sqrt{-g} \left\langle a_1 R^2 + a_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_3 \widehat{W} R + a_4 \widehat{W}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \right. \\ + a_5 \nabla_\mu \hat{S}^\mu R + a_6 \nabla_\mu \hat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + a_7 \hat{S}^2 R + a_8 R_{\alpha\beta} \hat{S}^\alpha \hat{S}^\beta + a_9 R_{\alpha\beta} \hat{S}^{\alpha\beta} \hat{S} + \\ \left. + a_{10} R_{\mu\nu\alpha\beta} \hat{S}^{\mu\alpha} \hat{S}^{\nu\beta} + a_{11} F_{\mu\nu} \nabla^\mu \hat{S}^\nu + a_{12} F_{\mu\nu} \hat{S}^\mu \hat{S}^\nu + a_{13} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle, \quad (33)$$

где

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma, \\ F_{\mu\nu i}{}^j = \partial_\mu \omega_{\nu i}{}^j - \partial_\nu \omega_{\mu i}{}^j + \omega_{\mu i}{}^k \omega_{\nu k}{}^j - \omega_{\nu i}{}^k \omega_{\mu k}{}^j \quad (34)$$

(здесь мы приняли во внимание, что выражение $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ является полной производной и может быть опущено).

Коэффициенты $a_1 - a_{13}$ могут быть найдены путем вычисления диаграмм, показанных на рис. 3, которые соответствуют первому неисчезающему приближению в разложении контрчленов по полям $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ и $\omega_{\mu i}^j$.

Рис. 3. Диаграммы для вычисления эффективного действия в искривленном пространстве.

В качестве примера рассмотрим диаграммы (3.A) и (3.B) (см. рис. 3), содержащие W -вершины.

Вершина, содержащая поле $h_{\mu\nu}$ в диаграмме (3.A), согласно (12) должна быть найдена при помощи разложения кинетического члена $\square^l$ по слабому полю с точностью до первого порядка и имеет вид

$$\sum_{m=0}^{l-1} k^{2m} (k-p)^{2l-2m-2} \left(-h^{\mu\nu} k_{\mu} (k-p)_{\nu} + \frac{1}{2} h^{\alpha}{}_{\alpha} p^{\mu} (k-p)_{\mu} \right). \quad (35)$$

После этого из (13) находим полное выражение для диаграммы (3.А) в виде

$$(3. A) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \frac{1}{k^{2l}(k-p)^{2l}} (Wk) \sum_{m=0}^{l-1} k^{2m} (k-p)^{2l-2m-2} \times \\ \times \left(-h^{\mu\nu} k_\mu (k-p)_\nu + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha p^\mu (k-p)_\mu \right). \quad (36)$$

Рассматриваемая диаграмма, очевидно, расходится квадратично (это следует как и непосредственно из (36), так и из того, что добавление полей $h_{\mu\nu}$ не меняет индекс расходимости). Поэтому необходимо сохранить только члены, квадратичные по внешнему импульсу p , после чего выражение для расходящейся части диаграммы (3.А) примет вид

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \left\langle \widehat{W} \left(l(l+1)(n^\gamma p_\gamma) \left(h^{\mu\nu} n_\mu p_\nu + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\alpha (n^\beta p_\beta) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - h^{\mu\nu} n_\mu n_\nu \left(-\frac{1}{2} l(l+1)p^2 + \frac{2}{3} l(l+1)(l+2)(n^\alpha p_\alpha)^2 \right) - \frac{l}{2} h^\alpha{}_\alpha p^2 \right) \right\rangle. \quad (37)$$

Данное выражение при помощи правил, сформулированных в приложении, может быть переписано так:

$$(3. A)_\infty = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \left\langle \frac{l}{6} \widehat{W} (-h^\alpha{}_\alpha p^2 + h^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (l-1)(2l-3) \widehat{W}^{\mu\nu} (-p^2 h_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu h^\alpha{}_\alpha + 2p_\mu p_\alpha h^\alpha{}_\nu) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (2l-3)(2l-4)(2l-5) \widehat{W}^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu \right\rangle. \quad (38)$$

Однако (38) не может быть представлено как слабополюсный предел от некоторого ковариантного выражения. Дело в том, что диаграммы (3.А) и (3.В) не могут рассматриваться по отдельности. Выражение для вершины в диаграмме (3.В) легко может быть получено при помощи разложения до первого порядка по полю $h_{\mu\nu}$ ковариантных производных в члене $W^{\mu\nu\dots\alpha}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu \dots \nabla_\alpha$, после чего вся диаграмма примет вид

$$(3. B) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k \sum_{m=0}^{2l-4} (2l-3-m) W^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2l-2}} \times \\ \times (k+p)_{\mu_1} \dots (k+p)_{\mu_m} \Gamma_{\mu_{m+1}\mu_{m+2}}^{\alpha(1)} k_\alpha k_{\mu_{m+3}} \dots k_{\mu_{2l-2}}, \quad (39)$$

где $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha(1)} = (p_\beta h_\gamma{}^\alpha + p_\gamma h_\beta{}^\alpha - p^\alpha h_{\beta\gamma})/2$ – символы Кристоффеля в слабополюсном пределе.

После несложных преобразований (39) может быть записано как

$$\frac{(2l-2)(2l-3)(2l-4)}{192\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{W}^{\mu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu(pn) \rangle. \quad (40)$$

Отсюда при помощи правила (62) получаем окончательное выражение для расходящейся части диаграммы (3.В) в виде

$$(3.В)_\infty = \frac{(2l-3)(2l-4)(2l-5)}{192\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{W}^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta} p_\mu p_\nu \rangle. \quad (41)$$

Сумма (38) и (41)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \left\langle \frac{l}{6} \widehat{W} (-h^\alpha{}_\alpha p^2 + h^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} (l-1)(2l-3) \widehat{W}^{\mu\nu} (-p^2 h_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu h^\alpha{}_\alpha + 2p_\mu p_\alpha h^\alpha{}_\nu) \right\rangle \end{aligned} \quad (42)$$

в отличие от каждой из диаграмм в отдельности может быть представлена как первый не исчезающий член в слабопольном разложении ковариантного выражения

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left\langle \frac{l}{6} \widehat{W} R - \frac{1}{6} (l-1)(2l-3) R_{\mu\nu} \widehat{W}^{\mu\nu} \right\rangle, \quad (43)$$

которое и является окончательным результатом для рассмотренных графов.

Остальные диаграммы вычисляются аналогично. После достаточно громоздких вычислений была получена следующая формула для расходящейся части однопетлевого эффективного действия минимального оператора (8) в искривленном пространстве:

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left\langle (l-1) \nabla_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu - \right. \\ & - \frac{(2l-1)}{2} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{W} - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^{\mu\nu} \nabla_\nu \widehat{S} + \frac{l^2}{2(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S} \nabla^\mu \widehat{S} + \\ & + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \nabla_\nu \widehat{S}^\nu + \frac{(2l-1)}{3} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{S} \widehat{S} - \frac{(2l-1)}{3} \nabla_\mu \widehat{S} \widehat{S} \widehat{S}^\mu + \\ & + \widehat{S} \widehat{N} + \frac{1}{2} \widehat{W}^2 + \frac{1}{4} \widehat{S}^4 - \widehat{W} \widehat{S}^2 - \widehat{M} - \frac{(2l-3)(l-1)}{6} \widehat{W}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{l}{6} \widehat{W} R - \frac{(2l-1)l}{12} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu R + \frac{(2l-1)(2l-3)(l-1)}{12} \nabla_\mu \widehat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \\ & - \frac{l}{6} \widehat{S}^2 R + \frac{(2l-1)^2(l+2)}{24(2l+1)} R_{\alpha\beta} \widehat{S}^\alpha \widehat{S}^\beta + \frac{(2l-1)(l-1)}{6} R_{\alpha\beta} \widehat{S}^{\alpha\beta} \widehat{S} - \\ & - \frac{(2l-1)(l-1)^2(l+2)}{12(2l+1)} R_{\mu\nu\alpha\beta} \widehat{S}^{\mu\alpha} \widehat{S}^{\nu\beta} + l \left(\frac{1}{120} R^2 + \frac{1}{60} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \\ & + \frac{l(2l-1)}{6} \nabla_\mu \widehat{S}_\nu F^{\mu\nu} + \frac{(2l-1)^2(l+1)}{4(2l+1)} F_{\mu\nu} \widehat{S}^\mu \widehat{S}^\nu + \frac{l}{12} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Big\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

В некоторых случаях более удобна несколько иная форма записи минимального оператора:

$$\begin{aligned} D_i^j = & \delta_i^j K_0^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l}} \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l}} + S^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-1}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-1}} + \\ & + W^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-2}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-2}} + N^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-3}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-3}} + \\ & + M^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2l-4}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_{2l-4}} + \cdots, \end{aligned} \quad (45)$$

где K_0 был определен в (7).

С помощью ранее описанного метода в данном случае был получен следующий результат для расходящейся части однопетлевого эффективного действия:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\infty^{(1)} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left\langle (l-1) \nabla_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu - \frac{(2l-1)}{2} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{W} + \right. \\
& + \frac{(2l-1)}{3} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \widehat{S} \widehat{S} - \frac{(2l-1)}{3} \nabla_\mu \widehat{S} \widehat{S} \widehat{S}^\mu - \frac{(2l-1)(l^2-1)}{2(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^{\mu\nu} \nabla_\nu \widehat{S} + \\
& + \frac{(2l-1)^2 l}{4(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu \nabla_\nu \widehat{S}^\nu + \frac{l^2}{2(2l+1)} \nabla_\mu \widehat{S} \nabla^\mu \widehat{S} + \widehat{S} \widehat{N} + \frac{1}{2} \widehat{W}^2 + \frac{1}{4} \widehat{S}^4 - \widehat{W} \widehat{S}^2 - \\
& - \widehat{M} + \frac{l^2}{3(l+1)} \widehat{W} R - \frac{(2l-3)(l-1)}{3(l+1)} \widehat{W}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{l^2(2l-1)}{6(l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^\mu R + \\
& + \frac{(2l-1)(2l-3)(l-1)}{6(l+1)} \nabla_\mu \widehat{S}^{\mu\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{(2l-1)(l-1)^2(l+2)}{12(2l+1)} R_{\mu\nu\alpha\beta} \widehat{S}^{\mu\alpha} \widehat{S}^{\nu\beta} - \\
& - \frac{l^2}{2(2l+1)} \widehat{S}^2 R - \frac{(2l-1)^2(l-4)}{24(2l+1)} R_{\mu\nu} \widehat{S}^\mu \widehat{S}^\nu + \frac{(2l-1)(l-1)(l+2)}{6(2l+1)} R_{\mu\nu} \widehat{S}^{\mu\nu} \widehat{S} + \\
& + \frac{l^2(-7l^2+4l+12)}{540} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{l^2(3l^2+4l+2)}{1080} R^2 + \frac{(l+1)(2l-1)^2}{4(2l+1)} \widehat{S}^\mu \widehat{S}^\nu F_{\mu\nu} + \\
& \left. + \frac{l^2(2l-1)}{3(l+1)} F^{\mu\nu} \nabla_\mu \widehat{S}_\nu + \frac{l^3}{12} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\rangle. \quad (46)
\end{aligned}$$

5. НЕМИНИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР НА ФОНЕ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Теперь рассмотрим теорию с произвольным неминимальным оператором (5) при $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Вычисление расходящихся диаграмм здесь отличается от ранее рассмотренного случая минимального оператора из-за различной формы пропагаторов (хотя расходятся по-прежнему только графы, показанные на рис. 2).

Как и ранее, наиболее простым является вычисление логарифмически расходящихся диаграмм. Например,

$$\begin{aligned}
(2.D)_\infty &= \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (Sk)(Kk)^{-1} (N(k-p))(K(k-p))^{-1} \Big|_\infty = \\
&= \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle \widehat{S} \widehat{N} \rangle, \quad (47)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\widehat{W} &\equiv (Kn)^{-1} W^{\mu\nu\dots\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\alpha, \quad \widehat{K}^\alpha \equiv (Kn)^{-1} K^{\mu\nu\dots\beta\alpha} n_\mu n_\nu \dots n_\beta, \\
(Kn)^{-1} {}_i^m (Kn)_m^j &= \delta_i^j \quad (48)
\end{aligned}$$

и т.д. (ср. с (15)). Оставшиеся логарифмически расходящиеся диаграммы вычисляются аналогично. По форме результат совпадает с (24), однако следует помнить, что буквы со

шляпками в данных случаях обозначают различные величины. (Более общим является определение (48), которое переходит в (15) в частном случае минимального оператора, т.к. для последнего $(Kn)^{-1} = 1$.)

Рассмотрение линейно и квадратично расходящихся диаграмм несколько менее тривиально, например, для нахождения расходящейся части диаграммы

$$(2. F) = \frac{i}{2(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (Sk)(Kk)^{-1} (W(k-p))(K(k-p))^{-1} \quad (49)$$

необходимо произвести разложение в ряд по внешнему импульсу p и сохранить линейные по нему члены. Учитывая, что в силу тождества

$$1_i^j = (K(k+p))_i^m (K(k+p))^{-1}{}^m_j \quad (50)$$

имеем

$$\begin{aligned} (K(k+p))^{-1} &= (Kk)^{-1} - L(Kk)^{-1}(Kk)^\mu (Kk)^{-1} p_\mu + \\ &+ (Kk)^{-1} \left(-\frac{1}{2} L(L-1)(Kk)^{\mu\nu} + L^2 (Kk)^\mu (Kk)^{-1} (Kk)^\nu \right) (Kk)^{-1} p_\mu p_\nu + O(p^3) \end{aligned} \quad (51)$$

(симметризация производится с множителем $1/2$), и тогда выражение для рассматриваемой диаграммы примет вид

$$\frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle L p_\mu \widehat{S} \widehat{W} \widehat{K}^\mu - (L-2) p_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu \rangle. \quad (52)$$

Производя замену $p_\mu \widehat{S} \rightarrow -\partial_\mu \widehat{S}$, получаем окончательное выражение в координатном пространстве

$$(2. F)_\infty = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \langle -L \partial_\mu \widehat{S} \widehat{W} \widehat{K}^\mu + (L-2) \partial_\mu \widehat{S} \widehat{W}^\mu \rangle. \quad (53)$$

Аналогично рассматриваются оставшиеся диаграммы:

$$\begin{aligned} (2. G) &= -\frac{i}{6(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (Sk)(Kk)^{-1} (S(k+q)) \times \\ &\times (K(k+q))^{-1} (S(k-p))(K(k-p))^{-1}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$(2. H) = \frac{i}{4(2\pi)^4} \text{tr} \int d^d k (Sk)(Kk)^{-1} (S(k-p))(K(k-p))^{-1}. \quad (55)$$

Суммируя вклады от всех диаграмм, мы приходим к следующему выражению для расходящейся части однопетлевого эффективного действия произвольного неминимального оператора в плоском пространстве:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{\infty}^{(1)})^{\text{flat}} = & \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \left\langle \frac{1}{4} \widehat{S}^4 - \widehat{W} \widehat{S}^2 + \frac{1}{2} \widehat{W}^2 + \widehat{S} \widehat{N} - \widehat{M} - L \partial_{\mu} \widehat{S} \widehat{W} \widehat{K}^{\mu} + \right. \\
& + (L-2) \partial_{\mu} \widehat{S} \widehat{W}^{\mu} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \widehat{S} \partial_{\nu} \widehat{S} \left(-\frac{1}{2} L(L-1) \widehat{K}^{\mu\nu} + L^2 \widehat{K}^{\mu} \widehat{K}^{\nu} \right) + \\
& + \frac{1}{2} L(L-1) \partial_{\mu} \widehat{S} \partial_{\nu} \widehat{S}^{\nu} \widehat{K}^{\mu} - \frac{1}{4} (L-1)(L-2) \partial_{\mu} \widehat{S} \partial_{\nu} \widehat{S}^{\mu\nu} + \\
& \left. + \frac{1}{3} \left((L-1) \partial_{\mu} \widehat{S}^{\mu} \widehat{S} \widehat{S} - L \partial_{\mu} \widehat{S} \widehat{K}^{\mu} \widehat{S} \widehat{S} - (L-1) \partial_{\mu} \widehat{S} \widehat{S} \widehat{S}^{\mu} + L \partial_{\mu} \widehat{S} \widehat{S} \widehat{K}^{\mu} \right) \right\rangle. \quad (56)
\end{aligned}$$

(Необходимо помнить, что в данном случае обозначения несколько отличаются от случая минимального оператора, см. (48)!)

Обобщение данного результата на случай искривленного многообразия достаточно нетривиально и будет рассмотрено нами в отдельной работе.

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Приведем несколько примеров, подтверждающих корректность полученных формул (44), (46) и (56).

Пусть $l = 1$. Тогда оператор (8) принимает вид (1). Используя (20), легко показать, что в данном случае (44) приводит к хорошо известному результату, полученному в [15].

Аналогично имеем и для наиболее общего минимального оператора четвертого порядка ($l = 2$) (2). В данном случае из (44) получается результат, совпадающий с найденным в работе [6] с точностью до несущественных полных производных.

Минимальный оператор также можно рассматривать как частный случай неминимального, если

$$K^{\mu\nu\dots\alpha}{}_i{}^j = \delta_i{}^j K_0^{\mu\nu\dots\alpha}.$$

Используя правила, сформулированные в приложении, легко видеть, что в этом случае ответ для неминимального оператора (56) переходит в результат (32) для минимального оператора (8) в плоском пространстве.

Во многих работах можно встретить следующий неминимальный оператор:

$$D_{\alpha}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta} \partial^{\mu} \partial_{\mu} - \lambda \partial_{\alpha} \partial^{\beta} + W_{\alpha}{}^{\beta}, \quad \text{где } W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha} \quad (57)$$

(такой оператор возникает при квантовании векторных полей в неминимальной калибровке).

Оператор (57) может быть записан в форме (5), если

$$K^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta} = g^{\mu\nu} \delta_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{\lambda}{2} (g^{\mu\beta} \delta_{\alpha}{}^{\nu} + g^{\nu\beta} \delta_{\alpha}{}^{\mu}), \quad (58)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (Kn)_\alpha^\beta &= \delta_\alpha^\beta - \lambda n_\alpha n^\beta, \\ (Kn)_\alpha^{-1\beta} &= \delta_\alpha^\beta + \gamma n_\alpha n^\beta, \quad \text{где } \gamma \equiv \frac{\lambda}{1-\lambda}. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя это в формулу (56) и используя (20), находим

$$\Gamma_\infty^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2(d-4)} \text{tr} \int d^4x \left(\frac{1}{48} \gamma^2 W^2 + \left(\frac{1}{24} \gamma^2 + \frac{1}{4} \gamma + \frac{1}{2} \right) W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \right), \quad (60)$$

где $W \equiv W_\alpha^\alpha$.

Это выражение согласуется с результатами, найденными в работах [6, 20] и [11].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы предложили достаточно простой и явно ковариантный алгоритм вычисления однопетлевых контрчленов в теориях с высшими производными [21] и высшими спинами. Фактически нами был проделан в общем виде ряд наиболее сложных операций, выполняемых при вычислении однопетлевых диаграмм в любой теории. По этой причине применение полученных формул обладает рядом преимуществ по сравнению с ранее известными подходами.

Вычисления для неминимального оператора могут быть также проведены в общем виде в искривленном пространстве [22].

Рассмотрение ряда частных случаев показало полное соответствие наших результатов с ранее известными.

С другой стороны, полученная процедура вычислений может быть рассмотрена как шаг на пути к полной автоматизации процесса вычисления однопетлевых расходимостей. Для достижения данной цели также необходимо иметь соответствующее программное обеспечение. В частности, в процессе работы мы многократно использовали написанный нами тензорный пакет для системы аналитических вычислений REDUCE [23], который позволил значительно облегчить выполнение наиболее трудоемких операций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегрирование по углам для минимального оператора

Здесь мы сформулируем ряд правил работы с операцией интегрирования по углам $\langle \rangle$ для диагонального оператора, некоторые из которых были многократно использованы при получении (44) и (46).

В качестве исходного пункта мы рассмотрим уравнение (20):

$$\begin{aligned} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_{2m}} \rangle &= \frac{1}{2^m (m+1)!} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + \\ &\quad + g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} \dots g_{\mu_{2m-1} \mu_{2m}} + \dots), \end{aligned}$$

которое может быть интерпретировано следующим образом. Для нахождения результата интегрирования по углам необходимо произвести все возможные спаривания между n_α и умножить результат на константу. Спаривание n_α и n_β дает при этом $g_{\alpha\beta}$.

Количество слагаемых в сумме равно $(2m - 1)!!$. Следовательно, если (20) свернуть с полностью симметричным тензором $A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m}} = A_{(2m)}$ (индексы внизу указывают в данном случае ранг тензора), будет получен следующий результат:

$$\langle (A_{(2m)} n) \rangle = \frac{(2m - 1)!!}{2^m(m + 1)!} A, \quad (61)$$

где $A \equiv A^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}$.

Аналогично находим, что для тензора $A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2m-1}} \equiv A_{(2m-1)}$ выполняется следующее соотношение:

$$\langle n_\alpha (A_{(2m-1)} n) \rangle = \frac{(2m - 1)!!}{2^m(m + 1)!} A_\alpha = \frac{2m - 1}{2(m + 1)} \langle (A_{(2m-1)} n)_\alpha \rangle, \quad (62)$$

где $A_\alpha \equiv A^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}}_{\mu_1\cdots\mu_{m-1}\alpha}$.

В более общем случае нам потребуется следующее следствие (20):

$$\begin{aligned} \langle n_{\mu_1} n_{\mu_2} \cdots n_{\mu_{2m}} \rangle &= \frac{1}{2(m + 1)} (g_{\mu_1\mu_2} \langle n_{\mu_3} n_{\mu_4} \cdots n_{\mu_{2m}} \rangle + g_{\mu_1\mu_3} \langle n_{\mu_2} n_{\mu_4} \cdots n_{\mu_{2m}} \rangle + \cdots \\ &\quad \cdots + g_{\mu_1\mu_{2m}} \langle n_{\mu_2} n_{\mu_3} \cdots n_{\mu_{2m-1}} \rangle). \end{aligned} \quad (63)$$

Производя свертку с двумя полностью симметричными тензорами, находим

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha (A_{(2m)} n) (B_{(2p-1)} n) \rangle &= \frac{1}{2(m + p + 1)} (2m \langle (A_{(2m)} n)_\alpha (B_{(2p-1)} n) \rangle + \\ &\quad + (2p - 1) \langle (A_{(2m)} n) (B_{(2p-1)} n)_\alpha \rangle). \end{aligned} \quad (64)$$

Данное соотношение может быть элементарно обобщено на случай свертки с произвольным количеством симметричных тензоров.

Оказывается, что для минимального оператора можно вообще полностью выполнить интегрирование по углам в явном виде [24]. Несмотря на то что ответы оказываются чрезвычайно громоздкими, они очень удобны для расчетов в случаях операторов высоких порядков, т.к. с их использованием количество выполняемых операций резко сокращается.

Список литературы

- [1] *S. Minakshisundaram*. J. Ind. Math. Soc. 1949. V. 13. P. 41.
- [2] *R. T. Seeley*. Amer. Math. Soc. 1967. V. 10. P. 288.
- [3] *P. B. Gilkey*. J. Differ. Geomet. 1975. V. 10. P. 601; Duke Mathematical Journal. 1980. V. 47. P. 511; 1981. V. 48. P. 887.
- [4] *J. S. Schwinger*. Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [5] *Б. С. ДеВитт*. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [6] *A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky*. Phys. Rep. 1985. V. 119. P. 1.
- [7] *Yu. N. Obukhov*. Nucl. Phys. 1983. V. B 212. P. 237.
- [8] *N. H. Barth*. J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. P. 857; P. 875.
- [9] *G. Cognola, S. Zerbin*. Phys. Lett. 1987. V. B 195. P. 435; Phys. Lett. 1988. V. B 214. P. 70.
- [10] *V. P. Gusynin*. Nucl. Phys. 1990. V. B 333. P. 296.
- [11] *V. P. Gusynin, E. V. Gorbar, V. V. Romankov*. Nucl. Phys. 1991. V. B 362. P. 449.
- [12] *C. Lee, C. Rim*. Nucl. Phys. 1985. V. B 255. P. 439.
- [13] *I. Jack, H. Osborn*. Nucl. Phys. 1985. V. B 249. P. 472.
- [14] *A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, G. A. Vilkovisky, V. V. Zhytnikov*. Covariant Perturbation Theory (IV), Third Order in Curvature. Report of the University of Manitoba. Winnipeg: University of Manitoba, 1993; J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3525; P. 3543.
- [15] *G. t'Hooft, M. Veltman*. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1974. V. 20. P. 69.
- [16] *G. t'Hooft, M. Veltman*. Nucl. Phys. 1973. V. B44. P. 189; V. B62. P. 444.
- [17] *I. Jack, H. Osborn*. Nucl. Phys. 1982. V. B 207. P. 474.
- [18] *L. F. Abbott*. Nucl. Phys. 1981. V. B 185. P. 189.
- [19] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. One-loop background calculations in the general field theory. In: Gravity, Particles and Space-Time. Eds P. Pronin and G. Sardanasvili. Singapore: World Scientific, 1996. P. 441; Grav. and Cosmology. 1996. V. 2. P. 501.
- [20] *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin*. Higher Derivative Quantum Gravity: One-loop Counterterms and Asymptotic Freedom: Preprint № 170. M.: P. Lebedev Physical Institute, 1981.
- [21] *A. A. Slavnov*. Nucl. Phys. 1971. V. B 31. P. 301; ТМФ. 1972. Т. 13. С. 174.
- [22] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. Hep-th 9605206.
- [23] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. New Tensor Package for REDUCE System. In: New Computing Technique in Physics Research. IV. Eds B. Denby and D. Perred-Gallix. Singapore: World Scientific, 1995. P. 263.
- [24] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. Hep-th 9604038.

Поступила в редакцию 1.III.1996 г.

P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz

ONE-LOOP EFFECTIVE ACTION FOR AN ARBITRARY THEORY

Using diagramic approach, we obtain formulas for the divergent part of the one-loop effective action for an arbitrary minimal operator in the four dimensional curved space and an arbitrary nonminimal operator in the flat space.